

CAIXIANG JIEYI

猜想解疑

韩文法 著

河南人民出版社

CAIXIANG JIEYI

猜想解疑

韩文法 著

江苏工业学院图书馆
藏书章

河南人民出版社

图书在版编目(CIP)数据

猜想解疑/韩文法著. - 郑州:河南人民出版社,
2004.2

ISBN 7-215-05258-3

I. 猜… II. 韩… III. 数学-文集 IV. 01-53

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 032353 号

河南人民出版社出版发行

(地址:郑州市经五路 66 号 邮政编码:450002 电话:5723341)

新华书店经销 河南第一新华印刷厂印刷

开本 850 毫米×1168 毫米 1/32 印张 7.375

字数 173 千字

2004 年 2 月第 1 版 2004 年 2 月第 1 次印刷

定价:15.00 元

前 言

《猜想解疑》的出版,是适应数字发展和提高数学教育质量的需要。

本书论证的问题,为部分数论猜想问题。这些问题均为貌似简单、而长期得不到解决的疑难问题,作者用一般数字方法获得了完满的结果。其中有些篇目已公开发表过,如《 $(1+1)$ 问题》、《孪生素数问题》、《麦生素数问题》、《欧拉猜想的证明》、《角谷猜想的讨论》、《FLT 的一个证明》,等等。现汇同未发表篇目编辑出版,可供高中以上师生研究参考。

限于水平,错误之处在所难免,诚恳欢迎读者批评指正。

作 者

目 录

一、集合的概念	1
二、可数集	6
三、康托三分集	11
四、集合能不能比较大小	15
五、ZFC 公理系统	22
六、选择公理	26
七、连续统假设	28
八、力迫法简介	31
九、素数表达式问题	34
十、 $n^2 + 1$ 型素数有无穷多个	39
十一、 $(\quad)^3 + 2$ 中的素数个数问题	40
十二、 $n^4 + 1$ 中的素数个数问题	42
十三、 $6n \pm 1$ 型素数问题的讨论	44
十四、 $\{N\}$ 中的素数问题	47
十五、 $2^n - 1$ 型素数问题	49
十六、素数的分类	52
十七、一类素数公式	61

十八、欧拉猜想的证明·····	71
十九、角谷猜想的讨论·····	74
二十、由黎曼猜想谈起·····	80
二十一、孪生素数问题·····	88
二十二、素数对问题·····	97
二十三、 $(P, P + 6)$ 问题·····	101
二十四、麦生素数问题·····	103
二十五、 $(1 + 1)$ 问题·····	107
二十六、费尔马数的讨论·····	112
二十七、伯特兰猜想·····	115
二十八、杰波夫猜想·····	117
二十九、克拉莫猜想·····	119
三十、Bertrand 假设·····	120
三十一、Bowen 猜想·····	122
三十二、Lehmer 猜想·····	127
三十三、商高数猜想·····	136
三十四、猜想 $n = N^2 + P$ 的破解·····	139
三十五、回文数猜想·····	142
三十六、黑洞数问题·····	146
三十七、超越数简介·····	162
三十八、完全数介绍·····	168
三十九、整数因子和问题·····	172
四十、 $x^3 + y^3 + z^3 = 3$ 解的讨论·····	176
四十一、 $2^n \equiv 3 \pmod{n}$ 是否有解·····	183
四十二、 $\pi(x) + \pi(y) \geq \pi(x + y)$ 的证明·····	185
四十三、FLT 的一个证明·····	189
四十四、拉格朗日定理·····	196

四十五、如何计算 $\aleph_\alpha^{\aleph_\beta}$	200
四十六、卡札里诺夫猜想	203
四十七、悖论	205
四十八、不能成立的悖论	210
四十九、悖论的一种解法	217
五十、不完全性定理	224
附录：主要参考书目	228

一、集合的概念

(一) 集合

集合是现代数学的一个基础概念,我们常常碰到它而又无法加以定义。

在集合论的研究中,人们总想对集合的概念给以定义,例如有以下说法:

若干事物的总体,叫集合;

把一个个东西汇集起来,成为一个整体,这就形成一个集合;

一些具有某种性质的对象的全体,叫做一个集合;

一堆东西当成一个单体来考虑,这便是一个集合;

.....

如果把这些说法当成集合的定义,是不正确的,因为总体、整体、全体、单体等概念没能说明任何问题,它们和集合是一种自相定义。

集合论的创始人、德国数学家康托($G \cdot Cantor$ 1845—1918)曾给集合定义为:

“集合是我们的直观或思维中,被看成一个整体的、确定的、相异的对象的总体”。“对象称为集合的元素,集合包含它的元素,或者元素属于集合”。

这个定义也不能算是对集合的完美无缺的科学定义,因为在

这个定义中,所说的“直观或思维的对象”,“整体的、确定的、相异的”等概念仍然是含混不清的,也未能确切地说明究竟什么是集合。

在对集合概念无法定义的情况下,人们只能沿用上述种种说法来描述集合的意义了。尽管有某些缺点,在多数情况下,我们总把具有共同属性或同类事物的汇总,叫做集合。

在运用集合概念时,我们规定:

1. 集合一般用大写字母 A 、 B 、 C ... X 、 Y 、 Z ...表示。组成集合的对象,叫集合的元素(或元),元素用小写字母 a 、 b 、 c ... x 、 y 、 z ...表示。

若 a 是集合 A 的元素,记为 $a \in A$ 。

若 a 不是集合 A 的元素,记为 $a \notin A$ (或 $a \notin A$)。

把所有属于集合 A 的元素,用大括号括起来,这叫枚举法,

例如 $A = \{1, 2, 3, 4\}$

把集合元素的特征表示出来,叫描述法。

例如 $A = \{x | 2x - 1 > 0\}$

2. 集合的元素可以是具体的事物,也可以是抽象的事物,还可以是既具体又抽象的事物组成、集合与集合之间的元素性质可以不同,就是同一个集合,其元素性质也允许千差万别。

例如 $\{\text{课桌, 椅子, 黑板}\}$ 是具体事物组成的集合;

$\{\text{自然数, 孔子思想, 《我的中国心》}\}$ 是抽象事物组成的集合;

$\{\text{银河系, 粉笔, 花环, 5}\}$ 是既有具体事物, 又有抽象事物组成的集合。

3. 集合里的元素个数可以是有限多个,也可以是无限多个,前者叫有限集(或有穷集),后者叫无限集(或无穷集)。

4. 对一个集合来说,某一事物属于它或不属于它,是非常明确的,不能又属于它又不属于它,模棱两可。

例如 对集合 $A = \{a, b, m, n\}$ 来说,有

$$a \in A, b \in A, m \in A, n \in A,$$

$$\text{但 } p \notin A, d \notin A, 5 \notin A.$$

5. 集合和集合中的元素在概念上是不同的,集合指的是整体,它是由一些元素组成的。元素是个体,它不能代替集合,只是集合的构成部分。

a 与 $\{a\}$ 是两个不同的概念,例如 a 是三个元素组成的集合 $a = \{1, 2, 3\}$ 。而 $\{a\}$ 是只包含一个元素的集合,只包含一个元素的集合叫单元集。

6. 在同一个集合中,相同的事物只能看成是一个元素,不能当成不同元素对待。例如在 $\{1, 1, 2, 3, 1, 3\}$ 中,三个相同的 1, 只是一个元素,两个相同的 3, 也只是一个元素,因此这个集合实际上和 $\{1, 2, 3\}$ 是相同的。

一个集合,一般来说我们不考虑它的元素次序,因此, $\{1, 2, 3\}$, $\{1, 3, 2\}$, $\{2, 1, 3\}$, $\{3, 2, 1\}$, $\{2, 3, 1\}$, 可以认为是相同的集合。

(二) 子集

一个集合 A , 若它的一部分元素所构成的集合为 B , 则 B 叫 A 的子集, A 叫 B 的扩集。

例如 若 $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

$$B = \{2, 3, 5\}$$

则 B 是 A 的子集, A 是 B 的扩集。

当 B 是 A 的子集时, 记为 $B \subset A$, 这时 B 的每一个元素, 同时必须也是 A 的元素。

显然, $A \subset A$, 就是说, 任何一个集合, 必定是它本身的子集。

如果 $B \subset A$, 而且 $B \neq A$, 则 B 叫 A 的真子集, 显然任何一个集合, 都不可能是它自己的真子集。

B 为 A 的真子集与 A 为 B 的真子集,两者不能同时成立。

(三) 空集

不含任何元素的集合,叫空集,通常记为 $\emptyset$ (丹麦文字母,读欧)。空集也叫零集,不含任何元素为什么也算一个集合呢?这完全出于方便。

空集有一些特殊性质:

1. 任何一个事物 x , 有

$$x \notin \emptyset$$

2. $\emptyset$ 是一切集合的子集合。

证明 假设 S 是任意一个集合。

若 $\emptyset \not\subset S$, 显然必有一个元素 x , 使 $x \in \emptyset, x \notin S$, 这是不可能的。

故得 $\emptyset \subset S$

由此推知: $\emptyset \subset \emptyset$

$$\emptyset \subset \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$$

$$\{\emptyset\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$$

但 $\emptyset \notin \{\emptyset\}$

3. 空集只有一个。

证明 若有不同的空集 $\emptyset, \emptyset_1$, 因为 $\emptyset$ 和 $\emptyset_1$ 中没有不同元素, 所以有 $\emptyset = \emptyset_1$ 。

(四) 幂集

集合的元素可以是任何事物, 因此把一个集合看成一个元素也是允许的。

由集合 S 的一切子集为元素组成的集合, 叫 S 的幂集, 记为 $P(S)$ 。

任意一个集合 S , 它的幂集合总是存在的。

例如 $\{1\}$ 的幂集为 $\{\emptyset, \{1\}\}$

$$\{1, 2\} \text{ 的幂集为 } \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$$

$\{1,2,3\}$ 的幂集为 $\{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\},$
 $\{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$

一般来说,有 n 个元素的集合,它的所有子集数为:

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n} = 2^n (\text{个})$$

(本文刊于《中学数学拾趣》一书,贵州人民出版社,1990 年版,韩文法)

二、可数集

如上所述,无穷集是包含无穷多个元素的集合,但同样是无穷多个元素组成的集合,它们之间也有差别。

假设 A 、 B 为两个集合,它们的元素个数都是无穷多个,若在两个元素之间能建立起一一对应关系,那么这两个集合叫对等的(或者说两个集等价),记为 $A \sim B$ 。

自然数集合是我们比较熟悉的一种无穷集合,表示为:

$$N = \{1, 2, 3, \dots, n, \dots\}$$

凡能够和自然数集对等的集,都叫做可数集。

例如:

$$\{2, 4, 6, \dots, 2n, \dots\}$$

$$\{1, 3, 5, \dots, 2n-1, \dots\}$$

$$\{10, 10^2, 10^3, \dots, 10^n, \dots\}$$

$$\{\cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \dots, \cos nx, \sin nx, \dots\}$$

等都是可数集。

换一个说法,一个无穷集的元素,如果能用自然数编号,这个无穷集就叫可数集。

显然,空集是可数集,一切有限集都是可数集,无穷集可能是可数集,也有可能是不可数集。

可数集在集合论中占有重要地位,下面我们简要论证可数集

的一些性质:

1. 任何一个无穷集中,至少含有一个可数子集。

证明:

若 A 是无穷集,即 $A \neq \emptyset$,则 A 中至少有一个元素 $a_1 \in A$,即 $\{a_1\} \subset A$

这时, $A - \{a_1\}$ 仍为无穷集

因为 $A - \{a_1\} \neq \emptyset$,

所以至少有一个元素 $a_2 \in \{A - \{a_1\}\}$,

这时, $A - \{a_1, a_2\}$ 仍为无穷集,继续下去,一定有一个可数子集

$\{a_1, a_2, a_3, \dots\} \subset A$ 存在。

2. 可数集的任何无穷子集是可数的。

证明:

若 $A = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots\}$ 是可数集, B 是 A 的无穷子集在序列

$a_1, a_2, a_3, \dots$ 中,若 B 的第一个元素下标为 n_1 ,第二个元素下标为 $n_2, \dots$ 第 k 个元素下标为 n_k ,因为 B 是无穷的,所以这种下标不会终止,所以

$B = \{a_{n_1}, a_{n_2}, \dots, a_{n_k}, \dots\}$ 是可数集。

3. 一切整数所组成的集为可数集。

证明:

因为 $1, 2, 3, 4, \dots$

$0,$

$-1, -2, -3, -4, \dots$

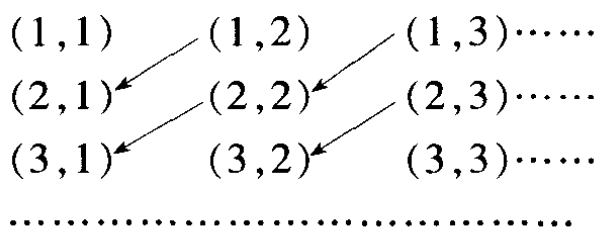
可以排成如下顺序:

$0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \dots$

显然这些整数组成的集合是可数集。

4. 一切自然数对所组成的集合是可数集。

证明：

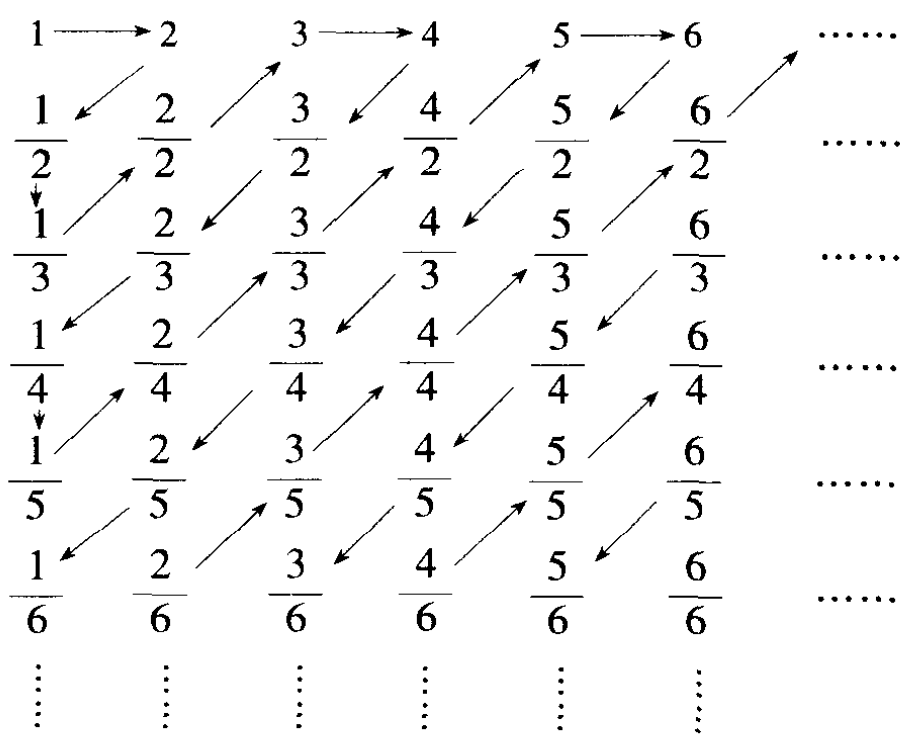


从(1,1)开始,按(1,2),(2,1),(1,3),(2,2)……即箭头所指的方向排列所有自然数对,即得一切自然数对所成的集为可数集。

5. 有理数集是可数集。

证明：

所有有理数可排成以下顺序：



由箭头所示方向的数中,除去重复的数外,得: $1, 2, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, 3,$

$$4, \frac{3}{2}, \dots$$

因此,有理数集为可数集。

6. 可数个可数集的并集为可数集。

证明:

若 $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ 为可数集,形式为:

$$A_1 = \{a_1^{(1)}, a_2^{(1)}, a_3^{(1)}, \dots, a_n^{(1)}, \dots\}$$

$$A_2 = \{a_1^{(2)}, a_2^{(2)}, a_3^{(2)}, \dots, a_n^{(2)}, \dots\}$$

.....

可以看出,其中每一个元素 $a_q^{(p)}$ ($p = 1, 2, 3, \dots, q = 1, 2, 3, \dots$), 对应 $p + q = h$, h 称为 $a_q^{(p)}$ 的高度,若由小到大按高度编排次序,当高度相等时,由小到大按 p 的次序排列,则有

$$a_1^{(1)}, a_2^{(1)}, a_1^{(2)}, a_3^{(1)}, a_2^{(2)}, a_1^{(3)}, \dots$$

因此, $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \dots, \cup A_n$ 是可数集。

这样看来,似乎一切无穷集都是可数集了,其实并非如此,下面举出一个反例。

若 A 为十进位小数的集合,十进位小数形式表示为:

$$0. a_1 a_2 a_3, \dots, a_k,$$

a_k 是 $0, 1, 2, \dots, 9$ 中的任何一个

若 A 是可数集,那么它的元素全体可写成: $x_1, x_2, x_3, \dots, x_k$, 而 x_k 的形式是:

$$0. a_{k1} a_{k2} a_{k3} \dots, a_{kn},$$

其中 a_{kn} 是 $0, 1, 2, \dots, 9$ 中的任何一个,现在定义一个小数为

$$0. b_1 b_2 \dots, b_k,$$

对任何一个 k ,

假如 a_{kk} 是 1, 取 b_k 为 2,

假如 a_{kk} 不是 1, 取 b_k 为 1。

可以看出 $0 \cdot b_1 b_2 b_3, \dots, b_k$ 绝不是任何一个 x_k ,

因为 $a_{k_k} \neq b_k$

由定义知道,

0. $b_1 b_2 b_3, \dots, b_k \in A$

上述矛盾,证明了 A 是不可数集。

总之,可数集是无穷集合中的一类,但却是重要的一类,掌握它的性质对于理解无穷集有着密切的关系。