数列求和

彭士元　朱铁夫

广东教育出版社

数列求和

彭士元　朱铁夫

*

广东教育出版社出版发行

广东省新华书店经销

花城印刷厂印刷

787×1092毫米32开本　5印张　3插页　105000字

1989年6月第1版　1989年6月第1次印刷

印数1－3,270册

ISBN7－5406－0762－9/G·759

定价1.80元

前　言

"数列求和有什么难？！逐项相加就是了！"从理论上来说确是如此。不管两地相隔多么遥远，一步一个脚印走下去总是可以到达的。特别是现在，已有每秒钟能进行几百万乃至几亿次运算的电子计算机，对于有穷数列，不管项数多大，逐项求和总是可能的，甚至是轻而易举的。然而，为了求出1与1亿间所有整数之和，用现代化工具去做这样的蠢事，简直是对人类文明的耻笑（当然并非一概反对逐项相加的做法）。数列求和与许多数学方法有关联，特别与极限理论、微分积分的研究有密切关系，它在初等数学、高等数学中都有广泛的应用，进一步研究级数理论，更是高等数学中十分重要的内容。因此，掌握求数列的和的方法，是非常有用的。

这本小册子只叙述用初等方法研究有穷数列的求和问题，重点在于叙述计算方法，而不过分追求理论的严谨，并注意它在代数、几何、三角等方面的应用。书中有时也谈到一题多解，把一些方法逐步推广，以求触类旁通，希望对读者有所裨益。

本书适合高中学生和知识青年阅读，也可供中学数学教师教学时参考。

本书的练习题，之所以不把它放在各章节的末尾，而把它放在全书的末尾，是因为一些题往往有多种解法，其优劣难于评价，读者可选择自己较熟练的方法进行练习。

本书如有不妥之处，恳请批评指正！

作　者

目　录

一、数　列

按照一定次序排列的一列数叫做数列，数列中的每一个数叫做这个数列的一项。给定一个数列，可以写成

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots,\ a_n,\ \cdots \qquad (1)$$

其中a_n表示数列的第n项。常用$\{a_n\}$来简记此数列。把数列各项用加号连起来，得到

$$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n+\cdots \qquad (2)$$

称为级数。a_n是级数的第n项。

给定数列（1），对于任一确定的自然数k都能找到一项a_k与之对应，因此我们可把数列看作一个定义域为自然数集（或它的有限子集$\{1,\ 2,\ \cdots,\ n\}$）的函数。如果第n项与自然数n之间的关系能用一个公式$f(n)$来表示，这个公式就叫做数列的通项，记为$a_n=f(n)$。

给定数列（1），若对于任一k（$k\geqslant 1$）都有$a_{k+1}-a_k=d$，其中d为与k无关的常数，则称此数列为等差数列。d称为该数列的公差。若对于任一k（$k\geqslant 1$）都有$a_{k+1}/a_k=r$，其中r为与k无关的常数，则称此数列为等比数列。r称为该数列的公比。例如，1，3，5，…，$(2n-1)$，…是公差为2的等差数列。1，$\frac{1}{2}$，$\frac{1}{2^2}$，…，$\frac{1}{2^{n-1}}$，…是公比为$\frac{1}{2}$的等比数列。而$\frac{1}{2}$，$\frac{2}{3}$，$\frac{3}{4}$，…，$\frac{n}{n+1}$，…既不是等差数列，也不是等比数列。项数有限的数列叫做有穷数列。

项数无限的数列叫做无穷数列。数列有许多性质，在这里只研究有穷数列的求和问题。

对于数列的研究源远流长，我国数学家也有许多杰出的贡献。约在公元前1550年，埃及已有关于等差数列的论述：将100个馒头分与5人，首2人所得应为后3人所得$\frac{1}{7}$，问各得几何？（答：$1\frac{2}{3}$，$10\frac{5}{6}$，20，$29\frac{1}{6}$，$38\frac{1}{3}$）。我国古书《周髀算经》、《九章算术》、《孙子算经》、《张丘建算经》对数列都有许多论述。刘徽注《九章算术》（公元263年）中有：今有大夫、不更、簪裹、上造、公士、凡五人，共猎得五鹿，欲以爵次分之，问各得几何？又如：今有女子善织，日自倍，五日织五尺，问日织几何？我国古代名著《庄子》第33篇《天下篇》中藏惠施有一著名论断，对数列的极限思想的阐述是非常深刻的。他说："一尺之捶（同棰），日取其半，万世不竭"。就是说，一尺长之木棒，第一天截去一半，第二天又截去所剩一半中的一半（即原长的$\frac{1}{4}$），第三天再截去第二天所剩的一半（即原长的$\frac{1}{8}$），如此每天截去前一天所剩长度之半，永远也截取不完。我们把每天截去的长度（是原长的几分之几）列出来，便是无穷等比数列：

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^3}, \cdots, \frac{1}{2^n}, \cdots.$$

每天所剩长度越来越小，但永不为0，而这个数列的和也不超过1。

事实上，早期对数列的研究，主要是求和问题。古希腊数学家欧几里得的《几何原本》（约公元前300年)第九卷第

35题：有若干连比例率，二率末率，各以首率减之，则二率之余，与首率比，若末率之余，与诸前率和比．即

$$\frac{a_{n+1}-a_1}{a_n+a_{n-1}+\cdots+a_1}=\frac{a_2-a_1}{a_1}$$

或 $$\frac{ar^n-a}{S_n}=\frac{ar-a}{a},$$

可化为 $$S_n=\frac{ar^n-a}{r-1}$$

的等比级数和的公式．

相传古代印度国王舍罕要褒赏他的聪明能干的宰相达依尔（国际象棋发明者），问他需要什么，达依尔回答说："国王只要在国际象棋的棋盘第一个格子上放一粒麦子，第二个格子上放二粒，第三个格子里放四粒，以后按此比例每一个格加一倍，一直放到第64格（国际象棋盘是 $8\times8=64$ 格），我就感恩不尽，其他我什么也不要了．" 国王想："这有多少！还不容易！" 他让人扛来一袋小麦，但一会儿全用完了，再来一袋很快又用完了．国王纳闷，到底需要多少麦子呢？用等比级数求和公式计算得麦粒总数需 1.84467×10^{19}，以一立方米小麦约 1.42×10^8 粒来折算，结果为 1.29906×10^{11} 立方米．这是多大的数字啊！全印度的粮食用完还不够呢！

再看一个"笔尖底下的行星"的趣事．

1781年以前，人们只知道五大行星：水星、金星、火星、木星、土星．1766年提替斯总结出这样的经验公式：设地球与太阳的平均距离（即一个天文单位）是10，那么各行星与太阳的距离是：

水星 $4=4+0$（3.9），金星 $7=4+3$（7.2），

地球 $10=4+6$（10），火星 $16=4+12$（15.2），

（？） 28＝4＋24（？）， 木星 52＝4＋48(52.0)，

土星 100＝4＋96（95.4）.

括号内是实际距离，它和左边计算出来的数字很接近，左边的数字是用数列0，3，6，12，…，加上4得出来的，这数列除去第一项后就是公比为2的等比数列．这一简单关系虽然是数字的凑合，没有理论根据，但还是引起了天文学家的注意．1782年赫歇尔发现土星之外还有一个行星，以后定名为天王星，它和太阳的距离为192，与用上面的方法推算得到的196很接近．1801年天文学家根据高斯创立的行星椭圆轨道法找到了一颗8等星，以后定名为谷神星，它与太阳的距离为27.7，与上面推算中的28很接近．这颗星的发现是科学的辉煌胜利，它显示了数学理论的巨大威力．

为了书写简便，我们引用符号$\sum$表示求和（$\sum$是希腊字母，读作“西格马”），即

$$a_1+a_2+\cdots+a_n=\sum_{k=1}^{n}a_k$$

容易验证，它有性质：

1° $\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)=\sum_{k=1}^{n}a_k+\sum_{k=1}^{n}b_k$；

2° $\sum_{k=1}^{n}ca_k=c\sum_{k=1}^{n}a_k$；

3° $\sum_{k=1}^{n}c=c\cdot n$；

其中c为与k无关的数．

例 已知$\sum_{k=1}^{17}a_k=31$，$\sum_{k=1}^{17}b_k=18$ 求$\sum_{k=1}^{17}(3a_k-2b_k)$．

解：$\sum_{k=1}^{17}(3a_k-2b_k)=\sum_{k=1}^{17}3a_k-\sum_{k=1}^{17}2b_k$

$=3\sum_{k=1}^{17}a_k-2\sum_{k=1}^{17}b_k=3\cdot31-2\cdot18=57$.

二、部分和变换法

所谓部分和变换法，就是为了求出给定数列的部分和，把此数列的每一项作某个变换，得出一个新的数列，再由新数列与旧数列之间的关系导出两数列的部分和之间的关系。

例如，求公差为d的等差数列a_1，a_2，…，a_n的前n项和。

作一个新的等差数列b_1，b_2，…，b_n它是由旧数列的排列次序颠倒而得。显然，其公差为$-d$，且有关系式

$$b_k=a_{n-k+1}.$$

若$S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$，显然 $b_1+b_2+\cdots+b_n$ 也等于S_n。

由于 $a_k+b_k=a_1+(k-1)d+b_1+(k-1)\cdot(-d)=a_1+b_1$
$=a_1+a_n$，　$(k=1,2,\cdots,n)$

因此

$$\begin{aligned}S_n+S_n&=(a_1+a_2+\cdots+a_n)+(b_1+b_2+\cdots+b_n)\\&=(a_1+b_1)+(a_2+b_2)+\cdots+(a_n+b_n)\\&=(a_1+a_n)+(a_1+a_n)+\cdots+(a_1+a_n)\\&=n\cdot(a_1+a_n),\end{aligned}$$

即 $S_n=n(a_1+a_n)/2=na_1+n(n-1)\cdot d/2$.

又如，求公比为q的等比数列a_1，a_2，…，a_n的前n项和。

作一个新数列b_1，b_2，…，b_n，使$b_k=a_kq$。若

$$S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n, \tag{1}$$

两端乘以q得

$$\begin{aligned}qS_n&=a_1q+a_2q+\cdots+a_nq\\&=b_1+b_2+\cdots+b_n.\end{aligned} \tag{2}$$

（1）与（2）式两端分别相减得

$$(1-q)S_n=a_1-b_n=a_1-a_nq=a_1(1-q^n).$$

当$q\neq 1$时，$S_n=\dfrac{a_1(1-q^n)}{1-q}$，

当$q=1$时，$a_1=a_2=\cdots=a_n$，则$S_n=na_1$。

再如，设$\{b_k\}$是公差为d的等差数列，$\{a_k\}$是公比为q的等比数列，求$\sum_{k=1}^{n}b_ka_k$。（$q\neq 1$）

假定 $S_n=b_1a_1+b_2a_2+\cdots+b_na_n$，

等式两端乘以q得

$$\begin{aligned}qS_n&=b_1a_1q+b_2a_2q+\cdots+b_na_nq\\&=b_1a_2+b_2a_3+\cdots+b_{n-1}a_n+b_na_nq\\&=(b_1+d)a_2+(b_2+d)a_3+\cdots+(b_{n-1}+d)a_n\\&\quad-d(a_2+a_3+\cdots+a_n)+b_na_nq\\&=b_2a_2+b_3a_3+\cdots+b_na_n-d(a_2+a_3+\cdots\\&\quad+a_n)+b_na_nq\\&=S_n-b_1a_1-a_2d(1-q^{n-1})/(1-q)+b_na_nq.\end{aligned}$$

因此 $(1-q)S_n=b_1a_1+a_2d(1-q^{n-1})/(1-q)-b_na_nq$，

即
$$\begin{aligned}S_n&=\frac{a_1}{1-q}\left\{b_1+\frac{dq(1-q^{n-1})}{1-q}-[b_1+(n-1)d]q^n\right\}\\&=\frac{a_1}{1-q}\left\{b_1(1-q^n)+\frac{dq-dq^n-(n-1)dq^n(1-q)}{1-q}\right\}\\&=\frac{a_1}{1-q}\left\{b_1(1-q^n)+\frac{dq(1-q^n)-ndq^n(1-q)}{1-q}\right\}\\&=\frac{a_1}{1-q}\left\{(1-q^n)\left(b_1+\frac{dq}{1-q}\right)-ndq^n\right\}.\qquad(3)\end{aligned}$$

例1 求和 $nx+(n-1)x^2+\cdots+2x^{n-1}+1\cdot x^n\ (x\neq 1)$。

解： 以$b_1=n$，$d=-1$，$a_1=x$，$q=x$代入（3）式得

$$S_n=nx+(n-1)x^2+\cdots+2x^{n-1}+1\cdot x^n$$
$$=\frac{x}{1-x}[(1-x^n)(n-\frac{x}{1-x})+nx^n]$$
$$=\frac{1}{(1-x)^2}[x^{n+2}-(n+1)x^2+nx].$$

类似地可推得

$$\sigma_n=1+2x+3x^2+\cdots+nx^{n-1}$$
$$=\frac{1-x^n}{(1-x)^2}-\frac{nx^n}{1-x}\quad(x\neq 1).$$

例2　求数列5，55，555，…的前n项之和。

解：因$\underbrace{55\cdots5}_{k个}=\frac{5}{9}(10^k-1)$，

故$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{5}{9}(10^k-1)=\frac{5}{9}\sum_{k=1}^{n}10^k-\frac{5}{9}\cdot n$

$$=\frac{5}{81}(10^{n+1}-9n-10).$$

例3　给定数列1，3，5，7，…求通项a_n及前n项和S_n，并求a_{a_n}，S_{a_n}，a_{S_n}，S_{S_n}。

解：显然$a_n=2n-1$；

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}(2k-1)=n[1+(2n-1)]/2=n^2;$$

因此　$a_{a_n}=a_{2n-1}=2(2n-1)-1=4n-3$；

$$S_{a_n}=S_{2n-1}=\sum_{k=1}^{2n-1}(2k-1)$$
$$=\frac{1+(4n-3)}{2}(2n-1)=(2n-1)^2;$$

$$a_{S_n}=a_{n^2}=2n^2-1;$$

$$S_{S_n}=S_{n^2}=\sum_{k=1}^{n^2}(2k-1)$$

$$=\frac{1+(2n^2-1)}{2}n^2=n^4.$$

例 4 求分母为3，包含在正整数m与n（$m<n$）之间的所有不可约分数之和。

解：在正整数m与n之间（$m<n$），分母为3的所有不可约分数为

$$\frac{3m+1}{3},\ \frac{3m+2}{3},\ \frac{3(m+1)+1}{3},\ \frac{3(m+1)+2}{3},$$

$$\cdots,\ \frac{3n-2}{3},\ \frac{3n-1}{3}.$$

把此数列的排列次序倒转过来，便有

$$\frac{3n-1}{3},\ \frac{3n-2}{3},\ \frac{3(n-1)-1}{3},\ \frac{3(n-1)-2}{3},$$

$$\cdots,\ \frac{3m+2}{3},\ \frac{3m+1}{3}.$$

把这两个数列对应项相加，每项都为$m+n$，总共有$2(n-m)$项，故

所求之和 $S=\frac{1}{2}(m+n)(n-m)\cdot 2=n^2-m^2$.

例 5 求$\frac{1}{2}$，$\frac{3}{2^2}$，$\frac{5}{2^3}$，…，$\frac{2n-1}{2^n}$之和。

解：设 $S_n=\frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}+\frac{5}{2^3}+\cdots+\frac{2n-1}{2^n}$,

则 $$2S_n=1+\frac{3}{2}+\frac{5}{2^2}+\cdots+\frac{2n-1}{2^{n-1}}$$

$$=1+\left(\frac{2}{2}+\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^2}\right)+\left(\frac{2}{2^3}+\frac{5}{2^3}\right)+\cdots+\left(\frac{2}{2^{n-1}}+\frac{2n-3}{2^{n-1}}\right)$$

$$=1+\frac{2}{2}\left[1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-2}}\right]$$

$$+\left[\frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}+\frac{5}{2^3}+\cdots+\frac{2n-3}{2^{n-1}}+\frac{2n-1}{2^n}\right]-\frac{2n-1}{2^n}$$

$$=1+\frac{1-\frac{1}{2^{n-1}}}{1-\frac{1}{2}}+S_n-\frac{2n-1}{2^n},$$

因此

$$S_n=1+2\left(1-\frac{1}{2^{n-1}}\right)-\frac{2n-1}{2^n}$$

$$=1+\frac{2^{n-1}-1}{2^{n-2}}-\frac{2n-1}{2^n}=3-\frac{2n+3}{2^n}.$$

例6 一次竞赛在n（>1）轮中共发了m枚奖章，第一轮发了1枚又余下的$m-1$枚的$\frac{1}{7}$，第二轮发了2枚又余下的$\frac{1}{7}$，…。直至第n轮正好发了n枚而没有余下的奖章。这次竞赛共包括几轮？一共发了多少奖章？

解：第一轮发了$1+\frac{1}{7}(m-1)$枚奖章。

发完第一轮后剩下$(m-1)\cdot\frac{6}{7}$枚，

发完第二轮后剩下$\left((m-1)\frac{6}{7}-2\right)\frac{6}{7}$枚，

发完第三轮后剩下$\left(\left((m-1)\frac{6}{7}-2\right)\frac{6}{7}-3\right)\frac{6}{7}$枚，

……

发完第$n-1$轮后剩下

$$\left\{\left[\cdots\left(\left(\left((m-1)\frac{6}{7}-2\right)\frac{6}{7}-3\right)\frac{6}{7}-\cdots\right]\frac{6}{7}-\overline{n-1}\right\}\frac{6}{7}$$

$=n$。

因发完$n-1$轮后，剩下刚好n枚，故上面等式成立，即

$$m\left(\frac{6}{7}\right)^{n-1}-\frac{6}{7}\left[\left(\frac{6}{7}\right)^{n-2}+2\cdot\left(\frac{6}{7}\right)^{n-3}+\cdots\right.$$

$$\left.+(n-2)\frac{6}{7}+(n-1)\right]=n,$$

$$m\left(\frac{6}{7}\right)^{n-1}-\frac{7}{6}\left[\left(\frac{6}{7}\right)^{n}+2\cdot\left(\frac{6}{7}\right)^{n-1}+\cdots\right.$$

$$\left.+(n-1)\left(\frac{6}{7}\right)^{2}+n\frac{6}{7}\right]+n=n,$$

或 $$m\left(\frac{6}{7}\right)^{n-1}-\frac{7}{6}\cdot\left(\frac{1}{7}\right)^{-2}\left[\left(\frac{6}{7}\right)^{n+2}\right.$$

$$\left.-(n+1)\left(\frac{6}{7}\right)^{2}+n\cdot\frac{6}{7}\right]=0$$

（利用公式（3））。

从而 $$m\left(\frac{6}{7}\right)^{n-1}-\frac{7}{6}\left[\left(\frac{6}{7}\right)^{n}\cdot 36-36(n+1)\right]-49n=0,$$

$$m\left(\frac{6}{7}\right)^{n-1}-36\cdot\left(\frac{6}{7}\right)^{n-1}+42(n+1)-49n=0,$$

$$(m-36)\left(\frac{6}{7}\right)^{n-1}=7n-42,$$

$$(m-36)\,6^{n-1}=7^{n}(n-6).$$

因7^n为奇数，6^{n-1}为偶数，要上式成立，6^{n-1}必须整除$n-6$，但对任何n都有$6^{n-1}>n-6$。因此只有$m=36$，$n=6$上式才能成立。

答：这次竞赛共包括6轮，一共发了36枚奖章。

例7 平面上n条直线最多能把平面分割成多少部分？

解：显然，若$n=2$，则两条直线不平行时，把平面分割成的份数最多。若$n=3$，则三条直线两两不平行且三线不共点时，所分割成的份数最多。依此类推，若n大于3，则当没有两条直线平行且没有两条以上的直线通过一点时，所分割成的份数最多。现把此份数记作n^*。于是，设平面被n条直线分割成n^*个部分平面，接着又添上一条直线（这条直线当然也要满足上面所说的条件），这条直线与先前的n条直线相交得n个点，而且它就这样横穿过原有的n^*个部分平面中的$n+1$个平面，把它们中的每一个部分平面分成两份，所以第$n+1$条直线使得部分平面的份数增加$n+1$个。因此

$$(n+1)^*=n^*+(n+1).$$

令$n=0，1，2，\cdots\cdots$得

$$1^*=1+1,$$

$$2^*=1^*+2,$$

$$3^*=2^*+3,$$

$$\cdots\cdots$$

$$n^*=(n-1)^*+n.$$

把这些方程相加得

$$n^*=1+(1+2+3+\cdots+n)$$

$$=1+\frac{n(n+1)}{2}=\frac{n^2+n+2}{2}.$$

答：一个平面最多可被n条直线分割成$(n^2+n+2)/2$份。

求三角级数的部分和，通常利用复数的性质进行变换。

例8 求$\sum_{x=0}^{n-1}\cos(x+b)\varphi$。

解： 根据$e^{i\varphi x}=\cos x\varphi+i\sin x\varphi$ （这里$i=\sqrt{-1}$），得

$$\sum_{x=0}^{n-1}e^{i(x+b)\varphi}=e^{ib\varphi}\cdot\frac{e^{in\varphi}-1}{e^{i\varphi}-1}$$

$$=\frac{e^{in\varphi/2}\left(e^{in\varphi/2}-e^{-in\varphi/2}\right)}{e^{i\varphi/2}\left(e^{i\varphi/2}-e^{-i\varphi/2}\right)}e^{ib\varphi}$$

$$=\frac{\sin\frac{1}{2}n\varphi}{\sin\frac{1}{2}\varphi}e^{i\left(b+\frac{n}{2}-\frac{1}{2}\right)\varphi}.$$

因$\cos(x+b)\varphi$是$e^{i(x+b)\varphi}$的实部，所以，

$$\sum_{x=0}^{n-1}\cos(x+b)\varphi=\frac{\sin\frac{1}{2}n\varphi}{\sin\frac{1}{2}\varphi}\cos\frac{1}{2}(n-1+2b)\varphi.$$

这个方法还可以推广到多个变量的情形。

例 9　求$\sum\limits_{x_1=0}^{n_1}\sum\limits_{x_2=0}^{n_2}\sum\limits_{x_3=0}^{n_3}\cos(x_1+x_2+x_3+b)\varphi$。

解： 因$e^{ib\varphi}\left(\sum\limits_{x_1=0}^{n_1}e^{ix_1\varphi}\right)\left(\sum\limits_{x_2=0}^{n_2}e^{ix_2\varphi}\right)\left(\sum\limits_{x_3=0}^{n_3}e^{ix_3\varphi}\right)$

$$=e^{ib\varphi}\left(\frac{\sin\frac{1}{2}n_1\varphi}{\sin\frac{1}{2}\varphi}e^{\frac{1}{2}i\varphi(n_1-1)}\right)$$

$$\left(\frac{\sin\frac{1}{2}n_2\varphi}{\sin\frac{1}{2}\varphi}e^{\frac{i}{2}\varphi(n_2-1)}\right)\left(\frac{\sin\frac{1}{2}n_3\varphi}{\sin\frac{1}{2}\varphi}e^{\frac{b}{2}\varphi(n_3-1)}\right)$$

$$=\frac{\sin\frac{1}{2}n_1\varphi}{\sin\frac{1}{2}\varphi}\ \frac{\sin\frac{1}{2}n_2\varphi}{\sin\frac{1}{2}\varphi}\ \frac{\sin\frac{1}{2}n_3\varphi}{\sin\frac{1}{2}\varphi}$$

$$\cdot e^{\frac{i}{2}(n_1+n_2+n_3-3+2b)},$$

而$S=\sum_{x_1=0}^{n_1}\ \sum_{x_2=0}^{n_2}\ \sum_{x_3=0}^{n_3}\cos(x_1+x_2+x_3+b)\varphi$正好是上式左端的实部，因此

$$S=\cos\frac{1}{2}\left(\sum_{v=1}^{3}n_v-3+2b\right)\varphi\cdot\prod_{v=1}^{3}\frac{\sin\frac{1}{2}n_v\varphi}{\sin\frac{1}{2}\varphi},$$

（其中$\prod_{v=1}^{3}b_v$表示$b_1\cdot b_2\cdot b_3$。记号Π是连乘的意思）。

特别是，若$n_1=n_2=n_3=n$，则

$$\sum_{x_1=0}^{n}\ \sum_{x_2=0}^{n}\ \sum_{x_3=0}^{n}\cos(x_1+x_2+x_3+b)\varphi$$

$$=\cos\frac{1}{2}(3n-3+2b)\varphi\left[\frac{\sin\frac{1}{2}n\varphi}{\sin\frac{1}{2}\varphi}\right]^3.$$

例10 求$\sum_{k=0}^{m}C_{2m+1}^{k}\cos(2m+1-2k)x$。

（C_{2m+1}^{k}是表示组合数的记号）

解：因为 $2^{2m+1}\cos^{2m+1}x=(e^{ix}+e^{-ix})^{2m+1}$

$$=\sum_{k=0}^{2m+1}C_{2m+1}^{k}e^{ix(2m+1-2k)}$$