微积分学习指导

WEIJIFENXUEXIZHIDAO

尹水仿 方 瑛 主编

科学出版社
www.sciencep.com

微积分学习指导

尹水仿　方瑛　主编

科学出版社

北京

内 容 简 介

本书根据教育部关于经管类微积分课程的教学基本要求和经管类学生考研对该课程的要求编写. 内容包括: 一元函数微分学及其在经济中的应用, 一元函数积分学及其应用, 微分方程与差分方程, 无穷级数, 多元函数微积分学.

本书各章内容包括基本要求、内容提要、疑难解答、典型例题、考题讲析及自测题, 并附有模拟试题, 最后还给出了自测题及模拟试题的参考答案与提示.

本书各章内容充实,选题灵活,覆盖面广,且具有鲜明的应用特点. 本书既可作为高等院校经管类各专业微积分课程的学习指导书, 也可供其他相关专业读者使用, 对报考硕士研究生的学生及也具有一定参考价值.

图书在版编目(CIP)数据

微积分学习指导/尹水仿,方瑛主编. - 北京: 科学出版社,2005

ISBN 7-03-016221-8

Ⅰ.微… Ⅱ.①尹…②方… Ⅲ.微积分 - 高等学校 - 教学参考资料 Ⅳ.O172

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 100858 号

责任编辑: 王雨舸

责任印制: 高 嵘 / 封面设计: 曹 刚

科学出版社 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码 100717

http://www.sciencep.com

武汉铁路印刷厂印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2005 年 8 月第 一 版 开本: 787×1092 1/16

2005 年 8 月第一次印刷 印张: 19 1/2

印数: 1~5 000 字数: 486 000

定价: 28.50 元

(如有印装质量问题, 我社负责调换)

前 言

微积分是经管类学生的一门重要基础课. 编写本书的目的是指导经管类大学一年级学生能更好地理解并掌握微积分的基本原理，帮助他们学会基本的解题方法，提高他们分析问题、解决问题的能力. 本书的编写参照了教育部关于经管类微积分课程教学的基本要求，并且重点参考了蔡光兴、李德宜主编的《微积分(经管类)》(科学出版社出版，2004 年 8 月)教材. 编写本书的指导思想是既要注重基本训练，又要注意与硕士研究生入学统一考试要求相衔接. 因此，需要做到融学习指导和兼顾考研辅导为一体，本书编写力求靠近这一目标. 书中有的内容凝集了编者多年的教学经验.

本书各章按基本要求、内容提要、疑难解答、典型例题、考题讲析及自测题等内容编写. 基本要求具体地明确了对每一章内容应掌握的程度；内容提要说明本章需要掌握的内容，包括基本概念、重要定理以及常用公式以及它们之间的关系；疑难解答通过对本章的疑难问题、学生学习中易错的概念和解题过程中常见错误方法的剖析，辅导学生掌握基本概念，提高分析问题和解决问题的能力；典型例题是本书的重点，在这里选择了大量的例题，由浅入深，由易到难，用例题的形式体现本章的基本内容及具体要求，注重基本概念，讲求基本方法；考题讲析选择了全国考研试题、相关院校的期末考试试题以及考研试题，体现通过学习指导以期达到的辅导目标；自测题分为两部分，自测题(Ⅰ)以基本题为主，主要测试学生对本章基本知识、基本方法的掌握程度，自测题(Ⅱ)以达到或接近考研水平的题目为主，供学生复习总结时自我检查提高使用.

本书由尹水仿、方瑛主编，蔡光兴、余胜春、李德宜、李逢高任副主编. 并由蔡光兴提出编写思路及编写提纲. 各章编写人员：张水坤(第一章)，方瑛(第二章、第五章)，李逢高(第三章)，蔡光兴(第四章)，尹水仿(第六章、第十章)，余胜春(第七章、第八章)，张凯凡、李家雄(第九章)，李德宜(第十一章)，朱永松(第十二章). 全书统稿工作由尹水仿、余胜春、李德宜完成，刘磊、张青、耿亮、李琳娜、贺方超、黄毅、徐树立、雷勇、常涛、曲峰林、蔡振峰、朱莹、蒋君、曾莹参与了编写的整理工作和自测题以及答案的编写，最后由尹水仿定稿.

由于编者水平有限，书中不妥及不足之处在所难免，敬请广大读者批评指正.

编 者

2005 年 8 月

目　　录

第一章 函 数

一、基本要求

(1) 在已有的数学基础上，加深对函数的概念和基本性态(奇偶性、周期性、单调性、有界性)的了解.

(2) 理解复合函数、反函数、初等函数的概念.

(3) 学会建立简单的经济问题的函数关系式；掌握常见的经济函数.

二、内容提要

1. 区间与邻域

(1) 区间.

开区间 $(a,b)=\{x|\ a<x<b\}$

闭区间 $[a,b]=\{x|\ a\leqslant x\leqslant b\}$

半开区间 $(a,b]=\{x|\ a<x\leqslant b\}$, $[a,b)=\{x|\ a\leqslant x<b\}$

无限区间 $[a,+\infty)=\{x|\ a\leqslant x\}$, $(-\infty,b)=\{x|\ x<b\}$, $(-\infty,+\infty)=\{x|\ -\infty<x<+\infty\}$

(2) 邻域. a 的 δ 邻域记作

$$U(a,\delta)=\{x|\ |x-a|<\delta\}=\{x|\ a-\delta<x<a+\delta\}$$

2. 函数的定义

设 D 是一个非空实数集合，f 为一个对应规则，使每一个 $x\in D$，都有一个确定的实数 y 与之对应，称对应规则 f 为定义在 D 上的一个函数关系，或称变量 y 是变量 x 的函数，记作 $y=f(x)$，$x\in D$. D 称为这个函数的定义域，x 为自变量，y 为因变量，$\{f(x)|\ x\in D\}$ 为函数的值域.

3. 函数的性质

(1) 有界性. 若存在一个正数 M，当 $x\in(a,b)$ 时，恒有 $|f(x)|\leqslant M$，则称函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 上有界；若 M 不存在，则称 $f(x)$ 在 (a,b) 上无界.

(2) 单调性. 设 x_1，x_2 是 (a,b) 内任意两点，当 $x_1<x_2$ 时，若 $f(x_1)<f(x_2)$，则称 $f(x)$ 在区间 (a,b) 上单调增加；若 $f(x_1)>f(x_2)$，则称 $f(x)$ 在区间 (a,b) 上单调减少.

(3) 奇偶性. 当 $x\in(-a,a)$ (关于原点对称的区间)时，若 $f(-x)=f(x)$，则称 $f(x)$ 为偶函数；若 $f(-x)=-f(x)$，则称 $f(x)$ 为奇函数.

(4) 周期性. 设 D 是函数 $f(x)$ 的定义域，若存在常数 $T\neq 0$，对任意 $x\in D$，只要 $x+T\in D$，都有 $f(x+T)=f(x)$，则称 $f(x)$ 为周期函数，T 是 $f(x)$ 的一个周期. $f(x)$ 的周期通常指最小正周期.

4. 反函数

设 $y=f(x)$ 的定义域为 D，值域为 W，若对任一 $y\in W$ 由 $y=f(x)$ 惟一确定的 $x\in D$ 与之

对应，这样确定的函数 $x=\varphi(y)$ 称为函数 $y=f(x)$ 的反函数，记作 $x=f^{-1}(y)$ (习惯上表示为 $y=f^{-1}(x)$). $y=f(x)$ 称为直接函数.

(1) $x=f^{-1}(y)$ $(y\in W)$ 与 $y=f^{-1}(x)$ $(x\in W)$ 为同一函数.

(2) $y=f^{-1}(x)$ $(x\in W)$ 与 $y=f(x)$ $(x\in D)$ 的图形关于 $y=x$ 对称.

5. 复合函数

若 y 是 u 的函数 $y=f(u)$，而 u 又是 x 的函数 $u=\varphi(x)$，且 $\varphi(x)$ 的值全部或部分在 $f(u)$ 的定义域内，那么 y 通过 u 的联系也是 x 的函数，则称这个函数是由 $y=f(u)$ 及 $u=\varphi(x)$ 复合而成的复合函数，记作 $y=f[\varphi(x)]$.

6. 基本初等函数

基本初等函数分为六类函数：

(1) 常数函数：$y=C$ (C 为常数)；

(2) 幂函数：$y=x^a$ (a 为实数)；

(3) 指数函数：$y=a^x$ ($a>0$，$a\neq1$)；

(4) 对数函数：$y=\log_a x$ ($a>0$，$a\neq1$)；

(5) 三角函数：$\sin x$，$\cos x$，$\tan x$，$\cot x$，$\sec x$，$\csc x$；

(6) 反三角函数：$\arcsin x$，$\arccos x$，$\arctan x$，$\operatorname{arccot} x$.

7. 初等函数

由上述六类基本初等函数经过有限次的四则运算或有限次的函数复合步骤所构成并可用一个解析式表示的函数，称为初等函数.

8. 双曲函数

(1) 双曲正弦：$\mathrm{sh}x=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$；

(2) 双曲余弦：$\mathrm{ch}x=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$；

(3) 双曲正切：$\mathrm{th}x=\dfrac{\mathrm{sh}x}{\mathrm{ch}x}=\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$；

(4) 反双曲正弦：$\mathrm{arsh}x=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$，$x\in(-\infty,+\infty)$；

(5) 反双曲余弦：$\mathrm{arch}x=\ln(x+\sqrt{x^2-1})$，$x\in[1,+\infty)$；

(6) 反双曲正切：$\mathrm{arth}x=\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1+x}{1-x}$，$x\in(-1,1)$.

三、疑难解答

问题 1 $y=\lg(-x^2)$ 是不是函数关系？为什么？

答 不是函数关系，因为其定义域为空集.

问题 2 “函数 $y=\sqrt[3]{x^3}$ 与 $y=x$ 的定义域、值域都相同，所以这两个函数就相同.”这种说法对吗？

答 错. 正确说法应为：函数 $y=\sqrt[3]{x^3}$ 与 $y=x$ 的定义域、对应法则都相同，所以这两个函数相同.

函数的两要素为定义域和对应法则，值域可由两者确定．若两个函数的定义域和值域相同，两个函数不一定相同．如 $y=x$ 与 $y=x^3$，其定义域和值域均为 R，但它们显然是两个不同的函数．

问题 3　“分段函数一定不是初等函数．”这种说法对吗？

答　错．分段函数一般不是初等函数，但也有例外，如：

$$y=|x|=\begin{cases} x, & x\geqslant 0 \\ -x, & x>0 \end{cases}$$

可以写成 $y=\sqrt{x^2}$，因此是一个初等函数．

问题 4　学习复合函数应掌握哪些方面的概念？

答　(1) 并不是任何两个函数都能构成复合函数，如 $y=\lg u$，$u=-x^2$ 就不能构成复合函数．一般地，当 $u=\varphi(x)$ 的值域与 $y=f(u)$ 的定义域的交集不是空集时，两个函数才能构成复合函数．

(2) 对于一个复合函数，要会分析它的复合过程．分析方法是“由外向内，层层分析”，每一步得到的函数都应当是某个中间变量或自变量的基本初等函数的和、差、积、商．如：$y=\cos^2\tan x$ 应看做由 $y=u^2$，$u=\cos v$，$v=\tan x$ 复合而成；$y=x^x$ 可写作 $y=\mathrm{e}^{x\ln x}$，应看做由 $y=\mathrm{e}^u$，$u=x\ln x$ 复合而成．

问题 5　单调函数必有单值反函数，不单调的函数是不是一定没有单值反函数？

答　不是的．一个函数是否存在单值反函数，取决于它的对应规则 f 在定义域 D 与值域 W 之间是否构成一一对应的关系．如果是一一对应，那必有单值反函数；否则就没有单值反函数．函数在区间 I 上单调只是一种特殊的一一对应关系，因此单调仅是存在单值反函数的充分条件，而不是必要条件．

例如，函数

$$f(x)=\begin{cases} -x, & -1\leqslant x\leqslant 0 \\ x+1, & 0<x\leqslant 1 \end{cases}$$

在区间 $[-1,1]$ 上不单调(图 1-1(a))，但它存在单值反函数(图 1-1(b))

$$f^{-1}(x)=\begin{cases} -x, & 0\leqslant x\leqslant 1 \\ x-1, & 1<x\leqslant 2 \end{cases}$$

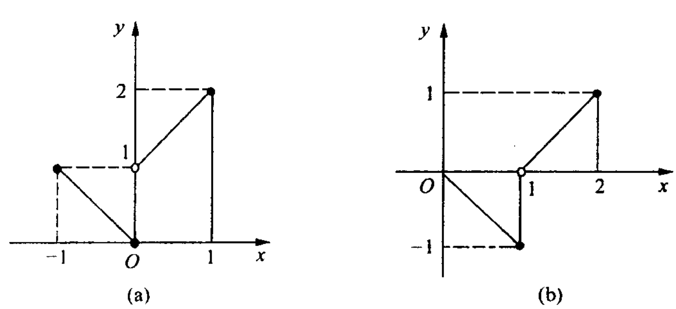

图 1-1

问题 6　如果函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在区间 (a,b) 内都无界，函数 $f(x)g(x)$ 在 (a,b) 内一定无界吗？

答 不一定. 例如，$f(x)=\tan x$，$g(x)=\cot x$ 在 $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 内都无界，但 $f(x)g(x)=1$ 在 $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 内是有界的.

四、典型例题

1. 绝对值不等式

例 1 解不等式 $|x-a|<\delta$，$\delta>0$.

解 $|x-a|$ 在几何图形上表示 x 与 a 两点的距离，利用这个几何解释，只要求那些与点 a 的距离小于 δ 的点 x，由图 1-2 可知 $a-\delta<x<a+\delta$.

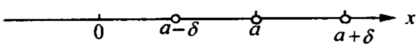

图 1-2

例 2 将不等式 $-1<x<3$ 用带绝对值的不等式表示，并表示成某个点的一个邻域.

解 找出区间的中心与半径，结合绝对值不等式的几何解释即可. 开区间 $(-1,3)$ 的中心为点 $(-1+3)/2$，半径为 $[3-(-1)]/2=2$，所以可表示成 $|x-1|<2$. 即半径为 2 的点 1 的邻域为 $U(1,2)$.

2. 函数定义域

例 3 求 $y=\lg(x+1)+\dfrac{1}{x-2}+\arcsin\dfrac{2x+1}{7}+\sqrt{x}$ 的定义域.

解 定义域是使表达式有意义的自变量的取值范围，所以应同时满足：

$$x+1>0,\ x-2\neq 0,\ -1\leqslant\frac{2x+1}{7}\leqslant 1 \text{ 且 } x\geqslant 0$$

即
$$x>-1,\ x\neq 2,\ -4\leqslant x\leqslant 3 \text{ 且 } x\geqslant 0$$

交集为
$$0\leqslant x<2 \quad \text{或} \quad 2<x\leqslant 3$$

即
$$D=[0,2)\cup(2,3]$$

注意：求定义域时要注意某些限制，如分式中的分母不能为零，对数中的真数不能为负数，根式中的负数不能开偶次方，$\arcsin x$ 和 $\arccos x$ 的定义域为 $[-1,1]$ 等.

例 4 设 $f(x)$ 的定义域为 $[1,2]$，求函数 $f\left(\dfrac{1}{1+x}\right)$ 的定义域.

解 设 $\dfrac{1}{1+x}=u$，则 $f\left(\dfrac{1}{1+x}\right)=f(u)$. 要使函数 $f\left(\dfrac{1}{1+x}\right)$ 有意义，即 $f(u)$ 有意义，只要 $u\in[1,2]$ 即可，即 $1\leqslant\dfrac{1}{1+x}\leqslant 2$，解之得 $-\dfrac{1}{2}\leqslant x\leqslant 0$，故 $f\left(\dfrac{1}{1+x}\right)$ 的定义域为 $\left[-\dfrac{1}{2},0\right]$.

例 5 已知 $f(x)=\dfrac{1}{1+x}$，求 $f[f(x)]$ 的定义域.

解法 1 先求 $f(x)$ 的定义域为 $x\neq -1$，与例 4 类似可解得：$x\neq -2$，$x\neq -1$ 的一切实数为所求定义域.

解法 2 由题设，有

$$f[f(x)]=\frac{1}{1+f(x)}=\frac{1}{1+\dfrac{1}{1+x}}$$

要使上式有意义，应有

$$\begin{cases} 1+x\neq 0 \\ 1+\dfrac{1}{1+x}\neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\neq -1 \\ x\neq -2 \end{cases}$$

可得所求定义域为$D=(-\infty,-2)\cup(-2,-1)\cup(-1,+\infty)$.

例 6 确定下列函数的定义域.

$$f(x)=\begin{cases} \sqrt{1-x^2}, & |x|\leqslant 1 \\ x-1, & 1<|x|<2 \end{cases}$$

解 $f(x)$的定义域是$|x|\leqslant 1$与$1<|x|<2$的并集.

3. 复合函数

例 7 已知$f(x)=e^{2x-1}+\sqrt{x^2+1}$，求$f(0)$，$f(a+h)$，$\dfrac{1}{f(t^2)}$.

解

$$f(0)=e^{2\times 0-1}+\sqrt{0^2+1}=e^{-1}+1$$

$$f(a+h)=e^{2(a+h)-1}+\sqrt{(a+h)^2+1}$$

$$\frac{1}{f(t^2)}=\frac{1}{e^{2t^2-1}+\sqrt{t^4+1}}$$

例 8 设$f(x)=2x^2-3x+1$，$\varphi(x)=e^{2x}$，求$f[\varphi(x)]$，$\varphi[f(x)]$.

解

$$f[\varphi(x)]=2[\varphi(x)]^2-3\varphi(x)+1=2(e^{2x})^2-3e^{2x}+1=2e^{4x}-3e^{2x}+1$$

$$\varphi[f(x)]=e^{2f(x)}=e^{2(2x^2-3x+1)}$$

例 9 设$f(x)=\begin{cases} 1, & |x|<1 \\ 0, & |x|=1 \\ -1, & |x|>1 \end{cases}$，$g(x)=e^x$，求$f[g(x)]$和$g[f(x)]$.

解

$$f[g(x)]=f(e^x)=\begin{cases} 1, & |e^x|<1 \\ 0, & |e^x|=1 \\ -1, & |e^x|>1 \end{cases}=\begin{cases} 1, & x<0 \\ 0, & x=0 \\ -1, & x>0 \end{cases}$$

$$g[f(x)]=e^{f(x)}=\begin{cases} e, & |x|<1 \\ 1, & |x|=1 \\ e^{-1}, & |x|>1 \end{cases}$$

例 10 设$f\left(\sin\dfrac{x}{2}\right)=\cos x+1$，求$f(x)$.

解法 1(换元法)

$$f\left(\sin\frac{x}{2}\right)=\cos x+1=1-2\sin^2\frac{x}{2}+1=2-2\sin^2\frac{x}{2}$$

则

$$f(x)=2-2x^2$$

解法 2(变量代换法) 令$u=\sin\dfrac{x}{2}$，则$x=2\arcsin u$.

$$f\left(\sin\frac{x}{2}\right)=f(u)=\cos(2\arcsin u)+1=1-2\sin^2(\arcsin u)+1=2-2u^2$$

则

$$f(x)=2-2x^2$$

例 11 若$f(x+1)=x^2+\cos x$，求$f(2x)$.

解 令 $x+1=t$，则 $x=t-1$，且 $f(t)=(t-1)^2+\cos(t-1)$，即 $f(x)=(x-1)^2+\cos(x-1)$，故 $f(2x)=(2x-1)^2+\cos(2x-1)$.

例 12 已知 $f(x)=\mathrm{e}^{x^2}$，$f[\varphi(x)]=1-x$，且 $\varphi(x)>0$，求 $\varphi(x)$，并写出它的定义域.

解 依题意，有

$$f[\varphi(x)]=\mathrm{e}^{[\varphi(x)]^2} \text{ 且 } f[\varphi(x)]=1-x$$

即

$$\mathrm{e}^{[\varphi(x)]^2}=1-x \Rightarrow [\varphi(x)]^2=\ln(1-x)$$

由 $\varphi(x)>0$，得 $\varphi(x)=\sqrt{\ln(1-x)}$，则 $\varphi(x)$ 的定义域为 $(-\infty,0)$.

例 13 设 $f(x)$ 满足 $f(x)-2f\left(\dfrac{1}{x}\right)=x$，求 $f(x)$.

解 作变量代换，令 $t=\dfrac{1}{x}$，则 $x=\dfrac{1}{t}$，代入方程，得

$$f\left(\frac{1}{t}\right)-2f(t)=\frac{1}{t}$$

即

$$f\left(\frac{1}{x}\right)-2f(x)=\frac{1}{x}$$

将此方程两端乘以 2，再与原方程相加，得到 $-3f(x)=x+\dfrac{2}{x}$，即 $f(x)=-\dfrac{1}{3}\left(x+\dfrac{2}{x}\right)$.

4. 反函数

例 14 求函数 $y=\dfrac{x+2}{x-2}$ 的反函数.

解 由 $y=\dfrac{x+2}{x-2}$ 解出 $x=\dfrac{2(y+1)}{y-1}$，则所求反函数为 $y=\dfrac{2x+2}{x-1}$.

一般地，设 $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ $(ad-bc\neq 0)$，则其反函数为 $y=f^{-1}(x)=\dfrac{-dx+b}{cx-a}$.

例 15 求 $y=f(x)=\begin{cases} x, & -\infty<x<1 \\ x^2, & 1\leqslant x\leqslant 4 \\ 2^x, & 4<x<+\infty \end{cases}$ 的反函数.

解 (1) 在区间 $(-\infty,1)$ 内，$y=x$ 的反函数即为其本身.

(2) 在区间 $[1,4]$ 中，由 $y=x^2$，得 $x=\pm\sqrt{y}$. 因 $x\in[1,4]$，故 $x=\sqrt{y}$；又因为 $y=x^2$ 的值域为 $[1,16]$，故 $x=\sqrt{y}$ 的定义域为 $[1,16]$，则

$$y=f^{-1}(x)=\sqrt{x} \quad (1\leqslant x\leqslant 16)$$

(3) 在区间 $(4,+\infty)$ 上，由 $y=2^x$ 解出 $x=\log_2 y$，且可求得其定义域为 $(16,+\infty)$，故可得

$$y=\log_2 x \quad (16<x<+\infty)$$

综上所述，得

$$y=f^{-1}(x)=\begin{cases} x, & -\infty<x<1 \\ \sqrt{x}, & 1\leqslant x\leqslant 16 \\ \log_2 x, & 16<x<+\infty \end{cases}$$

例 16 设函数 $y=\cos x$ 在 $[-2\pi,\pi]$ 上有定义，试求其反函数.

解 因 $-2\pi\leqslant x\leqslant -\pi$，故 $0\leqslant x+2\pi\leqslant\pi$，又因 $\cos(x+2\pi)=\cos x=y$，故 $x+2\pi=\arccos y$，即 $x=\arccos y-2\pi$. 故所求反函数为 $y=\arccos x-2\pi$.

5. 函数的某些性质

例 17 设在 $(-\infty,+\infty)$ 上 $f(x)$，$\varphi(x)$ 都有定义，且 $f(x)$ 为奇函数，$\varphi(x)$ 为偶函数，则 $f[f(x)]$，$f[\varphi(x)]$，$\varphi[f(x)]$，$\varphi[\varphi(x)]$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上各为什么函数？

解 由奇偶函数的定义知

$$f(-x)=-f(x)\,,\quad \varphi(-x)=\varphi(x)$$

所以

$$f[f(-x)]=f[-f(x)]=-f[f(x)]$$

故 $f[f(x)]$ 为奇函数；

$f[\varphi(-x)]=f[\varphi(x)]$，故 $f[\varphi(x)]$ 为偶函数；

$\varphi[f(-x)]=\varphi[-f(x)]=\varphi[f(x)]$，故 $\varphi[f(x)]$ 为偶函数；

$\varphi[\varphi(-x)]=\varphi[\varphi(x)]$，故 $\varphi[\varphi(x)]$ 为偶函数.

例 18 证明：$f(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上为奇函数.

证 对于任一 $x\in(-\infty,+\infty)$，有

$$\begin{aligned}f(-x)&=\ln[-x+\sqrt{1+(-x)^2}\,]=\ln(\sqrt{1+x^2}-x)\\&=\ln\frac{(\sqrt{1+x^2}-x)(\sqrt{1+x^2}+x)}{\sqrt{1+x^2}+x}=\ln\frac{1}{\sqrt{1+x^2}+x}\\&=\ln 1-\ln(x+\sqrt{1+x^2})=-\ln(x+\sqrt{1+x^2})=-f(x)\end{aligned}$$

故 $f(x)$ 为 $(-\infty,+\infty)$ 上的奇函数.

例 19 证明：$f(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上为奇函数且为有界函数.

证 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有定义，且

$$f(-x)=\frac{e^{-x}-e^x}{e^x+e^{-x}}=\frac{-(e^x-e^{-x})}{e^x+e^{-x}}=-f(x)$$

即 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上为奇函数. 又因为

$$|f(x)|=\left|\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}\right|$$

当 $x\geqslant 0$ 时，

$$|f(x)|=\left|\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}\right|=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}<\frac{e^x}{e^x}=1$$

当 $x<0$ 时，

$$|f(x)|=\left|\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}\right|=\frac{e^{-x}-e^x}{e^{-x}+e^x}<\frac{e^{-x}}{e^{-x}}=1$$

因而 $x\in(-\infty,+\infty)$ 时恒有 $|f(x)|<1$，故 $f(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上为有界函数.

例 20 设 $f(x)$ 是定义在 $(-l,l)$ 上的任意函数，证明：$f(x)$ 可以表示成偶函数与奇函数和的形式，且这种表示法是惟一的.

证 令

$$g(x)=\frac{1}{2}[f(x)-f(-x)]\,,\quad h(x)=\frac{1}{2}[f(x)+f(-x)]$$

则易知 $g(x)$ 为奇函数，$h(x)$ 为偶函数，且

$$f(x)=g(x)+h(x)$$

故 $f(x)$ 可表示成偶函数与奇函数之和.

惟一性(用反证法). 设将 $f(x)$ 另表示为 $f(x)=g_1(x)+h_1(x)$，其中 $g_1(x)$ 为奇函数，$h_1(x)$ 为偶函数，则

$$g(x)+h(x)=g_1(x)+h_1(x)$$

即

$$g(x)-g_1(x)=h_1(x)-h(x) \tag{1}$$

在式(1)中以 $-x$ 代 x，得

$$g(-x)-g_1(-x)=h_1(-x)-h(-x)$$

即

$$-g(x)+g_1(x)=h_1(x)+h(x) \tag{2}$$

(1) − (2)，得

$$2h_1(x)-2h(x)=0$$

即

$$h_1(x)=h(x)$$

类似可得 $g_1(x)=g(x)$，故惟一性得证.

6. 建立函数关系式

例 21 设两室一厅商品房价值 100 万元，王某自筹 40 万元，还需要借款 60 万元. 借款月利率 $r=0.01$，条件是逐月偿还，25 年还清. 假如还不起，房子就收归债权人. 王某应具有什么能力才能借款?

解 起始借款 60 万元，借期 $n=25\times12=300$(月). 设每月还 x 元，y_n 表示第 n 月仍欠债主的钱，有

$$\begin{aligned}
&y_0=60\,(\text{万元})\\
&y_1=y_0(1+r)-x\\
&y_2=y_1(1+r)-x=y_0(1+r)^2-x[(1+r)+1]\\
&\cdots\cdots\\
&y_n=y_0(1+r)^n-x[(1+r)^{n-1}+(1+r)^{n-2}+\cdots+(1+r)+1]\\
&\quad\ =y_0(1+r)^n-\frac{x[(1+r)^n-1]}{r}
\end{aligned}$$

当借款还清时，$y_n=0$，可得

$$x=\frac{y_0r(1+r)^n}{(1+r)^n-1}=\frac{60\times0.01\times(1+0.01)^{300}}{(1+0.01)^{300}-1}\approx0.63\,1936\,(\text{万元})$$

即王某应具备每月还款 6319.36 元的能力才能借款.

注 建立函数表达式的一般步骤为：

(1) 分析实际问题中的各个量，明确哪些是常量，哪些是变量，并从中确定自变量、中间变量和因变量.

(2) 对于几何问题，要画一张草图，建立适当的坐标系帮助分析. 对于其他问题，可根据相关知识，建立函数关系式.

(3) 确定实际问题的函数的定义域.

例 22 某化肥厂生产某产品 1000 吨，每吨定价为 130 元. 销售量在 700 吨以内时，按原价出售；超过 700 吨时超过的部分需打 9 折出售. 试将销售总收益与总销售量的函数关系用数学表达式表出.

解 设总销售量为 x，总收益为 y，则

$$y=\begin{cases}130x, & 0\leqslant x\leqslant 700\\ 130\times 700+0.9\times 130(x-700), & 700<x\leqslant 1000\end{cases}$$

即
$$y=\begin{cases}130x, & 0\leqslant x\leqslant 700\\ 91000+117(x-700), & 700<x\leqslant 1000\end{cases}$$

五、考 题 讲 析

例 23(研，1987) $f(x)=|x\sin x|\mathrm{e}^{\cos x}\quad(-\infty<x<+\infty)$是(　　).

A. 有界函数　　B. 单调函数　　C. 周期函数　　D. 偶函数

解　选择D，因为$f(-x)=|-x\sin(-x)|\mathrm{e}^{\cos(-x)}=|x\sin x|\mathrm{e}^{\cos x}=f(x)$.

例 24(研，1988)　设$f(x)=\mathrm{e}^{x^2}$，$f[\varphi(x)]=1-x$，且$\varphi(x)\geqslant 0$，则$\varphi(x)=$__________.

解　$f[\varphi(x)]=\mathrm{e}^{[\varphi(x)]^2}=1-x$，由$\varphi^2(x)\geqslant 0$，得$1-x\geqslant 1$，即$x\leqslant 0$，故$\varphi(x)=\sqrt{\ln(1-x)}$ $(x<0)$.

例 25(研，1990)　设$f(x)=x\tan x\mathrm{e}^{\sin x}$，则$f(x)$是(　　).

A. 偶函数　　B. 无界函数　　C. 周期函数　　D. 单调函数

解　选择B，因为$\tan x$在某些点附近无界.

例 26 (研，1990)　设函数$f(x)=\begin{cases}1, & |x|\leqslant 1\\ 0, & |x|>1\end{cases}$，则$f[f(x)]=$_____.

解　对任意$x\in(-\infty,+\infty)$，$|f(x)|\leqslant 1$，而$f[f(x)]=\begin{cases}1, & |f(x)|\leqslant 1\\ 0, & |f(x)|>1\end{cases}$，故$f[f(x)]=1$.

例 27(研，1992)　已知$f(x)=\sin x$，$f[\varphi(x)]=1-x^2$，则$\varphi(x)=$________的定义域为_______.

解　由$f(x)=\sin x$，故$f[\varphi(x)]=\sin\varphi(x)=1-x^2$，从而$\varphi(x)=\arcsin(1-x^2)$.

又由$|\sin\varphi(x)|\leqslant 1$ 得$|1-x^2|\leqslant 1$，于是$-2\leqslant x^2\leqslant 2$ 或$-\sqrt{2}\leqslant x\leqslant\sqrt{2}$，即$\varphi(x)$的定义域为$\left[-\sqrt{2},\sqrt{2}\right]$.

例 28 (研，1992)　设$f(x)=\begin{cases}x^2, & x\leqslant 0\\ x^2+x, & x>0\end{cases}$，则(　　).

A. $f(-x)=\begin{cases}-x^2, & x\leqslant 0\\ -(x^2+x), & x>0\end{cases}$　　B. $f(-x)=\begin{cases}-(x^2+x), & x<0\\ -x^2, & x\geqslant 0\end{cases}$

C. $f(-x)=\begin{cases}x^2, & x\leqslant 0\\ x^2-x, & x>0\end{cases}$　　D. $f(-x)=\begin{cases}x^2-x, & x<0\\ x^2, & x\geqslant 0\end{cases}$

解　选择D. 由

$$f(-x)=\begin{cases}x^2, & -x\leqslant 0\\ x^2-x, & -x>0\end{cases}$$

故
$$f(-x)=\begin{cases}x^2, & x\geqslant 0\\ x^2-x, & x<0\end{cases}$$

例 29 (研，2004)　函数$f(x)=\dfrac{|x|\sin(x-2)}{x(x-1)(x-2)^2}$在区间(　　)内有界.

A. $(-1,0)$　　B. $(0,1)$　　C. $(1,2)$　　D. $(2,3)$