



信息与计算科学丛书 — 36

不适定问题的 正则化方法及应用

刘继军 著

 科学出版社
www.sciencep.com

信息与计算科学丛书 36

不适定问题的 正则化方法及应用

刘继军 著

科学出版社

北京

内 容 简 介

本书以自封闭的形式系统介绍了线性不适定问题的正则化求解方法,以及在数学物理反问题研究中的一些应用. 主要包括: 不适定问题的基本概念和特点, 研究不适定问题需要的基本数学工具和方法, 求解不适定问题的标准的正则化方法及近年来的新发展, 以及正则化方法在逆时热传导、数值微分、逆散射等领域中的应用. 本书的内容包含了作者和其他学者几年来的有关工作.

本书可作为数学专业、介质成像专业高年级本科生、研究生教材或相关专业科研人员的参考书

图书在版编目(CIP)数据

不适定问题的正则化方法及应用/刘继军著. —北京: 科学出版社, 2005
(信息与计算科学丛书; 36)

ISBN 7-03-015833-4

I. 不… II. 刘… III. 不适定问题-正则化-研究 IV. O175

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 072367 号

责任编辑: 鄢德平 范庆奎 / 责任校对: 鲁 素
责任印制: 钱玉芬 / 封面设计: 王 浩

科 学 出 版 社 出 版

北京东黄城根北街16号

邮政编码: 100717

<http://www.sciencep.com>

双 青 印 刷 厂 印 刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2005年9月第一版 开本: B5(720×1000)

2005年9月第一次印刷 印张: 13 3/4

印数: 1—3 000 字数: 252 000

定价: 28.00 元

(如有印装质量问题, 我社负责调换〈环伟〉)

《信息与计算科学丛书》序

20 世纪 70 年代末, 由已故著名数学家冯康先生任主编、科学出版社出版了一套《计算方法丛书》, 至今已逾 30 多册. 这套丛书以介绍计算数学的前沿方向和科研成果为主旨, 学术水平高、社会影响大, 对计算数学的发展、学术交流及人才培养起到了重要的作用.

1998 年教育部进行学科调整, 将计算数学及其应用软件、信息科学、运筹控制等专业合并, 定名为“信息与计算科学专业”. 为适应新形势下学科发展的需要, 科学出版社将《计算方法丛书》更名为《信息与计算科学丛书》, 组建了新的编委会, 并于 2004 年 9 月在北京召开了第一次会议, 讨论并确定了丛书的宗旨、定位及方向等问题.

新的《信息与计算科学丛书》的宗旨是面向高等学校信息与计算科学专业的高年级学生、研究生以及从事这一行业的科技工作者, 针对当前的学科前沿、介绍国内外优秀的科研成果. 强调科学性、系统性及学科交叉性, 体现新的研究方向. 内容力求深入浅出, 简明扼要.

原《计算方法丛书》的编委和编辑人员以及多位数学家曾为丛书的出版做了大量工作, 在学术界赢得了很好的声誉, 在此表示衷心的感谢. 我们诚挚地希望大家一如既往地关心和支持新丛书的出版, 以期为信息与计算科学在新世纪的发展起到积极的推动作用.

石钟慈

2005 年 7 月

《信息与计算科学丛书》编委会

(按姓氏拼音为序)

主 编：石钟慈

副主编：王兴华 余德浩

编 委：白峰杉 白中治 陈发来 陈志明 陈仲英
程 晋 鄂维南 郭本瑜 何炳生 侯一钊
舒其望 宋永忠 汤 涛 吴 微 徐宗本
许进超 羊丹平 张平文

前 言

数学物理反问题是一个新兴的研究领域. 有别于传统的数学物理方程的定解问题(通常称为正问题, 它由给定的数理方程和相应的定解条件来求定解问题的解), 反问题研究由解的部分已知信息来求定解问题中的某些未知量, 如微分方程中的系数、定解问题的区域或者是某些定解条件. 用系统论的语言来讲, 正问题对应于给定系统在已知输入条件下求输出结果的问题, 这些输出结果当然包含了系统的某些信息. 而反问题则是由输出结果的部分信息来反求系统的某些结构特征. 因此反问题在医学成像、无损探伤、气象预报等领域都有着广泛的应用, 它对应于由介质外部可测量的间接信息来确定介质内部结构的问题. 反问题的一个典型应用是医学诊断的 CT 成像, 它根据 X 射线的投影来探测人体的内部结构. 工程师 Cormack 用 X 射线沿不同角度照射人体, 再由接收的穿透人体的射线信息来决定人体内器官的位置和形态, 这就是人体的三维成像. 该项技术现在已发展到了核磁共振成像(MRI).

与正问题相比, 数学物理反问题的发展历史相对较短, 一直到 20 世纪 60 年代的中期, 才成为一个真正的研究领域, 引起数学家和应用科学家的广泛重视和深入研究. 这种现象的原因来源于反问题大都具有不适定性的特点, 该特点也是反问题研究的难点所在. 一个问题如果其解存在、唯一并且连续依赖于输入数据, 就称该问题是适定的(well-posed), 否则称为不适定的(ill-posed). 自从著名数学家 Hadamard 在 1923 年引进“问题适定性”的概念并提出“只有适定的问题才是有物理意义的”这一断言以来, 人们在很长时间内一直以为研究不适定的问题是没有实际意义的, 至多是一种学术上的兴趣. 相应的关于数学物理反问题的研究也很少. 但是随着科学技术的发展, 实际的应用领域渐渐提出了很多必须解决的不适定的问题, 逐渐扭转了这种偏见. 例如地质勘探部门在重力异常探矿中提出的地下波场的解析延拓问题, 无线电工程上由有限频率区域上的频域信号确定时域信号的问题, 雷达成像中由反射波信号确定散射体几何形状的问题, 中长期数值天气预报的问题等, 都是典型的不适定问题. 基于实际应用问题的推动, 以 20 世纪 60 年代中期苏联科学院院士吉洪诺夫(A.N.Tikhonov)提出的处理不适定问题的正

正则化方法(regularization method)为标志, 不适定问题和反问题的研究进入了新的阶段. 正则化方法的基本思想是利用具体问题的某些附加信息对不适定问题解的概念重新定义, 进而引进镇定泛函来给出一个逼近原问题解的稳定的方法. 数学物理反问题作为一个典型的不适定问题, 在此基础上也得到了新的发展, 正则化方法成为处理数学物理反问题的一个有力工具. 为了求解各种类型的数学物理反问题, 必须掌握微分方程解的定性理论、非线性分析和正则化方法的基本思想. 从数值求解的角度而言, 还必须掌握微(积)分方程数值解、逼近论、非线性优化、程序设计等数值方法和技术. 因此可以说, 数学物理反问题是横跨应用数学和计算数学两个学科的一个新的研究领域, 无论是对数学学科本身的发展, 还是对高等学校人才的培养, 都是一门很重要的课程. 由于数学物理反问题的上述重要性, 我国已故数学家冯康院士早在 20 世纪 80 年代就提出要开展反问题的解法研究. 目前国内很多高校如北京大学、复旦大学、吉林大学、上海大学以及东南大学等也都从不同的角度、不同的层次开设了相关的课程. 国家自然科学基金委员会也在 2003 年、2004 年连续两年把数学物理反问题作为重点项目的选题之一, 鼓励开展对该问题的深入的基础研究. 但是对于这样一门比较重要的课程, 由于发展历史较短, 知识面覆盖范围较广, 国内尚无相关的基础理论专著, 尤其是适合研究生培养的教材. 目前国内高校开设这门课程时, 或是直接采用国外原版专著, 或是结合具体问题写出专门的讲义. 前者通常是作者在某个方向的非常深入的研究成果, 后者也往往是侧重于一类具体问题的专门研究, 它们都缺乏对数学物理反问题的系统的介绍和相关数学基础(如正则化理论、逼近论)的阐述, 作为人才培养的教材是不合适的, 难度较大.

基于上述原因, 本书试图以自封闭的形式来介绍求解数学物理反问题的一些基本理论和方法, 尤其是正则化方法的若干理论. 本书限于对线性不适定问题的正则化方法的介绍. 为了使读者能比较容易地理解正则化方法和反问题的研究方法, 我们用如下的形式来组织本书. 首先我们引进反问题和不适定问题的基本概念, 并通过一些具体的例子使读者对不适定问题的特点有一个大体的了解. 进而我们将所需要的泛函分析、逼近论、积分方程理论、势函数理论、算子谱理论等基本知识单列为第 2 章作为预备知识, 不加证明但指出所需的参考文献. 该章的内容对读者(尤其是研究生)掌握正则化方法的基本思想和基本技巧是必需的. 在下面两章里, 我们详细介绍了正则化方法处理线性不适定问题的思想和方法, 分为连续性的正则化方法和离散化的正则化方法. 除了介绍标准的正则化方法如相

容性原理、最小模解和奇异值分解等概念外, 还包括了正则化方法在近年来的发展, 如条件稳定性在正则化参数选取中的应用、局部正则化等. 在本书最后一章, 我们以前面两章的正则化方法为工具, 介绍一些典型的数学物理反问题和不适应问题的求解方法, 如逆向热传导问题、散射场重建问题、数值微分等. 这一章包含了作者近几年的工作和其他学者的有关工作. 通过这一章的介绍, 希望读者能够了解一般的正则化方法在求解具体反问题中的灵活应用, 例如如何选择合适的正则化参数等. 另一方面, 我们也希望能使读者对数学物理反问题的有关现状有一个大体的了解, 并为有志于从事该领域研究的读者提供一些相关的材料.

本书的主要部分源于作者在东南大学为研究生授课的讲义及本人的有关研究工作, 部分内容取材于文献[47]. 作者 2003 年在美国密歇根州立大学访问期间又为书稿补充了一些新的研究材料. 东南大学数学系的领导和同事对本书的完成给予了很大的帮助和支持, 谨此致谢. 这里还要特别感谢我的研究生导师王元明教授, 感谢他十多年来对我在反问题研究上的悉心指导和大力支持. 同时我还要感谢复旦大学数学系的程晋教授, 多年来我们在反问题研究中的讨论和合作对本书的最终完成起到了重要的作用. 我的研究生倪明、李徽、陈群、袁敏等也对讲稿的组织提出了有益的建议. 本书的研究工作得到了国家自然科学基金项目(No.10371018)和东南大学科技出版基金的资助, 在此一并致谢.

由于不适应问题的求解理论和数学物理反问题的覆盖范围很广, 加之本人学术水平有限, 本书中的缺点和疏漏在所难免, 恳请有关学者和同行不吝指正.

刘继军

2004 年 12 月于东南大学

目 录

《信息与计算科学丛书》序

前言

第 1 章 适定问题和不适定问题	1
1.1 物理问题的描述方法	1
1.2 问题适定性	2
1.3 反问题和不适定问题	2
1.4 反问题和气候数值预报	4
1.5 不适定问题的例子及难点	5
第 2 章 预备理论	12
2.1 赋范空间若干结果	12
2.2 有界算子和紧算子	15
2.3 Riesz 理论和 Fredholm 理论	19
2.4 线性积分算子	23
2.5 紧算子的谱理论	30
第 3 章 线性问题解的正则化方法	37
3.1 一般的正则化理论	37
3.2 允许的 $\alpha = \alpha(\delta)$ 的取法	42
3.3 $q(\alpha, \mu)$ 的取法	44
3.4 Tikhonov 正则化方法	46
3.5 拟解和相容性原理	55
3.6 Landweber 迭代正则化	65
3.7 条件稳定性和正则化参数选取	74
3.8 线性反问题正则化参数的迭代选取	77
3.9 求正则化参数的模型函数方法	83
3.10 两类正则化方法的比较	90
第 4 章 离散化的正则化方法	95
4.1 一般的投影方法	95
4.2 Galerkin 方法	104

4.3 配置方法	110
4.4 投影方法的应用	115
4.4.1 Laplace 方程边值问题的势函数解法	115
4.4.2 Galerkin 方法解 Symm 方程	119
4.4.3 配置方法解 Symm 方程	121
4.4.4 解 Symm 方程的数值实验	126
第 5 章 正则化方法应用	131
5.1 逆时热传导问题	131
5.1.1 逆时热传导问题不适定性	132
5.1.2 逆时问题的正则化方法	135
5.1.3 二维逆时问题数值结果	141
5.1.4 一维逆时问题数值结果	146
5.2 数值微分问题	156
5.2.1 样条插值方法	156
5.2.2 光滑化方法	164
5.2.3 积分算子方法	170
5.3 声波逆散射问题的正则化求解	173
5.3.1 波场的散射问题	173
5.3.2 由远场近似数据求散射波近场正则化方法	176
5.3.3 数值试验	181
5.3.4 求散射场的近似模型函数方法	186
5.4 基本解的 Runge 逼近	193
5.4.1 Helmholtz 方程基本解的 Runge 逼近	194
5.4.2 逼近的数值实现	197
参考文献	200
《信息与计算科学丛书》已出版书目	205

第 1 章 适定问题和不适定问题

在应用数学方法研究具体的自然现象时, 第一步需要给出物理现象的数学描述, 即建立适当的数学模型. 所谓“适当的模型”, 在经典意义下应满足下述三个条件:

- (1) 该模型的解是存在的, 即它确实描述了一类现象;
- (2) 该模型的解是唯一的, 即它描述了确定现象;
- (3) 该模型的解对输入数据是稳定的, 即解对数据的误差应该是连续变化的.

这就是阿达马 (Hadamard) 在 1923 年提出的著名的问题的适定性的概念. 在很长一段时间内人们都认为只有适定的问题才有意义, 才可以用数学方法加以研究. 尤其是第三个要求, 被认为是“适当的模型”的一个必要条件, 因为在实际的物理模型中, 输入数据的测量误差和计算误差总是不可避免的. 如果模型的解不连续依赖于输入数据, 则通常认为这样的模型不是物理问题的正确描述.

但是, 随着技术和应用的发展, 人们也发现, 很多描述自然现象的实际模型由于某些条件的限制不满足上述条件, 这就是所谓的不适定问题. 与不适定问题密切相关的一类问题是反问题, 因为大部分的反问题都是不适定的, 而不适定问题有其自身固有的特点. 本章通过具体的问题引进不适定问题和反问题的概念.

1.1 物理问题的描述方法

原则上讲, 很多应用问题的求解都可以归结为服从一定物理规律的场的确定问题. 用数学物理方法求经典的场分布 (如温度场、波场、应力场等), 就是求满足一定条件下 (初始条件、边界条件、无穷远处的条件) 的偏微分方程 (组) 的解.

具体而言, 偏微分方程 (组)(系统) 描述了场函数在变量空间满足的物理规律, 一定的条件 (输入数据) 则给出了场函数的过去 (初始条件) 和外来影响 (边界、无穷远条件) 对场函数的约束. 由此最终给出了一个确定的物理现象的描述. 这种描述用物理语言、数学语言、控制论语言可分别表示为:

物理问题 = 物理规律 + 一定条件 (初始、边界、无穷远);

定解问题 = 偏微分方程 (组) + 定解条件;

输入 + 系统 = 输出.

注意到同一个物理现象可以用不同的状态变量来描述, 因此, 物理问题的描述模型是求解问题的重要一步, 但未必是决定性的一步. 不同的系统模型, 不同的研究角度和研究方法, 就构成了科学发展中的不同的学科领域和研究方向, 由此推动

着人类自然科学文明的不断发展和进步.

1.2 问题适定性

当针对具体的物理问题建立了相应的数学模型 (定解问题) 之后, 我们首先是要考虑该问题提法的合理性, 或者说, 数学模型的可解性. 然后才能考虑该问题的求解方法.

根据阿达马在 1923 年提出的定义^[32], 同时满足如下三个条件的问题, 称为是适定的:

- (1) 问题的解存在;
- (2) 问题的解唯一;
- (3) 问题的解连续依赖于定解条件 (解稳定).

否则问题称为是不适定的. 很显然, 解的存在性依赖于解的定义和输入数据 (定解条件); 解的唯一性依赖于解空间的大小和输入数据; 而解的连续依赖性取决于解空间的拓扑结构 (解和输入数据的度量).

我们给出问题适定性的严格的数学定义如下.

定义 1.2.1 设 $A: X \rightarrow Y$ 是赋范空间 X 到赋范空间 Y 的一个算子. 方程

$$A\phi = f \quad (1.2.1)$$

称为是适定的, 如果 A 是一一对应的并且逆算子 $A^{-1}: Y \rightarrow X$ 是连续的. 否则称为是不适定的.

不适定问题的典型例子是在无限维空间上解第一类的全连续算子方程. 一个算子如果是连续的紧算子, 就称为是全连续的算子. 由于线性紧算子总是连续的, 故对线性算子、紧性和全连续性是等价的.

1.3 反问题和不适定问题

很难给出反问题的一个明确的定义. 美国斯坦福大学的数学教授 J.B.Keller 在 1976 年提出^[45]: 一对问题称为是互逆的, 如果一个问题构成 (已知数据) 需要另一个问题解的部分信息. 把其中的一个称为正问题 (direct problem), 另一个就称为反问题 (inverse problem). C.W.Groetsch 在文献 [29] 的一开篇就指出, 反问题是很难定义的, 但是几乎每一个数学家都能马上判断出一个问题是正问题还是反问题. 因此反问题的定义似乎有点“只可意会, 不可言传”的味道. 但是另一个数学家 Julia Robinson 的观点更有助于我们理解反问题的定义:

“Usually in mathematics you have an equation and you want to find a solution. Here you were given a solution and you had to find the equation. I liked that.”

当然这里“方程”的意义是广义的. 因此反问题的一个比较适用的数学定义是“由定解问题的解的部分信息去求定解问题中的未知成分”. 这里求出的反问题的“解”也是广义的, 可能是近似解, 也可能是某种意义下的弱解.

• 通常把研究得较多的, 适定性成立的一个问题称为正问题, 反问题大多是不适定的.

• 正问题是线性的, 对应的反问题也可能是非线性的.

• 由于客观条件的限制, 很多具体的应用问题都是不适定的. 不适定问题的本质难点是其解不连续依赖于输入数据.

如果把正问题提为: 由输入 (input) 和过程 (process) 来确定输出 (input), 或者由原因 (cause) 和模型 (model) 来求结果 (effect), 则反问题的任务是由已知的部分结果确定模型或反求原因. 反问题在很多领域是经常出现的. 例如当系统模型的某些参数不能直接测量, 或者直接测量的成本太大时, 利用可测量到的相关的实验数据去推知系统的参数, 就是一个唯一可行的研究方法. 中外民间流传甚广的“瞎子听鼓”的问题就是一个经典的反问题, 盲人试图从听到的鼓发出的声音去推测鼓的形状. 它最早是由丹麦物理学家 Lorentz 在 1910 年的一次讲演中提出的. 该问题的最新解决办法是由 Gordon 等人在 1992 年给出的: 他们构造了两个具有相同音调的同声鼓, 但是形状不同. 因此对“瞎子听鼓”给出了否定的回答. 与反问题密切相关的一个现代的重要的成果是 CT 成像, 该问题源于工程师 A.M. Cormack 试图帮助医生不经手术就能了解人体内有关器官大小和组织结构变异的努力^[106]. 该问题的简化的数学描述如下: 假设在平面上有一个密度不均匀的物体, 用 X 射线 (它是沿直线前进的) 沿不同的方向照射此物体, 再测量出射线沿每个方向由于介质吸收而造成的能量衰减. 由此数据来恢复介质的二维密度图像. 由于该成果重大的理论价值和在医学诊断上的广泛的应用, 它获得了 1979 年的诺贝尔生理学 and 医学奖. 该问题本质上化为一个与 Rudan 变换密切相关的第一类线性积分方程的求解问题, 它的理论基础就是由函数线积分的值来重建函数本身. 关于具体的数学模型, 见文献 [47].

反问题和不适定问题的联系主要表现在绝大部分反问题都是不适定的. 这种不适定性主要表现在两个方面. 一方面, 由于客观条件的限制, 反问题中的输入数据 (即给定的解的部分已知信息) 往往是欠定的或者是过定的, 这就会导致解的不唯一性或者是解的不存在性. 另一方面, 反问题的解对输入数据往往不具有连续依赖性. 由于输入数据中不可避免的测量误差, 人们就必须提出由扰动数据求反问题在一定意义下近似解的稳定的方法. 因此, 从上述意义而言, 反问题和不适定问题是紧密联系在一起.

反问题理论的起源可以追溯到 19 世纪的晚期, 包括地震学中的地震波的运动问题、旋转流体的平衡问题、Sturm-Liouville 反谱问题等. 牛顿依据行星运动满足的

开普勒定律, 确定了运动行星的受力, 可以看成是过去解决的力学系统的反问题之一^[29]. 利用位势理论确定物体的形状、位置和密度的反问题则起源于地球物理中的地质勘探问题. 近代的反问题则包含了利用散射波场的数据确定物体的内部结构, 利用电磁场的测量数据确定生物组织的内部结构等.

1.4 反问题和气候数值预报

气象预报的重要性是不言而喻的, 人们希望通过合适的模型和积累的历史气象资料预报未来尽可能长的时间内的气候走向. 在 20 世纪 50 年代大体能达到 24 小时内的有效数值预报, 在 80 年代提高到 4~5 天, 而在 90 年代则可达到 7~8 天 (中期预报).

月时间尺度的预报 (动力学延伸预报方法)^[15, 56] 已有 20 年的历史, 通过改善中期数值预报模式性能, 延长模式有效积分预测时间, 人们试图实现月时间尺度的有效的数值天气预报.

数值天气预报的工作方法之一就是微分方程初值问题作数值积分. 由于时间空间方向的大尺度和积分数据的不完全性, 人们近年来在这一方面进行了大量的工作^[15, 37, 56], 主要有如下几个方面:

- (1) 大气模式分辨率的提高 (欧洲中心谱模式: T42, T63, T106, T213);
- (2) 模式物理过程描述的深化细化 (间接描写, 部分直接描写, 考虑中小尺度);
- (3) 同化技术 (最优插值, 三维同化, 四维同化);
- (4) 集合预报方法 (Monte Carlo 方法, 时间滞后平均).

上述工作的结果是改善了前 10 天的预报水平, 但是月尺度的预报仍达不到业务化的水平. 大气研究领域的科学家在反复研究了问题的本质困难后, 提出了现有方法的如下可能的缺陷:

- (1) 模式分辨率的过分细化对气候描述帮助不大.
- (2) 对数值误差对气候模式影响的研究不够. 气候数值预报是系统的长期行为, 而现有的数值方法是解初值问题. ①超出可预报时段后, 预报结果对时间和空间步长敏感; ②误差来源难以区分; ③问题本身可能是不适定的.
- (3) 气候数值预报提为初值问题使得资料不足和资料闲置并存. 对初值问题作数值积分只能利用一个有限时段的资料, 该时段的资料由于大气观测点的限制在空间分布上可能不足. 另一方面, 已有的气候观测资料积累了近 50 年, 在时间分布上我们可以有足够多的数据.

基础理论研究的薄弱和对计算条件及计算技术的过度依赖, 造成了气候数值预报效果在较长一段时间内进展缓慢.

基于上述分析和结论, 气象界提出了数值天气预报的如下改进思路:

(1) 气候系统中稳定分量的确定和模拟.

(2) 气候数值模拟和预测的数学理论.

①对偏微分方程组用数值积分的办法求得的数值解, 还应该研究数值解与真解的误差.

②非线性常微分方程初值问题的个别数值解存在不确定性, 只有得到全局收敛的算法, 才适用于气候数值模拟和预测.

③问题的不适定性的处理.

(3) 改变气候模式中某些气候指标 (如海洋环流层) 的描述, 利用求解反问题的数学成果, 提高预测水平. 当数值预报提为演变问题和反问题时, 可利用已有的 50 年的大气演变历史纪录, 而不仅是初始时刻的资料.

综上所述, 对气候数值预报, 应考虑问题的不适定性, 利用已有的气象资料来稳定数值结果, 不能简单地数值积分. 改善气候预报精度的重要工作之一是消除解的不稳定性. 因此, 在有关国计民生的气象预报问题中, 反问题和不适定问题的研究理论和方法是大有用武之地的.

1.5 不适定问题的例子及难点

本节我们给出一些不适定问题的例子, 从理论分析和数值求解结果两个方面来解释不适定问题的特殊性.

例 1.1 Laplace 方程的初值问题 (Hadamard)^[19, 32]

$$\begin{cases} \Delta u(x, y) = \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2} = 0, & (x, y) \in \mathbf{R} \times [0, \infty) \\ u(x, 0) = f(x) = 0, \quad u_y(x, 0) = g(x) = \frac{1}{n} \sin nx, & x \in \mathbf{R}. \end{cases} \quad (1.5.1)$$

该方程的唯一解是

$$u(x, y) = \frac{1}{n^2} \sin nx \sinh(ny), \quad x \in \mathbf{R}, y \geq 0. \quad (1.5.2)$$

虽然

$$\sup_{x \in \mathbf{R}} \{|f(x)| + |g(x)|\} = \frac{1}{n} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty,$$

但是对一切 $y > 0$, 当 $n \rightarrow \infty$ 时,

$$\sup_{x \in \mathbf{R}} |u(x, y)| = \frac{1}{n^2} \sinh(ny) \rightarrow \infty.$$

该问题实际上对应于调和函数的解析延拓问题^[74]. 在 Ω 内满足 Laplace 方程的二次连续可微函数 u , 称为调和函数, 这个函数在 Ω 内也是实解析的. Ω 上的实解析函数 (real analytic function) 的定义为^[23, 43]:

定义 1.5.1 设 $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ 是开集, $u(x) \in C^\infty(\Omega)$ 称为在 Ω 上是解析的 (analytic), 如果它在 Ω 中的任一点都可展开为幂级数. 也就是说, 对任意的 $x \in \Omega$, 存在 $r > 0$ 使得对一切的 $y \in B_r(x)$ 成立

$$u(y) = \sum_{|\alpha| \geq 0} \frac{\partial^\alpha u(x)}{\alpha!} (y-x)^\alpha, \quad \alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n),$$

并且右端的级数在 $B_r(x)$ 上是绝对且一致收敛.

当考虑复变函数中的解析函数时, 称为全纯函数 (holomorphic function), 经常也译为解析函数. 这两种意义下的解析函数的关系如下. 如果 $u(x)$ 在 $x_0 \in \mathbf{R}^n$ 的邻域内有定义并且在该邻域内是实解析的, 就称 $u(x)$ 在 x_0 点是实解析的. 显然在实变量空间 \mathbf{R}^n 中的原点实解析的函数可以通过其幂级数展开, 延拓为在 n 维复变量空间 \mathbf{C}^n 中的原点邻域内的复变量 x 的函数, 此函数在该邻域内具有任意阶的连续导数. 反之, 如果 $u(x)$ 是一个定义于 n 维复变量空间 \mathbf{C}^n 中的原点邻域内的连续函数, 假定在该邻域内其一阶导数存在且连续, 则 $u(x)$ 当变量限制于实变量空间 \mathbf{R}^n 中的原点邻域内时就是实解析的. 事实上, 对多变量的复变函数重复使用单变量复变函数的 Cauchy 积分公式, 我们得到在 \mathbf{R}^n 中的原点附近 $u(x)$ 的积分表达式

$$u(x) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \oint \frac{dz_1}{z_1 - x_1} \oint \frac{dz_2}{z_2 - x_2} \cdots \oint \frac{dz_n}{z_n - x_n} u(z_1, \dots, z_n),$$

其中的积分路径是复平面 \mathbf{C}^1 (单复变量空间) 中以原点为心的小圆周. 展开被积函数, 立即可见对充分小的 $|x_k|$, $u(x)$ 可以表示为收敛的幂级数.

实解析函数的最显著的性质就是其唯一延拓性质 (unique continuation): 如果 $u(x)$ 在一个连通开集 $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ 是实解析的, 则 $u(x)$ 在 Ω 中一点的一个任意小的邻域内的值就完全唯一确定了 $u(x)$ 在整个 Ω 上的值.

在 \mathbf{R}^3 中解析函数的延拓问题如下:

给定 \mathbf{R}^3 中两个具有共同边界 Γ 的区域 Ω_1 和 Ω_2 , 假定已知解析函数 u 在 Ω_1 内和 Γ 上的值, 而且 u 在 Ω_2 内也是解析的, 要求在 Ω_2 内确定 u .

利用 Green 公式, 可以证明调和函数的下述 P.Duhem 定理 [74, 107]:

定理 1.5.2 设 u_1 和 u_2 分别在曲面 S 两侧调和, 且连同其法微商在 S 上连续. 若 u_1 和 u_2 及其法微商在 S 上分别相等, 则 u_1 和 u_2 互为解析延拓, 且在 S 两侧定义同一调和函数, 这个函数在 S 上就是解析函数.

根据该定理, 立刻可推出调和函数的下述延拓性质: 对某一区域内的调和函数, 若在区域内某一点邻域的值已知, 则唯一确定其在整个区域内的值.

例 1.2 第一类积分方程的数值解. 考虑

$$\int_0^1 e^{ts} x(s) ds = y(t) = \frac{e^{t+1} - 1}{t+1}, \quad 0 \leq t \leq 1. \quad (1.5.3)$$

该方程的唯一精确解是 $x(t) = e^t$. 对该问题求数值解时, 取步长 $h = \frac{1}{n}$, 用复合梯形公式

$$\int_0^1 e^{ts} x(s) ds \approx h \left(\frac{1}{2} x(0) + \frac{1}{2} e^t x(1) + \sum_{j=1}^{n-1} e^{jht} x(jh) \right)$$

近似左端积分项. 对不同的区间等分数 n , 最后由线性代数方程组

$$h \left(\frac{1}{2} x_0 + \frac{1}{2} e^{ih} x_n + \sum_{j=1}^{n-1} e^{jih^2} x_j \right) = y(ih), \quad i = 0, 1, \dots, n \quad (1.5.4)$$

求 $x(jh)$ 的近似值 x_j . 下表表示数值解和真解在点 $t = jh$ 的误差 $x(jh) - x_j$.

t	$n = 4$	$n = 8$	$n = 16$	$n = 32$
0	0.44	-3.08	1.08	-38.21
0.25	-0.67	-38.16	-25.17	50.91
0.5	0.95	-75.44	31.24	-116.45
0.75	-1.02	-22.15	20.03	103.45
1	1.09	-0.16	-4.23	-126.87

这显然是一个无意义的数值结果^[104]: 随着左端积分项计算精度的不断提高, 方程解的误差反而越来越大.

产生此现象的原因是该问题本质上是一个第一类 Fredholm 积分方程的求解, 它是一个不适定的问题. 对第一类 Volterra 积分方程, 求解同样是不适定的. 关于此类问题, 不能直接用数值积分的方法来求解, 必须引进正则化的解法, 具体研究见文献 [52].

这类问题求解的特殊性很早也引起了物理学家的注意. 早在 1962 年, 美国物理学家 D.L.Philips 就考虑了由积分方程

$$\int_{-6}^6 \left(1 + \cos \frac{\pi(x-y)}{3} \right) f(x) dx = (6+y) \left(1 - \frac{1}{2} \cos \frac{\pi y}{3} \right) - \frac{9}{2\pi} \sin \frac{\pi y}{3}, \quad |y| \leq 6$$

求解 $f(x)$ 的问题. 通过直接离散积分项再求解在节点处对应的线性代数方程组的办法, 得到的数值结果同样随着离散节点数目的增加而越来越坏^[55].

例 1.3 由信号的离散谱求原信号.

记周期为 π 的信号 $f(t)$ 的离散谱 (Fourier 级数的系数) 为 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, 把信号表示为

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nt. \quad (1.5.5)$$

正问题是由已知信号 $f(t)$ 求谱值 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$:

$$a_n = \int_0^{\pi} f(t) \cos ntdt, \quad n = 1, 2, \dots \quad (1.5.6)$$