新世纪高等院校精品教辅

高等数学习题课28讲

主编 苏德矿 吴明华 卢兴江

浙江大学出版社

新世纪高等院校精品教辅

高等数学习题课 28 讲

主　编　苏德矿　吴明华　卢兴江

浙江大學出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学习题课28讲 / 苏德矿,吴明华,卢兴江主编.
杭州:浙江大学出版社,2005.9
ISBN 7-308-04373-8

Ⅰ.高... Ⅱ.①苏... ②吴... ③卢... Ⅲ.高等数学-高等学校-解题 Ⅳ.013-44

中国版本图书馆CIP数据核字(2005)第084051号

内 容 提 要

本书内容表述确切、思路清晰、深入浅出、通俗易懂,并注意数学思维与数学方法的论述,通过典型错误的分析,加深对数学概念、定理的理解。虽然解数学问题没有什么万能的模式,但它们仍然有着某些规律、方法和技巧,通过我们所给解题方法的归纳,可以使读者抓住重点,较充分地理解数学内容,掌握解题的"钥匙",大大加快解题速度。它对学好高等数学,在有关考试中取得好成绩都有直接的帮助。本书可作为高等学校工科、理科(非数学类专业)本科生学习高等数学的参考书,也可作为经济、管理类有关专业本科生学习高等数学的参考书,同时适合考研学生在基础复习阶段使用。

出版发行 浙江大学出版社
(杭州浙大路38号 邮政编码310027)
(E-mail:zupress@mail.hz.zj.cn)
(网址:http://www.zjupress.com)
责任编辑 徐素君
排　　版 浙江大学出版社电脑排版中心
印　　刷 杭州杭新印务有限公司
开　　本 787mm×960mm 1/16
印　　张 20
字　　数 550千
版 印 次 2005年9月第1版 2006年2月第2次印刷
书　　号 ISBN 7-308-04373-8/O·328
定　　价 25.00元

前 言

高等数学是一门重要的大学公共基础课程，它的教学一般由教学内容的讲授和习题课教学组成。高等数学习题课是高等数学学习的一个重要环节，它在加深学生对数学概念的理解、逻辑推理能力的培养和计算技巧的训练等方面都起着重要的作用；起到了教与学、疏与熟、学与用的桥梁作用。随着科学技术的日益发展，大学期间开设的新课程越来越多，每门课程所给的课时却越来越少，但教学内容几乎没有减少，也不能再减少。高等数学课程也是如此，用作习题课的课时变得很少，有的教师甚至不上习题课。加之教师与学生接触的时间又较少，因而，学生在学习高等数学的过程中，会遇到许多困难，而且无人指导，影响了学生学习高等数学的兴趣和积极性，从而也直接影响了教学质量。

根据国家教育部高等学校工科数学课程教学指导委员会拟定的高等数学课程教学基本要求，参照中华人民共和国教育部制定的全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲，我们编写了这本《高等数学习题课 28 讲》。在内容上，我们力求表述确切、思路清晰、深入浅出、通俗易懂，并注意数学思维与数学方法的论述，通过典型错误的分析，加深对教学概念、定理的理解。虽然解数学问题没有什么万能的模式，但仍然有着某些规律、方法和技巧可循。通过我们所给解题方法的归纳，可以使读者抓住重点，较充分地理解教学内容，掌握解题的“钥匙”，大大加快解题速度。这对学好高等数学，在有关考试中取得好成绩都有直接的帮助。本书可作为高等学校工科、理科（非数学类专业）本科生学习高等数学的参考书，也可作为经济、管理类有关专业本科生学习高等数学的参考书，同时适合考研学生在基础复习阶段使用。

本书由苏德矿、吴明华、卢兴江主编。全书第五至九讲，第十七至二十二讲由浙江大学苏德矿编写，第十至十六讲由浙江大学城市学院吴明华编写，第一至四讲由浙江大学卢兴江编写，第二十三至二十八讲由浙江工商大学统计学院钱春编写。全书由苏德矿、吴明华、卢兴江统稿。

金蒙伟教授、李胜宏教授、尹永成教授对于本书的编写给予了热情的支持与帮助，并提出了许多宝贵的建议，我们已在编写本书时采纳，在此向他们表示衷心的感谢。

在本书整个编写过程中，自始至终得到了浙江大学出版社徐素君老师的热情支持与帮助，并提出了许多好的建议，使本书增色不少，在此表示衷心的感谢。

由于编者水平有限，本书难免会有欠妥和错误之处，衷心希望能得到专家、同行和读者的批评指正，使本书在实践中得以逐步完善。

作　者

于浙大求是园

2005年8月

目 录

第一讲 数列极限

内容与要求

1. 理解数列极限的定义,特别是 ϵ-N 语言的意义,并能用 ϵ-N 语言证明一些简单的数列极限.

2. 理解数列的收敛和发散概念.掌握收敛数列的性质(唯一性、保号性、夹逼性、有界性等),了解发散数列的常见类型(发散的各种情形).

3. 理解无穷大数列概念,知道与无界数列的联系和区别.

4. 掌握常用的求极限方法(利用夹逼性、单调有界准则等).

5. 理解子数列及其极限的概念.

6. 掌握数列与其子数列及其极限之间的相互关系.

*7. 了解稳定性数列(柯西数列)概念;柯西收敛准则和维尔斯特拉斯定理.

概念、定理的理解与典型错误分析

数列极限的定义 对 $\forall \epsilon > 0, \exists N > 0$,当 $n > N$ 时,有 $|u_n - A| < \epsilon$ 成立,则称常数 A 为数列$\{u_n\}$的极限,记为 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = A$.

在理解此定义时,请注意:(ⅰ)ϵ 的任意性;(ⅱ)N 一般随 ϵ 而变化,且一旦找到满足要求的 N,则比 N 大的整数都满足要求,即 N 不唯一;(ⅲ)此定义从另一方面说即为:若数列以 A 为极限,则对任意的 $\epsilon > 0$,数列落在区间$(A-\epsilon, A+\epsilon)$外的项数只有有限项.

数列极限的性质

(ⅰ)**唯一性** 若$\{u_n\}$有极限,则极限值唯一;

(ⅱ)**有界性** 若$\{u_n\}$收敛(有极限),则$\{u_n\}$有界;

(ⅲ)**保号性** 若$\{u_n\}$的极限为 $A > 0$,则 $\exists N > 0, \eta > 0$,当 $n > N$ 时,$u_n > \eta > 0$;(对 $A < 0$ 也有相应的性质);

(ⅳ)**夹逼性** 若$\{u_n\}$,$\{v_n\}$,$\{w_n\}$满足 $v_n \leqslant u_n \leqslant w_n, n = 1,2,\cdots$,且 $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = \lim\limits_{n\to\infty} w_n = A$,则 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = A$.

单调有界准则 单调有界数列必有极限.

此准则可分为两方面描述,一是单调增加有上界的数列必有极限,二是单调减少有下界的数列必有极限.此准则常常用来证明数列极限的存在性.

柯西收敛准则　数列$\{u_n\}$收敛的充分必要条件是对$\forall \varepsilon > 0, \exists N > 0$,当$m,n > N$时,有$|u_n - u_m| < \varepsilon$.

理解此准则时要注意m,n为大于N的任意整数.

无界数列　对$\{u_n\}$,若对$\forall G > 0, \exists n_0$,使得$|u_{n_0}| > G$,则称$\{u_n\}$为无界数列.

无穷大数列　对$\{u_n\}$,若对$\forall G > 0, \exists N > 0$,当$n > N$时,$|u_n| > G$,则称当$n \to \infty$时,$\{u_n\}$是无穷大(无穷大数列).

维尔斯特拉斯定理　有界数列必有收敛的子数列.

1. 用定义(ε-N语言)

证明数列时,从$|u_n - A| < \varepsilon$中去求N时可进行不等式放大以简化计算.

例1　用定义证明数列$\left\{\dfrac{2n^2+1}{n^2-2n}\right\}$当$n \to \infty$时极限为2.

证　要使得$\left|\dfrac{2n^2+1}{n^2-2n} - 2\right| < \varepsilon$成立,因为

$$\left|\frac{2n^2+1}{n^2-2n} - 2\right| = \left|\frac{4n+1}{n^2-2n}\right| < \frac{5n}{n^2 - \frac{n^2}{2}} = \frac{10}{n}(\text{当 } n > 4 \text{ 时}).$$

所以只要$\dfrac{10}{n} < \varepsilon$即可,也就是$n > \dfrac{10}{\varepsilon}$,记$N_0 = \left[\dfrac{10}{\varepsilon}\right]$,因此

可取$N = \max[4, N_0]$,对$\forall \varepsilon > 0$,当$n > N$时,$\left|\dfrac{2n^2+1}{n^2-2n} - 2\right| < \varepsilon$成立.

错误　因为$\left|\dfrac{2n^2+1}{n^2-2n} - 2\right| = \left|\dfrac{4n+1}{n^2-2n}\right| > \dfrac{4n}{n^2} = \dfrac{4}{n}$,所以

由$\dfrac{4}{n} < \varepsilon$得$n > \dfrac{4}{\varepsilon}$,取$N = \left[\dfrac{4}{\varepsilon}\right]$作为定义中的$N$(因为$\dfrac{4}{n} < \varepsilon$不能推出$\left|\dfrac{2n^2+1}{n^2-2n} - 2\right| < \varepsilon$).

2. 不可把数列的无界与无穷大相混淆

无穷大数列必为无界数列.但反之不然.

例2　设数列$\{u_n\}$无上界,$u_n \neq 0, n = 1,2,3,\cdots$,判别以下结论是否正确:

(1) 数列$\left\{\dfrac{1}{u_n}\right\}$必有上界;

(2) 对任意正数M,总存在整数n,使得$u_n > M$;

(3) 对任意正数M,满足$u_n < M$的n只有有限个;

(4) 存在某正数M和正整数N,当$n > N$时,$u_n > M$.

解　(1) 错误.例如数列:$1, \dfrac{1}{2}, 3, \dfrac{1}{4}, 5, \cdots, n^{(-1)^{n-1}}, \cdots$

(2) 正确.这恰是数列无上界的定义.

(3) 错误.例如(Ⅰ)中取$M = 1$数列$u_n < M$就有无限个.

(4)错误.例如(Ⅰ)中的数列就是反例.因为不管M,N取多少,当$n > N$时,总可找到$n_0 = 2k+1 > N$,使$u_{2k+1} = \dfrac{1}{2k+1} < M$.

3. 极限运算中的常见错误

(A) 无限个项不能进行极限的四则运算

例 3 求$\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\cdots+\frac{n}{n^2})$.

解 $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1}{n^2}+\cdots+\frac{n}{n^2})=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+2+\cdots+n}{n^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{n(n+1)}{2}}{n^2}=\frac{1}{2}$.

而不能 $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1}{n^2}+\cdots+\frac{n}{n^2})=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}+\cdots+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n^2}=0+\cdots+0=0$.

例 4 求$\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n$.

解 由单调有界准则可得$\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n=\mathrm{e}$，而不能$\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n=\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})\cdot\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})\cdots\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})=1\times1\times\cdots\times1=1$.

(B) 不能随意将一部分极限先求出来

例如求极限$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n^2}}{\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}-1-\frac{1}{n}}$不能将$\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}-1\to0(n\to\infty)$先求出来，从而得到原极限为0，后面我们易知此极限为2.

4. 对用递推式给出的数列求极限，必须先证其极限存在（常用单调有界准则），再递推式两边求极限得其极限

例 5 设$u_1=10,u_{n+1}=\sqrt{u_n+6}(n=1,2,\cdots)$，试证数列$\{u_n\}$极限存在并求此极限.

解 因为$u_{n+1}-3=\sqrt{u_n+6}-3=\frac{u_n+6-9}{\sqrt{6+u_n}+3}=\frac{u_n-3}{\sqrt{u_n+6}+3}$，

所以由$u_1=10>3$，知$u_n>3(n=1,2,\cdots)$，即$\{u_n\}$有下界.

再考察$u_{n+1}-u_n=\sqrt{u_n+6}-u_n=\frac{-(u_n+2)(u_2-3)}{\sqrt{u_n+6}+u_n}<0$，

所以，$\{u_n\}$单调减少，由单调有界准则得$\{u_n\}$极限存在，设$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=A$，在$u_{n+1}=\sqrt{u_n+6}$，即$u_{n+1}^2=u_n+6$两边取极限得：$A^2=A+6$，解得：$A=3$（由保号性，另一解$A=-2$舍去）.

错误 在$u_{n+1}=\sqrt{u_n+6}$两边取极限解得极限等于3，即得出原数列极限存在等于3. 因为若极限不存在是不能运算的. 例如：设$u_1=2,u_{n+1}=u_n^2(n=1,2,\cdots)$

若两边取极限（$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=A$）得：$A=A^2$，所以$A=0$或1，而事实上显然有$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=+\infty$. 所以，以上运算只能得出："若此数列极限存在，则其极限为3."

5. 数列与子数列的关系中，条件的充分性、必要性不能混淆不清

(A) 有界数列必有收敛的子数列（维尔斯特拉斯定理），但不能推出无界数列没有收敛的子数列.

例如数列$[(1+(-1)^n)n]$为无界数列，显然有收敛的子数列$\{0\}$.

(B) 无穷大数列的所有子数列为无穷大数列. 然而，有无穷大子数列的数列不一定是无穷大数列，但必是无界数列. 这就是无界数列与无穷大数列的区别所在.

例如数列$\{3^{(-1)^n\cdot n}\}$是无界数列，但非无穷大数列.

同样，在数列问题中也要注意"有界数列"与"收敛数列"、"无界数列"与"无穷大数列"的关系与区

别.

*6. **用柯西收敛准则证明数列 $\{u_n\}$ 收敛时，对 $\forall\varepsilon>0,\exists N>0$，当 m、$n>N$ 时恒有 $|u_m-u_n|<\varepsilon$ 成立，要注意其中 m、n 的任意性**

例如证明数列 $\left\{\dfrac{\sin x-\sin 2x}{1}+\dfrac{\sin 2x-\sin 3x}{2}+\cdots+\dfrac{\sin nx-\sin(n+1)x}{n}\right\}$ 收敛.

错误 取 $m=n+1$，要使(设数列为 $\{u_n\}$) $|u_m-u_n|=\left|\dfrac{\sin(n+1)x-\sin(n+2)x}{n+1}\right|\leqslant\dfrac{2}{n+1}<\varepsilon$ 成立，只要 $n>\dfrac{2}{\varepsilon}-1$，取 $N=\max\left\{0,\left[\dfrac{2}{\varepsilon}-1\right]\right\}$ 即可.

以上证法就错在"取 $m=n+1$"上，因为 m,n 应是任意的大于 N 的整数.

证 设 $m=n+k$，其中 k 为任意自然数，所以有

$$\begin{aligned}|u_m-u_n|&=\left|\frac{\sin(n+1)x-\sin(n+2)x}{n+1}+\frac{\sin(n+2)x-\sin(n+3)x}{n+2}\right.\\&\quad\left.+\cdots+\frac{\sin(n+k)x-\sin(n+k+1)x}{n+k}\right|\\&=\left|\frac{\sin(n+1)x}{n+1}+\left(\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+1}\right)\sin(n+2)x\right.\\&\quad\left.+\cdots+\left(\frac{1}{n+k}-\frac{1}{n+k-1}\right)\sin(n+k)x-\frac{\sin(n+k+1)x}{n+k}\right|\\&\leqslant\frac{1}{n+1}+\left|\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+1}\right|+\cdots+\left|\frac{1}{n+k}-\frac{1}{n+k-1}\right|+\frac{1}{n+k}\\&=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}\\&\quad+\cdots+\frac{1}{n+k-1}-\frac{1}{n+k}+\frac{1}{n+k}=\frac{2}{n+1}.\end{aligned}$$

因此，只要 $\dfrac{2}{n+1}<\varepsilon$，即 $n>\dfrac{2}{\varepsilon}-1$，就有 $|u_{n+k}-u_n|<\varepsilon$，现取 $N=\max\left\{0,\left[\dfrac{2}{\varepsilon}-1\right]\right\}$，则得对 $\forall\varepsilon>0$，当 $m,n>N$ 时，都有 $|u_{n+k}-u_n|<\varepsilon$ 成立，根据柯西收敛准则，该数列收敛.

解题方法与题例

例 1 用定义证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^2+a^2}}{n}=1$.

证 对 $\forall\varepsilon>0$，要使 $\left|\dfrac{\sqrt{n^2+a^2}}{n}-1\right|<\varepsilon$ 成立，因为

$$\left|\frac{\sqrt{n^2+a^2}}{n}-1\right|=\left|\frac{(\sqrt{n^2+a^2})^2-n^2}{n(\sqrt{n^2+a^2}+n)}\right|=\frac{a^2}{n(\sqrt{n^2+a^2}+n)}<\frac{a^2}{n(n+n)},$$

所以，只要 $\dfrac{a^2}{2n^2}<\varepsilon$，即 $n>\dfrac{a}{\sqrt{2\varepsilon}}$ 即可.

取 $N=\left[\dfrac{a}{\sqrt{2\varepsilon}}\right]$，有：对 $\forall\varepsilon>0$，当 $n>N$ 时，$\left|\dfrac{\sqrt{n^2+a^2}}{n}-1\right|<\varepsilon$，因此，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+a^2}}{n}=1.$$

例 2 设数列$\{u_n\}$与$\{v_n\}$满足$\lim\limits_{n\to\infty}u_nv_n=a$,则下列结论正确的是(　　)

(A) 若$\{u_n\}$发散,则$\{v_n\}$必发散

(B) 若$\{u_n\}$无界,则$\{v_n\}$必有界

(C) 若$\{u_n\}$有界,则$\lim\limits_{n\to\infty}v_n=0$

(D) 若$u_n\neq 0,n=1,2,3,\cdots$,且$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{u_n}=a$,则$\lim\limits_{n\to\infty}v_n=0$

解 应选 D. 设$x_n=u_nv_n$,则$v_n=\dfrac{1}{u_n}\cdot x_n$,所以,

$$\lim_{n\to\infty}v_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{u_n}\cdot\lim_{n\to\infty}x_n=a\cdot 0=0.$$

A 错. 例如:$u_n=n,v_n=\dfrac{1}{n^2}$有 $\lim\limits_{n\to\infty}u_nv_n=0$且$\{u_n\}$发散,但$\{v_n\}$收敛(极限为 0).

B 错. 例如:$u_n=\dfrac{1+(-1)^n}{2}n,v_n=\dfrac{1+(-1)^{n-1}}{2}n$,有 $\lim\limits_{n\to\infty}u_nv_n=0$,且$\{u_n\}$无界,但$\{v_n\}$也无界.

C 错. 例如:$u_n=\dfrac{1+(-1)^n}{2},v_n=\dfrac{1+(-1)^{n-1}}{2}n$,有 $\lim\limits_{n\to\infty}u_nv_n=0$,且$\{u_n\}$有界,但$\lim\limits_{n\to\infty}v_n$不存在.

例 3 用定义证明$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{m^n}{n!}=0$(其中 m 为正整数).

证 要找正整数 N,使对 $\forall\varepsilon>0$,当 $n>N$ 时,$\left|\dfrac{m^n}{n!}-0\right|<\varepsilon$成立.

因为$\left|\dfrac{m^n}{n!}-0\right|=\dfrac{m\cdot m\cdots m}{1\cdot 2\cdot 3\cdots m(m+1)\cdots n}$(设 $n>m$),记$k=\dfrac{m^m}{m!}$,有

$\dfrac{m^m}{n!}=k\cdot\dfrac{m^{n-m}}{(m+1)(m+2)\cdots n}<k(\dfrac{m}{m+1})^{n-m}$,所以,只要$k\cdot(\dfrac{m}{m+1})^{n-m}<\varepsilon$就有$\left|\dfrac{m^n}{n!}-0\right|<\varepsilon$成立,也就是只要$(n-m)\lg\dfrac{m}{m+1}<\lg\dfrac{\varepsilon}{k}$,即$n>\dfrac{\lg\frac{\varepsilon}{k}}{\lg\frac{m}{m+1}}+m$,令$N_0=\left[\dfrac{\lg\frac{\varepsilon}{k}}{\lg\frac{m}{m+1}}+m\right]$,取$N=\max(N_0,m)$就得:对$\forall\varepsilon>0$,当 $n>N$ 时,$\left|\dfrac{m^n}{n!}-0\right|<\varepsilon$,因此,$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{m^n}{n!}=0$.

例 4 求$\lim\limits_{n\to\infty}(1+a)(1+a^2)(1+a^4)\cdots(1+a^{2^n}),(|a|<1)$.

解
$$\lim_{n\to\infty}(1+a)(1+a^2)\cdots(1+a^{2^n})=\frac{1}{1-a}\lim_{n\to\infty}(1-a)(1+a)\cdots(1+a^{2^n})$$
$$=\frac{1}{1-a}\lim_{n\to\infty}(1-a^{2^{n+1}})=\frac{1}{1-a}.$$

(因为$|a|<1$,所以$\lim\limits_{n\to\infty}a^{2^{n+1}}=0$)

例 5 设$a_1=2,a_{n+1}=\dfrac{1}{2}(a_n+\dfrac{1}{a_n}),(n=1,2,\cdots)$,证明:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$存在并求之;

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}S_n$存在,其中$S_n=\sum\limits_{i=1}^{n}\left[\dfrac{a_i}{a_{i+1}}-1\right]$.

解 (1)$a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + \frac{1}{a_n}) \geqslant \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{a_n \cdot \frac{1}{a_n}} = 1(a_n > 0)$,

所以 $a_n \geqslant 1(n = 1,2,\cdots)$ 有下界 1;又因为

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{2a_n} - \frac{a_n}{2} = \frac{1 - a_n^2}{2a_n} \leqslant 0,$$

所以,$\{a_n\}$ 单调减少,由单调有界准则知 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ 存在,设为 A,将 $a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + \frac{1}{a_n})$ 两边取极限得:$A = \frac{1}{2}(A + \frac{1}{A})$.解得:$A = 1$,或 $A = -1$(由保号性,$A = -1$ 舍去)因此,$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$.

(2) 因为 $a_n \geqslant a_{n+1} > 0$,所以$\frac{a_i}{a_{i+1}} - 1 \geqslant 0(i = 1,2,\cdots)$,因此 $\{S_n\}$ 单调增加.下面分析有界性:因为 $a_n \geqslant 1(n = 1,2,\cdots)$,有

$S_n = \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{a_i - a_{i+1}}{a_{i+1}} \leqslant \sum\limits_{i=1}^{n} [a_i - a_{i+1}] = a_1 - a_n < a_1 = 2$,所以 $\{S_n\}$ 有上界 2,由单调有界准则知 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ 存在.

例 6 设 $u_1 \geqslant -12, u_{n+1} = \sqrt{12 + u_n}(n = 1,2,\cdots)$,证明 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$ 存在并求之.

解 由关系式可知 $u_n \geqslant 0(n = 2,3,\cdots)$,先分析单调性:

$$u_{n+1} - u_n = \sqrt{12 + u_n} - \sqrt{12 - u_{n-1}} = \frac{u_n - u_{n-1}}{\sqrt{12 + u_n} + \sqrt{12 + u_{n-1}}},$$

因此有

(1) 若 $u_2 > u_1$,则由数学归纳法知,$\{u_n\}$ 单调增加;

(2) 若 $u_2 < u_1$,则由数学归纳法知,$\{u_n\}$ 单调减少;

(3) 若 $u_2 = u_1$,则 $\{u_n\}$ 为一常数列.

以下考察有界性:$u_{n+1} - 4 = \sqrt{12 + u_n} - 4 = \frac{12 + u_n - 16}{\sqrt{12 + u_n} + 4} = \frac{u_n - 4}{\sqrt{12 + u_n} + 4}$,

因此有

(1) 若 $u_1 < 4$,则由数学归纳法知 $u_n < 4(n = 1,2,\cdots)$,即为数列 $\{u_n\}$ 有上界 4,且当 $u_1 < 4$ 时,$u_2 - u_1 = \sqrt{12 + u_1} - u_1 = \frac{12 + u_1 - u_1^2}{\sqrt{12 + u_1} + u_1} = \frac{-(u_1 - 4)(u_1 + 3)}{\sqrt{12 + u_1} + u_1}$,所以,$u_2 > u_1$,由前面单调性分析知 $\{u_n\}$ 单调增加,因此由单调有界准则知 $\{u_n\}$ 有极限.

(2) 若 $u_1 > 4$,则由数学归纳法知 $u_n > 4(n = 1,2,\cdots)$,即数列 $\{u_n\}$ 有下界 4,同理可知当 $u_1 > 4$ 时,$u_2 < u_1$,$\{u_n\}$ 单调减少,所以,$\{u_n\}$ 极限也存在.

(3) 若 $u_1 = 4$,则 $u_n = 4(n = 1,2,\cdots)$,所以 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 4$.总之,$\{u_n\}$ 极限存在,设为 A,在 $u_{n+1} = \sqrt{12 + u_n}$ 两边取极限得:$A^2 = 12 + A$,解得 $A = 4$(另一解 $A = -3$ 由保号性舍去),所以,$\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 4$(其实,前面分析有界性时分析"$u_{n+1} - 4$",其中的"4"就是假设它极限存在求出来的.这也是一种常见的分析方法).

例 7 证明 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

证 因当 $n>1$ 时，$\sqrt[n]{n}>1$，设 $\sqrt[n]{n}=1+a(a>0)$，所以，

$$\sqrt[n]{n}-1=a \text{ 且 } n=(1+a)^n=1+na+\frac{n(n-1)}{2}a^2+\cdots+a^n,$$

有 $n>\frac{n(n-1)}{2}a^2$，得 $a^2<\frac{2}{n-1}$，$a<\sqrt{\frac{2}{n-1}}$. 因此，对 $\forall\varepsilon>0$，要使 $\left|\sqrt[n]{n}-1\right|<\varepsilon$ 成立. 只要 $\left|\sqrt[n]{n}-1\right|=a<\sqrt{\frac{2}{n-1}}<\varepsilon$ 即可，也就是只要 $n>1+\frac{2}{\varepsilon^2}$，取 $N=\left[1+\frac{2}{\varepsilon^2}\right]\geqslant 1$，因此有对 $\forall\varepsilon>0$，当 $n>N$ 时，有 $\left|\sqrt[n]{n}-1\right|<\varepsilon$ 成立，因此，$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$.

例 8 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}(1+\sqrt[n]{2}+\sqrt[n]{3}+\cdots+\sqrt[n]{n})$.

解 因为 $\frac{1}{n}(1+1+\cdots+1)<\frac{1}{n}(1+\sqrt[n]{2}+\sqrt[n]{3}+\cdots+\sqrt[n]{n})<\frac{1}{n}(\sqrt[n]{n}+\sqrt[n]{n}+\cdots+\sqrt[n]{n})$，即 $1<\frac{1}{n}(1+\sqrt[n]{2}+\sqrt[n]{3}+\cdots+\sqrt[n]{n})<\sqrt[n]{n}$，而 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$，由夹逼性知

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}(1+\sqrt[n]{2}+\cdots+\sqrt[n]{n})=1.$$

例 9 设数列 $\{u_n\}$，$u_n>0(n=1,2,\cdots)$ 满足 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=q$，其中 $0\leqslant q<1$，试证 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$.

证 因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=q$，且 $0\leqslant q<1$，由极限定义知，对 $\varepsilon=\frac{1-q}{2}>0$，$\exists N>0$，当 $n>N$ 时，有 $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}-q\right|<\frac{1-q}{2}$ 成立，又因为 $u_n>0(n=1,2,\cdots)$，所以，当 $n>N$ 时，$0<\frac{u_{n+1}}{u_n}<q+\frac{1-q}{2}=\frac{1+q}{2}$. 设 $p=\frac{1+q}{2}$，$p<1$，且有 $u_{N+2}<pu_{N+1}$，$u_{N+3}<pu_{N+2}$，$\cdots$，$u_{N+k}<pu_{N+k-1}$，$\cdots$，因此有当 $n>N$ 时，$0<u_n<pu_{n-1}<p^2u_{n-2}<\cdots<p^{n-N-1}u_{N+1}$.

注意到 u_{N+1} 为常数，$0<p<1$，有 $\lim\limits_{n\to\infty}p^{n-N-1}=0$，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}p^{n-N-1}u_{N+1}=0$，由夹逼性得

$$\lim_{n\to\infty}u_n=0.$$

例 10 设 $a\geqslant 0$，试证 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+a^n+\left(\frac{a^2}{2}\right)^n}$ 存在并求其值.

解 (1) 当 $0\leqslant a\leqslant 1$ 时，有 $1\leqslant\sqrt[n]{1+a^n+\left(\frac{a^2}{2}\right)^n}\leqslant\sqrt[n]{1+1+1}=\sqrt[n]{3}$，因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{3}=1$，由夹逼定理知，$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+a^n+\left(\frac{a^2}{2}\right)^n}=1$.

(2) 当 $1<a\leqslant 2$ 时，有

$a=\sqrt[n]{a^n}<\sqrt[n]{1+a^n+\left(\frac{a^2}{2}\right)^n}<\sqrt[n]{a^n+a^n+\left(\frac{2\cdot a}{2}\right)^n}=\sqrt[n]{3}a$，因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{3}a=a$，由夹逼性知

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+a^n+\left(\frac{a^2}{2}\right)^n}=a.$$

(3) 当 $a>2$ 时，有：$\frac{a^2}{2}>\frac{2\cdot a}{2}=a>2$，因此

$$\frac{a^2}{2}=\sqrt[n]{\left(\frac{a^2}{2}\right)^n}<\sqrt[n]{1+a^n+\left(\frac{a^2}{2}\right)^n}<\sqrt[n]{\left(\frac{a^2}{2}\right)^n+\left(\frac{a^2}{2}\right)^n+\left(\frac{a^2}{2}\right)^n}=\sqrt[n]{3}\cdot\frac{a^2}{2}.$$

因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{3}\cdot\frac{a^2}{2}=\frac{a^2}{2}$,由夹逼性知 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+a^n+(\frac{a^2}{2})^n}=\frac{a^2}{2}$.

例 11　证明数列 $\{n^{(-1)^n}\}$ 无界但非无穷大数列.

证　证明数列无界的常用方法是找出一个无穷大子数列;证明一个数列不是无穷大数列的常用方法是找出一个收敛的子数列.

对数列 $\{n^{(-1)^n}\}$,记 $u_n=n^{(-1)^n}(n=1,2,\cdots)$,则 $u_{2k}=2k(k=1,2,3,\cdots)$,此子数列显然为无穷大数列,所以原数列无界.

又因为 $u_{2k+1}=\frac{1}{2k+1}(k=0,1,2,\cdots)$,此子数列极限为零,为收敛数列,因此,原数列不是一个无穷大数列.

例 12　讨论数列 $\left\{\sin\frac{n\pi}{3}\right\}$ 和 $\left\{n\cos\frac{n\pi}{2}\right\}$ 的收敛性.

解　证明一个数列发散的方法通常有:一是找出两个子数列有不同的极限,另一个是找出一个子数列发散.

记 $u_n=\sin\frac{n\pi}{3}(n=1,2,\cdots)$,则 $u_{3k}=\sin k\pi=0(k=1,2,\cdots)$,此子数列极限为 0;

又因为 $u_{6k+1}=\sin\frac{(6k+1)\pi}{3}=\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2},(k=1,2,\cdots)$,此子数列极限为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

所以,原数列发散.

记 $v_n=n\cos\frac{n\pi}{2}(n=1,2,\cdots)$,因为 $v_{4k}=4k\cdot\cos\frac{4k\pi}{2}=4k(k=1,2,\cdots)$,此子数列显然为无穷大数列,发散,所以原数列发散.

例 13　设数列 $\{u_n\}$ 的两个子数列为 u_{m_k} 和 u_{l_k},且 $\{m_k\}\cup\{l_k\}=\mathbf{N}$(自然数集),若 $\lim\limits_{k\to\infty}u_{m_k}=\lim\limits_{k\to\infty}l_k=a$,则 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=a$.

证　对 $\forall\varepsilon>0,\exists K_1>0$,当 $k>K_1$ 时,$\left|u_{m_k}-a\right|<\varepsilon$.

对 $\forall\varepsilon>0,\exists K_2>0$,当 $k>K_2$ 时,$\left|u_{l_k}-a\right|<\varepsilon$.

取 $N=\max\{K_1,K_2\}$,则当 $n>N$ 时若 $n\in\{m_k\}$,则 $n>m_{K_1}$,否则必有 $n\in\{l_k\}$,则 $n>l_{K_2}$,总之都有 $\left|u_n-a\right|<\varepsilon$ 成立.所以,$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=a$.

特别地,当 $m_k=2k,l_k=2k-1(k=1,2,3\cdots)$ 时,有以下常用的结论:对数列 $\{u_n\}$,若有 $\lim\limits_{k\to\infty}u_{2k}=\lim\limits_{k\to\infty}u_{2k-1}=a$,则必有 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=a$.

例 14　已知 $u_1>0,u_{n+1}=3+\frac{4}{u_n}(n=1,2,3\cdots)$,证明数列 $\{u_n\}$ 极限存在并求之.

证　**方法一**　由 $u_{n+1}=3+\frac{4}{u_n},u_1>0$ 知 $u_n>0,(n=1,2,\cdots)$.如果 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n$ 存在,设为 A,则将上式两边取极限得 $A=3+\frac{4}{A}$,有 $A=4$ 或 $A=-1$(由保号性,舍去).

以下证明 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n$ 存在:

$u_{n+1}-4=\frac{4-u_n}{u_n}$,所以 $\{u_n\}$ 并不单调,例如若 $u_1>4$,则有 $0<u_2<4,u_3>4,0<u_4<4,\cdots$,

因此不能直接用单调有界准则来证明极限存在.

又因为 $u_{n+1}-4=\dfrac{4-(3+\dfrac{4}{u_{n-1}})}{3+\dfrac{4}{u_{n-1}}}=\dfrac{u_{n-1}-4}{3u_{n-1}+4}$,现考察子数列 $\{u_{2n+1}\}$ 的单调性有

若 $u_1>4$,则 $u_3>4,\cdots,u_{2n+1}>4,\cdots$,得 $\{u_{2n+1}\}$ 有下界;

若 $u_1<4$,则 $0<u_3<4,\cdots,0<u_{2n+1}<4,\cdots$,得 $\{u_{2n+1}\}$ 有上界.

再看 $u_{n+1}-u_{n-1}=\dfrac{-3(u_{n-1}-4)(u_{n-1}+1)}{3u_{n-1}+4}$,得

若 $u_1>4$,则 $\{u_{2n+1}\}$ 单调下降,由前知且有下界 4;

若 $u_1<4$,则 $\{u_{2n+1}\}$ 单调上升,由前知且有上界 4.

由单调有界准则,此两种情况 $\{u_{2n+1}\}$ 皆极限存在为4.又因为 $u_{2n}=3+\dfrac{4}{u_{2n+1}}$,所以,$\{u_{2n+1}\}$ 的极限亦存在为 4.

若 $u_1=4$,则 $u_n=4(n=1,2,\cdots)$,显然极限为 4.

总之,由 $\lim\limits_{n\to\infty}u_{2n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}u_{2n}=4$ 知 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n$ 存在且为 4.

方法二 因为 $u_{n+1}=3+\dfrac{4}{u_n}>3$,所以 $u_n>3(n=2,3,\cdots)$,

$$0<\left|u_{n+1}-4\right|=\frac{\left|4-u_n\right|}{u_n}<\frac{1}{3}\left|u_n-4\right|<\frac{1}{3^2}\left|u_{n-1}-4\right|<\cdots<\frac{1}{3^n}\left|u_1-4\right|.$$

因为 $\left|u_1-4\right|$ 为一常数,所以,$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{3^n}\left|u_{n-1}-4\right|=0$ 由夹逼性知,$\lim\limits_{n\to\infty}\left|u_{n+1}-4\right|=0$,即有 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=4$.

例 15 证明数列 $\left\{1+\dfrac{1}{2^\alpha}+\dfrac{1}{3^\alpha}+\cdots+\dfrac{1}{n^\alpha}\right\}(\alpha>1)$ 收敛.

证 显然此数列为单调增加的数列,现证明其有上界;设

$$u_n=1+\frac{1}{2^\alpha}+\frac{1}{3^\alpha}+\cdots+\frac{1}{n^\alpha},$$

$$u_3=1+\frac{1}{2^\alpha}+\frac{1}{3^\alpha}<1+\frac{2}{2^\alpha}=1+\frac{1}{2^{\alpha-1}},$$

$$u_7=u_3+\frac{1}{4^\alpha}+\frac{1}{5^\alpha}+\frac{1}{6^\alpha}+\frac{1}{7^\alpha}<1+\frac{1}{2^{\alpha-1}}+\frac{4}{4^\alpha}=1+\frac{1}{2^{\alpha-1}}+\frac{1}{4^{\alpha-1}}$$

$$=1+\frac{1}{2^{\alpha-1}}+(\frac{1}{2^{\alpha-1}})^2,$$

$$u_{15}=u_7+\frac{1}{8^\alpha}+\frac{1}{9^\alpha}+\cdots+\frac{1}{15^\alpha}\cdots<u_7+\frac{8}{8^\alpha}<1+\frac{1}{2^{\alpha-1}}+(\frac{1}{2^{\alpha-1}})^2+(\frac{1}{2^{\alpha-1}})^8.$$

用数学归纳法可以证明,对 $k\in\mathbf{N}$,有

$$u_{2^k-1}<1+(\frac{1}{2^{\alpha-1}})^2+\cdots+(\frac{1}{2^{\alpha-1}})^{k-1}.$$

因为$\dfrac{1}{2^{\alpha-1}}<1$,所以由上式可得

$$u_{2^k-1}<\frac{1-(\frac{1}{2^{k-1}})^k}{1-\frac{1}{2^{\alpha-1}}}<\frac{1}{1-\frac{1}{2^{\alpha-1}}}.$$

即$\{u_n\}$的一个子数列有上界，又因为$\{u_n\}$是单调增加数列，所以，$\{u_n\}$必有上界，由单调有界准则知原数列收敛.

*例 16　用柯西收敛准则证明数列$\left\{1+\frac{1}{2^\alpha}+\cdots+\frac{1}{n^\alpha}\right\}(\alpha\leqslant 1)$发散.

证　设$u_n=1+\frac{1}{2^\alpha}+\frac{1}{3^\alpha}+\cdots+\frac{1}{n^\alpha}$，则对任意的自然数$p$，有

$$u_{n+p}-u_n=\frac{1}{(n+1)^\alpha}+\frac{1}{(n+2)^\alpha}+\cdots+\frac{1}{(n+p)^\alpha}$$
$$\geqslant\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}\cdots+\frac{1}{n+p}\geqslant\frac{p}{n+p}.$$

由此可知，对$n\in\mathbf{N}$，总有$u_{2n}-u_n\geqslant\frac{n}{n+n}=\frac{1}{2}$，所以，由柯西收敛准则，此数列发散.

思考与练习题

（一）思考题

1. 怎样用“$\varepsilon-N$”语言来陈述数列$\{u_n\}$的$\lim\limits_{n\to\infty}u_n\neq A$?

2. 两个无穷大数列$\{u_n\}$，$\{v_n\}$，它们相加$\{u_n+v_n\}$、相乘$\{u_nv_n\}$的数列极限情况如何？

3. 命题“数列$\{u_n\}$为无界数列的充分必要条件是存在无穷大子数列”，是否正确？

4. 命题“数列$\{u_n\}$不是无穷大数列的充分必要条件是存在收敛的子数列”是否正确？

（二）练习题

1. 用定义证明下列极限：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+n}}=1$;

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{2n+\sqrt{n}}-\sqrt{n}}{n+1}=0$.

2. 设$\lim\limits_{n\to\infty}u_n$存在，$\lim\limits_{n\to\infty}v_n$不存在，则下列结论是否正确，若正确，请证明；若不正确，请举反例：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}v_n^2$必不存在；

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}u_nv_n$必不存在；

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}(u_n+v_n)$必不存在；

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}$必不存在.

3. 求下列极限：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}(1-\frac{1}{2^2})(1-\frac{1}{3^2})\cdots(1-\frac{1}{n^2})$;

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2^2}\cdots\cos\frac{x}{2^n}$;

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}(1+2^n+3^n)^{\frac{1}{n}}$;

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{n+k}{n^2+k}$;