俄罗斯数学
教材选译

微积分学教程

(第二卷) (第8版)

□ Г. М. 菲赫金哥尔茨 著

□ 徐献瑜 冷生明 梁文骐 译

□ 郭思旭 校

高等教育出版社
Higher Education Press

图字: 01–2005–5741 号

Г. М. Фихтенгольц, Курс дифференциального и
интегрального исчисления, том 2

ISBN 5–9221–0437–3
The Chinese language edition is authorized by FIZMATLIT
PUBLISHERS RUSSIA for publishing and sales in the People's
Republic of China

图书在版编目 (CIP) 数据

微积分学教程. 第2卷: 第8版 / (俄罗斯) 菲赫金哥
尔茨著; 徐献瑜, 冷生明, 梁文骐译. —2版. —北京:
高等教育出版社，2006. 1
ISBN 7-04-018304-8

I.微… II.①菲…②徐…③冷…④梁…
III.微积分 - 高等学校 - 教材 IV.0172

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2005) 第 152525 号

策划编辑 张小萍 **责任编辑** 赵天夫 **封面设计** 王凌波
责任印制 孔 源

出版发行	高等教育出版社	**购书热线**	010 – 58581118
社　　址	北京市西城区德外大街 4 号	**免费咨询**	800 – 810 – 0598
邮政编码	100011	**网　　址**	http://www.hep.edu.cn
总　　机	010 – 58581000		http://www.hep.com.cn
		网上订购	http://www.landraco.com
			http://www.landraco.com.cn
经　　销	蓝色畅想图书发行有限公司	**畅想教育**	http://www.widedu.com
印　　刷	北京新丰印刷厂		
		版　　次	1954 年 10 月第 1 版
开　　本	787 × 1092 1/16		2006 年 1 月第 2 版
印　　张	43	**印　　次**	2006 年 1 月第 1 次印刷
字　　数	870 000	**定　　价**	65.00 元

物料号 18304–00

序

从上世纪 50 年代初起, 在当时全面学习苏联的大背景下, 国内的高等学校大量采用了翻译过来的苏联数学教材. 这些教材体系严密, 论证严谨, 有效地帮助了青年学子打好扎实的数学基础, 培养了一大批优秀的数学人才. 到了 60 年代, 国内开始编纂出版的大学数学教材逐步代替了原先采用的苏联教材, 但还在很大程度上保留着苏联教材的影响, 同时, 一些苏联教材仍被广大教师和学生作为主要参考书或课外读物继续发挥着作用. 客观地说, 从解放初一直到文化大革命前夕, 苏联数学教材在培养我国高级专门人才中发挥了重要的作用, 起了不可忽略的影响, 是功不可没的.

改革开放以来, 通过接触并引进在体系及风格上各有特色的欧美数学教材, 大家眼界为之一新, 并得到了很大的启发和教益. 但在很长一段时间中, 尽管苏联的数学教学也在进行积极的探索与改革, 引进却基本中断, 更没有及时地进行跟踪, 能看懂俄文数学教材原著的人也越来越少, 事实上已造成了很大的隔膜, 不能不说是一个很大的缺憾.

事情终于出现了一个转折的契机. 今年初, 在由中国数学会、中国工业与应用数学学会及国家自然科学基金委员会数学天元基金联合组织的迎春茶话会上, 有数学家提出, 莫斯科大学为庆祝成立 250 周年计划推出一批优秀教材, 建议将其中的一些数学教材组织翻译出版. 这一建议在会上得到广泛支持, 并得到高等教育出版社的高度重视. 会后高等教育出版社和数学天元基金一起邀请熟悉俄罗斯数学教材情况的专家座谈讨论, 大家一致认为: 在当前着力引进俄罗斯的数学教材, 有助于扩大视野, 开拓思路, 对提高数学教学质量、促进数学教材改革均十分必要.《俄罗斯数学教材选译》系列正是在这样的情况下, 经数学天元基金资助, 由高等教育出版社组织出版的.

经过认真选题并精心翻译校订, 本系列中所列入的教材, 以莫斯科大学的教材为主, 也包括俄罗斯其他一些著名大学的教材. 有大学基础课程的教材, 也有适合大学高年级学生及研究生使用的教学用书. 有些教材虽曾翻译出版, 但经多次修订重版, 面目已有较大变化, 至今仍广泛采用、深受欢迎, 反射出俄罗斯在出版经典教材方面所作的不懈努力, 对我们也是一个有益的借鉴. 这一教材系列的出版, 将中俄数学教学之间中断多年的链条重新连接起来, 对推动我国数学课程设置和教学内容的改革, 对提高数学素养、培养更多优秀的数学人才, 可望发挥积极的作用, 并起着深远的影响, 无疑值得庆贺, 特为之序.

李大潜

2005 年 10 月

编者的话

格里戈里 · 米哈伊洛维奇 · 菲赫金哥尔茨的《微积分学教程》是一部卓越的科学与教育著作，曾多次再版，并被翻译成多种文字.《教程》包含实际材料之丰富，诸多一般定理在几何学、代数学、力学、物理学和技术领域的各种应用之众多，在同类教材中尚无出其右者. 很多现代著名数学家都提到，正是 Г. М. 菲赫金哥尔茨的《教程》使他们在大学时代培养起了对数学分析的兴趣和热爱，让他们能够第一次清晰地理解这门课程.

从《教程》第一版问世至今已有 50 年，其内容却并未过时，现在仍被综合大学以及技术和师范院校的学生像以前那样作为数学分析和高等数学的基本教材之一使用. 不仅如此，尽管出现了新的一批优秀教材，但自 Г. М. 菲赫金哥尔茨的《教程》问世起，其读者群就一直不断扩大，现在还包括许多数理特长中学 (译注：在俄罗斯，除了类似中国的以外语、音乐为特长的中学，还有以数学与物理学为重点培养方向的中学，其教学大纲包括更多更深的数学与物理学内容，学生则要经过特别的选拔.) 的学生和参加工程师数学进修培训课程的学员.

《教程》所独有的一些特点是其需求量大的原因.《教程》所包括的主要理论内容是在 20 世纪初最后形成的现代数学分析的经典部分 (不含测度论和一般集合论). 数学分析的这一部分在综合大学的一、二年级讲授，也 (全部或大部分) 包括在所有技术和师范院校的教学大纲中.《教程》第一卷包括实变一元与多元微分学及其基本应用，第二卷研究黎曼积分理论与级数理论，第三卷研究多重积分、曲线积分、曲面积分、斯蒂尔吉斯积分、傅里叶级数与傅里叶变换.

《教程》的主要特点之一是含有大量例题与应用实例，正如前文所说，通常这些内容非常有趣，其中的一部分在其他俄文文献中是根本没有的.

另外一个重要特点是材料的叙述通俗、详细和准确. 尽管《教程》的篇幅巨大, 但这并不妨碍对本书的掌握. 恰恰相反, 这使作者有可能把足够多的注意力放在新定义的论证和问题的提法, 基本定理的详尽而细致的证明, 以及能使读者更容易理解本课程的其他方面上. 每个教师都知道, 同时做到叙述的清晰性和严格性一般是很困难的 (后者的欠缺将导致数学事实的扭曲). 格里戈里 · 米哈伊洛维奇 · 菲赫金哥尔茨的非凡的教学才能使他在整个《教程》中给出了解决上述问题的大量实例, 这与其他一些因素一起, 使《教程》成为初登讲台的教师的不可替代的范例和高等数学教学法专家们的研究对象.

《教程》还有一个特点是极少使用集合论的任何内容 (包括记号), 同时保持了叙述的全部严格性. 整体上, 就像 50 年前那样, 这个方法使很大一部分读者更容易初步掌握本课程.

在我们向读者推出的 Г. М. 菲赫金哥尔茨的新版《教程》中, 改正了在前几版中发现的一些印刷错误. 此外, 新版在读者可能产生某些不便的地方增补了 (为数不多的) 一些简短的注释, 例如, 当作者所使用的术语或说法与现在最通用的表述有所不同时, 就会给出注释. 新版的编辑对注释的内容承担全部责任.

编者对 Б. М. 马卡罗夫教授表示深深的谢意, 他阅读了所有注释的内容并提出了很多有价值的意见. 还要感谢国立圣彼得堡大学数学力学系数学分析教研室的所有工作人员, 他们与本文作者一起讨论了与《教程》前几版的内容和新版的设想有关的各种问题.

编辑部预先感谢所有那些希望通过自己的意见来协助进一步提高出版质量的读者.

A. A. 弗洛连斯基

目　录

第八章 原函数 (不定积分)

§1. 不定积分与它的计算的最简单方法

263. 原函数 (即不定积分) 的概念 在科学与技术的许多问题中, 我们所需要的不是由给定的函数求它的导数, 相反地, 是要由一个函数的已知导数还原出这个函数. 在第 **91** 目中, 假定已知运动的方程 $s=s(t)$, 即是, 路程随时间而变化的变化规律, 我们用微分法先得出了速度 $v=\frac{ds}{dt}$, 然后找出加速度 $a=\frac{dv}{dt}$. 但实际上, 时常需要解决反面的问题:*给定加速度 a 是时间 t 的函数, $a=a(t)$, 要求确定速度 v 与所经路程 s 依赖于 t 的关系*. 这样, 就需要由函数 $a=a(t)$ 还原出一个函数 $v=v(t)$, 它的导数就是 a, 然后, 知道了函数 v, 再求一个函数 $s=s(t)$, 而它的导数就是 v.

我们给出下面的**定义**:

如果在给定的整个区间上,$f(x)$ 是函数 $F(x)$ 的导数, 或 $f(x)dx$ 是 $F(x)$ 的微分

$$F'(x)=f(x) \text{ 或 } dF(x)=f(x)dx^{①},$$

那么, 在所给定的区间上, 函数 $F(x)$ 叫做 $f(x)$ 的原函数或 $f(x)$ 的积分.

求一个函数的所有的原函数, 叫做求积分, 这是*积分学*的问题之一; 可以看出, 这是微分学基本问题的反面问题.[35)]

①在这情形下也可说函数 $F(x)$ 是微分表达式 $f(x)dx$ 的原函数 (或积分).

35)关于词 "积分" 的起源参看 **294** 目的第二个脚注, 在积分学中系统地应用某些名词术语, 其中都含有词 "积分":"不定积分"、"定积分"、"反常积分" 等等. 与这些名词术语相应的数学概念以及由其来源得出的问题在今后将仔细予以研究.(*此处及今后带序码的脚注是编者注.*)

定理 如果在某一个区间 $\mathcal{X}$(有限的或无穷的, 闭的或非闭的) 上, 函数 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数, 那么, 函数 $F(x)+C$ 也是 $f(x)$ 的原函数, 其中 C 是任意常数. 反过来说, 在区间 $\mathcal{X}$ 上 $f(x)$ 的每一个原函数可表示成这种形式.

证明只要限于 $\mathcal{X}$ 是有限闭区间 $[a,b]$ 的情形就够了.

证明 $F(x)$ 与 $F(x)+C$ 同是 $f(x)$ 的原函数, 这个情形是十分明显的, 因为 $[F(x)+C]'=F'(x)=f(x)$.

现在设 $\Phi(x)$ 是函数 $f(x)$ 的任何一个原函数, 于是在区间 $[a,b]$ 上

$$\Phi'(x)=f(x).$$

因为函数 $F(x)$ 与 $\Phi(x)$ 在所考虑的区间上有相同的导数, 所以它们只相差一个常数 [**131**, 推论]

$$\Phi(x)=F(x)+C,$$

这就是所要证明的.

由这定理推知, 为要知道给定函数 $f(x)$ 的所有的原函数, 只要求出它的一个原函数 $F(x)$ 就够了, 因为它们彼此之间只差一个常数项.

由此,表达式 $F(x)+C$ 是导数为 $f(x)$ 或微分为 $f(x)dx$ 的函数的一般形状, 其中 C 是任意常数. 这表达式称为 $f(x)$ 的**不定积分**, 用记号

$$\int f(x)dx$$

来表示 [36], 这个记号中已暗含有任意常数. 乘积 $f(x)dx$ 称为**被积表达式**, 函数 $f(x)$ 称为**被积函数**.

例题 设 $f(x)=x^2$; 不难看出, 这个函数的不定积分是

$$\int x^2dx=\frac{x^3}{3}+C.$$

这很容易用反面的演算 —— 微分法 —— 来验证.

我们提醒读者注意, 在 "积分" 记号 $\int$ 下写的是所要求原函数的**微分**, 而不是**导数** (在我们的例题里是 x^2dx, 而不是 x^2). 以后在 **294** 目中将要阐明, 这样的记法是有历史根据的; 而且它还表现着许多优点, 因而保留它是十分合理的.

[36] 这样一来, 可以说符号 $\int f(x)dx$ 是在某个区间上的函数 $f(x)$ **标准原函数**的表示. 可以有不定积分概念的另外的解释 (同样是十分通行的); 这种解释是: 符号 $\int f(x)dx$ 看作是函数 $f(x)$ 的所有原函数的**集合**. 与此相应, 等式 $\int f(x)dx=F(x)+C$ 这时应看成是更为复杂的记法 $\int f(x)dx=\{F(x)+C: C\in\mathbf{R}\}$ 的简化形式; 与不定积分有关的基本公式这时解释为集合的等式. 因此在课文中证明的有关不定积分的关系式, 对符号 $\int f(x)dx$ 的这一种或另一种解释都保持其正确性, 读者原则上可持其中任一种看法.

从不定积分的定义直接推出下列的一些性质:

1. $d\int f(x)dx = f(x)dx$,

即是,记号 d 与 $\int$, 当前者位于后者的前面时, 可互相消去.

2. 因为 $F(x)$ 是函数 $F'(x)$ 的一个原函数, 我们有

$$\int F'(x)dx = F(x) + C,$$

这式子可以改写为

$$\int dF(x) = F(x) + C.$$

由此可见,在 $F(x)$ 前面的记号 d 与 $\int$, 当 d 在 $\int$ 后面的时候, 也可把它们消去, 但必须在 $F(x)$ 后加上一个任意常数.

回到我们一开始就提出来的那个力学问题上, 现在我们可以写

$$v = \int a(t)dt$$

与

$$s = \int v(t)dt.$$

为了明确起见, 假定我们要讨论的运动是等加速运动, 例如, 在重力作用下的运动; 这时 $a = g$(沿铅垂线向下的方向为正方向), 并且, 不难了解

$$v = \int gdt = gt + C.$$

我们得到了速度 v 的表达式, 在这表达式中, 除时间 t 外, 还包含有一个任意常数 C. 在同一时刻, 对于不同的 C 的值, 我们将得到速度的不同的值; 因此, 对于问题的完全解决, 我们已有的数据是不够的. 为要得出问题的完全确定的解决, 需要知道在某一时刻速度的数值才够. 例如, 设已知在 $t = t_0$ 时速度 $v = v_0$; 我们把这些值代入所求得的速度的表达式中

$$v_0 = gt_0 + C,$$

由此

$$C = v_0 - gt_0,$$

现在我们的解就有了完全确定的形状

$$v = g(t - t_0) + v_0.$$

其次, 我们求得路程 s 的表达式

$$s = \int [g(t - t_0) + v_0]dt = \frac{1}{2}g(t - t_0)^2 + v_0(t - t_0) + C'$$

(用微分法容易验证, 原函数可以取这样的形式). 例如, 假定在 $t = t_0$ 时路程 $s = s_0$ 给定, 我们就可以确定新的未知常数 C'; 求得 $C' = s_0$ 之后, 我们便可以写出解的最后的形状

$$s = \frac{1}{2}g(t - t_0)^2 + v_0(t - t_0) + s_0.$$

习惯上称值 t_0, s_0, v_0 为量 t, s 与 v 的**初始值**.

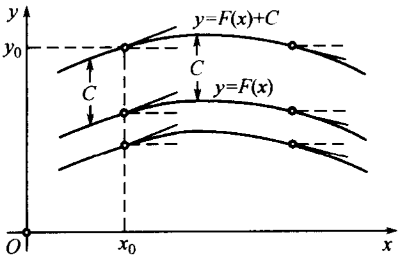

图 1

我们知道, 函数 $y = F(x)$ 的导数给出对应图形的切线的斜率. 因此, 可以这样来解释求给定函数 $f(x)$ 的原函数 $F(x)$ 的问题:要找出一条曲线 $y = F(x)$, 使它的切线斜率适合给定的变化规律

$$\operatorname{tg} \alpha = f(x).$$

如果 $y = F(x)$ 是这些曲线之一, 那么, 只需把它顺着 y 轴作简单的平移, 便可以得到所有其余的曲线 (移动的距离 C 是任意的, 图 1). 为要从这族曲线得出一条个别的曲线, 只需给出 (举例来说) 这曲线应当通过的一点 (x_0, y_0) 就够了; **初始条件** $y_0 = F(x_0) + C$ 就给出 $C = y_0 - F(x_0)$.

264. 积分与面积定义问题 把原函数解释作曲线图形的面积是更为重要的. 因为在历史上原函数概念与面积的确定有极其紧密的联系, 所以我们就在这儿来讲述这个问题 (这儿只利用平面图形的面积的直觉的表示, 而把这个问题的精确提法留到第十章去讲).

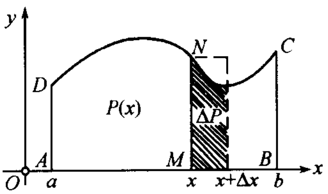

图 2

设给定在区间 $[a, b]$ 上只取正 (或非负) 值的连续函数 $y = f(x)$. 考虑限制在曲线 $y = f(x)$ 下, x 轴上及两纵坐标线 $x = a$ 与 $x = b$ 之间的图形 $ABCD$(图 2); 我们把这类图形叫做**曲边梯形**. 想要确定这图形的面积 P 的值, 我们研究变动图形 $AMND$ 的面积的性质, 这变动图形包含在开始纵坐标线 $x = a$ 以及跟区间 $[c, b]$ 上任意选出的 x 值相对应的纵坐标线之间. 当 x 改变时, 这个面积将随之而变, 并且对应于每一 x 有它的一个完全确定的值, 于是曲线梯形 $AMND$ 的面积是 x 的某一函数; 我们用 $P(x)$ 表示它.

我们首先提出求函数 $P(x)$ 的导数的问题. 为了这个目的, 我们给 x 添上某一个 (比方说, 正的) 改变量 Δx ; 此时面积 $P(x)$ 将获得改变量 ΔP.

以 m 及 M 分别表示在区间 $[x, x + \Delta x]$ 上函数 $f(x)$ 的最小值与最大值 [84], 并

将面积 ΔP 与底为 Δx, 高为 m 及 M 的矩形的面积加以比较. 显然

$$m\Delta x < \Delta P < M\Delta x,$$

由此

$$m < \frac{\Delta P}{\Delta x} < M.$$

如果 $\Delta x \to 0$, 那么, 由于连续性, m 与 M 趋于 $f(x)$, 因而

$$P'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta P}{\Delta x} = f(x).$$

这样, 我们就得到一个有名的定理 (通常叫做**牛顿–莱布尼茨定理**)①: 变动面积 $P(x)$ 对有限的横坐标 x 的导数等于有限的纵坐标 $y = f(x)$.

换句话说, 变动面积 $P(x)$ 是给定函数 $y = f(x)$ 的**原函数**. 由于当 $x = a$ 时这个原函数变为 0 这一特点, 使得它与原函数族中其他的原函数有所不同. 因此, 如果已知函数 $f(x)$ 的任何一个原函数 $F(x)$, 则按前一目中的定理就有

$$P(x) = F(x) + C,$$

那么, 令 $x = a$, 就容易定出常数 C

$$0 = F(a) + C, \quad \text{于是} \quad C = -F(a).$$

最后

$$P(x) = F(x) - F(a).$$

特别地, 要求得整个曲边梯形 $ABCD$ 的面积 P, 需要取 $x = b$:

$$P = F(b) - F(a).$$

作为例子, 我们求界限在抛物线 $y = ax^2$ 下, x 轴上及对应于给定横坐标 x 的纵坐标之间的图形的面积 $P(x)$(图 3); 因为抛物线交 x 轴于坐标轴的原点, 所以, 在这儿 x 的开始值为 0. 容易找出函数 $f(x) = ax^2$ 的原函数: $F(x) = \frac{ax^3}{3}$. 当 $x = 0$ 时这个函数恰好变为 0, 所以

$$P(x) = F(x) = \frac{ax^3}{3} = \frac{xy}{3}$$

[比较 **32**, 4)].

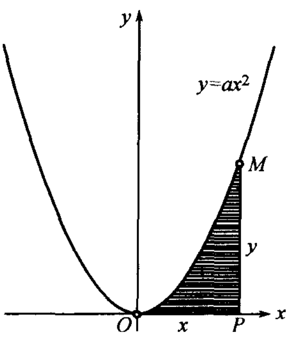

图 3

由于在计算积分与求平面图形的面积之间有联系, 通常习惯于把积分计算本身叫作**求积**.

①其实, 这个定理 —— 虽然是在另一种形式里 —— 已为**牛顿**的老师**巴洛** (Is.Barow) 发表过了.