丘成桐主编

数学翻译丛书

# 微积分教程

## ——计算机代数方法（第二版）

# Calculus: A Computer Algebra Approach (Second Edition)


I. Anshel　D. Goldfeld

许明 译



高等教育出版社
Higher Education Press

图字: 01-2005-3460

ORIGINAL ENGLISH LANGUAGE EDITION PUBLISHED BY
International Press Incorporated, Boston
P. O. Box 2872
Cambridge, MA 02238-2872


图书在版编目 (CIP) 数据

微积分教程: 计算机代数方法: 第2版 / (美) 安申尔 (Anshel, I.), (美) 哥德费尔德 (Goldfeld, D.) 许明译. —北京: 高等教育出版社, 2005.7
(数学翻译丛书 / 丘成桐主编)
书名原文: Calculus——A Computer Algebra Approach
ISBN 7-04-017388-3

I.微... II.①安...②哥...③许... III.微积分-高等学校-教学参考资料 IV.0172

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2005) 第 061241 号



| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| **策划编辑** | 张小萍 | **责任编辑** | 赵天夫 | **封面设计** | 王凌波 |
| **版式设计** | 杨　明 | **责任印制** | 韩　刚 | | |

| | | | |
|---|---|---|---|
| **出版发行** | 高等教育出版社 | **购书热线** | 010-58581118 |
| **社　　址** | 北京市西城区德外大街4号 | **免费咨询** | 800-810-0598 |
| **邮政编码** | 100011 | **网　　址** | http://www.hep.edu.cn |
| **总　　机** | 010-58581000 | | http://www.hep.com.cn |
| **经　　销** | 北京蓝色畅想图书发行有限公司 | **网上订购** | http://www.landraco.com |
| **印　　刷** | 北京原创阳光印业有限公司 | | http://www.landraco.com.cn |
| **开　　本** | 787×960　1/16 | **版　　次** | 2005年7月第1版 |
| **印　　张** | 32.5 | **印　　次** | 2005年7月第1次印刷 |
| **字　　数** | 560 000 | **定　　价** | 45.00元 |


**物 料 号　17388-00**

# 《数学翻译丛书》序

改革开放以后,国内大学逐渐与国外的大学增加交流.无论到国外留学或邀请外地学者到中国访问的学者每年都有增长,对中国的科学现代化都大有帮助.但是在翻译外国文献方面的工作尚不能算多.基本上所有中国的教科书都还是由本国教授撰写,有些已经比较陈旧,追不上时代了.很多国家,例如俄罗斯、日本等,都大量翻译外文书本来增长本国国民的阅读内容,对数学的研究都大有裨益.高等教育出版社和海外的国际出版社有见及此,开始计划做有系统的翻译,由王元院士领导,北京的晨兴数学中心和杭州的浙江大学数学科学研究中心共同组织数学教授进行这个工作.参与的教授很多,有杨乐院士,刘克峰教授等等.我们希望这套翻译书能够使我们的大学生有更多的角度来看数学,丰富他们的知识.海外的出版公司如美国数学学会等多有帮助,我们谨此鸣谢.

丘成桐 (Shing-Tung Yau)

2005 年 1 月

# 致　谢

作者感谢哥伦比亚大学数学系的 Hervé Jacquet 教授，他为我们在哥伦比亚大学启动的微积分改革提供了催生的思想，他还提出了许多优美而简洁的证明. Hervé Jacquet, Duong H. Phong, Ramuald Dabrowsky, Patrick X. Gallagher 和 Cormac O'Sullivan 各位教授们，在本书稿的准备期间提供了不可或缺的编写方面的帮助；我们还要感谢国际出版社，它让学生们能以极低的价格得到这本教科书. 每章末尾所附加的习题是由 Maia Berkane 和 Kevin Oden 撰写的，作者对他们的全部工作表示感谢和赞赏. 我们对哥伦比亚大学工程学部的 Morton Friedman 教授表达深切的谢意，是他建立了一个计算机实验室，让我们能按此教材进行了一门试验性的课程. 作为入门项目(The Gateway Project)的主持人，他始终不渝的支持和鼓励是极其珍贵的——没有他的努力，这个项目仍旧是纸上谈兵. 最后，我们要感谢入门项目的财政支持.

# 目　录

# 引　言

微积分教学的发展正处于关键时刻. 人们强调微积分学的计算方面和它的方法的各种应用已经有一段时间了. 正是极为明白易懂的计算机代数系统(Computer Algebra System,缩写为 CAS) 和各种高级计算器的出现,促使我们对如何表现和描述微积分学重新做出评估. 使用本书并不要求有一间计算机室,甚至也不要求有一套精心制作的 CAS. 由于重点不在于大规模的计算和编制程序而是对基本概念的理解,有一部具有图像功能的计算器就够了.

一套 CAS 是指一个具有下述功能的计算装置:

(1) 它是个计算器,即它能做算术运算,并能计算标准函数的函数值,(2) 它具有二维图像功能,即它能显示单变元函数的图形,(3) 它能做微积分,即能够计算函数的导数和积分,(4) 它能做代数运算,即能够展开和简化代数表达式,(5) 它能构建函数,(6) 它具有三维图像功能,即它能显示多变元函数的图形.

CAS 的巨大功能驱使我们提出如下问题:(1) 既然这种计算机制已经是自动化的了,那么,我们应该对此学科采取什么态度,以及(2) 我们如何能将 CAS 同经典的教学方法结合起来?

作者认为,新技术是一种机会. 没有人会考虑不在实验室工作情况下去学习例如物理学或生物学;而不通过 CAS 进行计算的人也是极少的. 微积分既是知识的重大突破也是(在各种领域中) 研究和开发的强大工具. 要有如此的理解(并将其应用为现代环境下的解决问题的工具),人们必须同时从抽象形式上

和范围广泛的例子中理解根本性的概念. 我们的宗旨是集中注意于最重要的定义和定理的含意,并且用它们在 CAS 上进行实验.

应该注意到,本书不是教某个具体的 CAS 该"如何做" 的手册. 我们的目的是教授微积分的概念而又不至于迷失在编制程序的泥沼中. 差不多所有的习题和例题都可以把 CAS 当作计算器来做. 除此而外,即使最先进的 CAS 也只有几个指令需要学习.

许多学生在进大学时已熟悉了初等微积分. 考虑到此点,我们决定快速地复习一下基础内容(如实数,函数和它们的图像,直线和圆). 虽然初等内容也占了少量的篇幅,但对读者没有提什么要求(就是说,本书实质上是独立自足的). 当内容不甚熟悉和更为复杂时这些章节则越重要. 在本书中我们自始至终都专注于那些作为首要原理提出来的核心概念. 一旦引进了一个概念. 我们便利用 CAS 在许多不同背景下迅速加以检验. 这个方法鼓励学生们逐渐获得对微积分的亲身实践的经验. 我们发现,这样的 CAS 经验较之于阅读一本书中现成的数百个例题更好. 在 1993—1994 年,当在哥伦比亚大学建立了一个实验性的计算机室(连同基于本书的一门课程)时,这个方法好处的证据便明白无误了.

作者希望本书在直观上是严谨的,并指明了如何思考数学. 记住大量的公式和算法(CAS 知道所有这一切)不是本书的目的. 这种教学观念的一个自然结果是把解决问题以分析的方式表现出来,当有可能并恰当时,也以算法的方式表现出来. 始终强调的是:如何推导出公式,为什么这种算法可行,以及 CAS 如何能解决微积分问题.

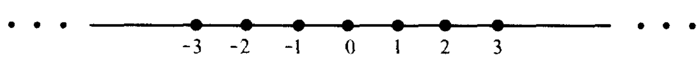
本书的这一版一开始便同时讲了单变量函数的微分和积分计算,数学建模和最优化,基本的常微分方程,而后转向了向量值函数和多变量函数的微分计算. 在向量几何、坐标系和使用 CAS 的二维和三维图像的显示上花了许多时间. 书的较后部分包括了多重积分、向量场和曲线积分、曲面积分的斯托克斯定理、微分形式的概述,同样还介绍了傅里叶级数,其中包括了傅里叶展开定理的一个证明.

本书假定学生们有机会使用一个具有上述(1),(2) 和(3) 功能的基本的 CAS. 许多习题中的大部分可以用手算或者用基本的 CAS 解决.

# 第零章　微积分是什么?

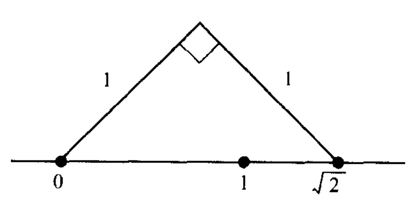
## 0.1　实数

整数$\{\cdots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \cdots\}$可形象地被设想为一条直线上按等间隔标出的点.




称所得到的图形为**数直线**. 在我们做出整数的所有可能的比值时,例如$\frac{1}{2}$,$\frac{3}{4}$,$\frac{13}{4}$,我们便得到了被古希腊人称作的**有理数**. 在数直线上标出有理数后,留给我们的是一个看起来更稠密的图形.

现在考虑在数直线上$\sqrt{2}$的几何构造. 在直线上标出$\sqrt{2}$时,自然要问:$\sqrt{2}$是有理的吗?毕达哥拉斯的一个学生希帕索斯(Hippasus)研究了这个问题. 他证明(就像我们将要做的那样)$\sqrt{2}$不是有理的. 这个认



识使他的同事们大为恼怒,以至将他处死!(但是也有其他人以正面的观点看待这个突破,为此而献祭了100头牛.)对$\sqrt{2}$不是有理数的证明是归谬证法的经典例子;证明如下. 假设$\sqrt{2} = \frac{a}{b}$,其中$a$,$b$为整数. 于是$2 = \frac{a^2}{b^2}$,或者

$$a^2 = 2b^2.$$

一般说来,任一整数均可表示为2的一个幂和一个奇数的乘积,例如,如果$a = 40$,则$a = 8 \cdot 5 = 2^3 \cdot 5$. 现在将$a$和$b$表示为这种形式,我们有

$$a = 2^e \cdot a_0, \quad b = 2^f \cdot b_0,$$

其中$a_0$和$b_0$都是奇数. 现将这些表达式代入公式$a^2 = 2b^2$中,给出了

$$2^{2e} \cdot a_0^2 = 2 \cdot 2^{2f} \cdot b_0^2 = 2^{2f+1} \cdot b_0^2.$$

由于$a_0^2$和$b_0^2$两者都是奇数(按定义),这迫使2的幂次必须**相同**,从而推导出$2e = 2f + 1$. 然而$2e$是偶数而$2f + 1$是奇数. 因此,$\sqrt{2}$是有理数的假设让我们得出了矛盾,故其必是错误的.

希腊人称不是有理的数为**无理的**(反映出他们的态度). 当我们把整数,有理数和无理数合并在一起时便得到了微积分所处理的数系,即**实数**,记为$\mathbb{R}$. 每个实数都可用一个无限小数的展开式表示,

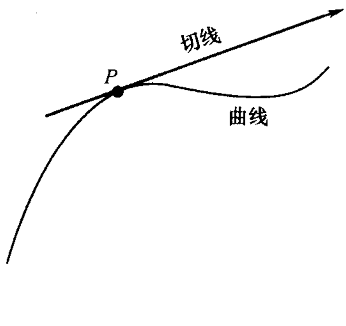
$$\sqrt{2} = 1.414\cdots,$$
$$\pi = 3.14159\cdots.$$

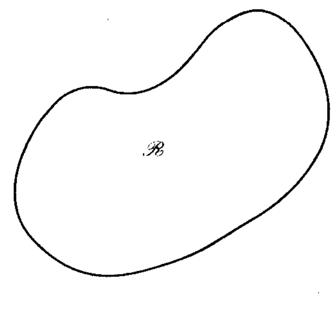
## 0.2 微积分是什么?

微积分是使用一种无限过程来解决有限性问题的数学方法. 这个理论所研究的两个基本问题是:

**问题1(切线问题)** 我们如何求出一条曲线在一点$P$的切线?

**问题2(面积问题)** 如果一条曲线围成了一个区域$\mathscr{R}$,我们如何计算$\mathscr{R}$的面积?



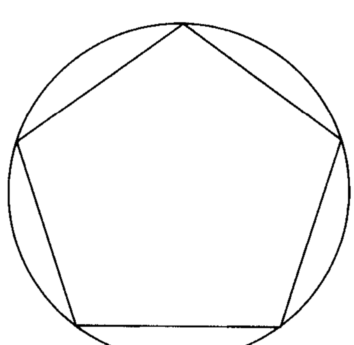
在现代环境中,这些问题会自然地发生.例如,设想曲线为一架进行偷袭的轰炸机的轨迹.如果发射一枚导弹,它将沿着此曲线切线的路径运行,这使得人们要准确地计算出曲线的切线方程.再考虑海洋上的油泄漏问题.如果我们知道海流和风的条件,我们便能得到这个泄漏的边界曲线的近似情形,而后应用微积分便能算出油污所覆盖区域的面积.

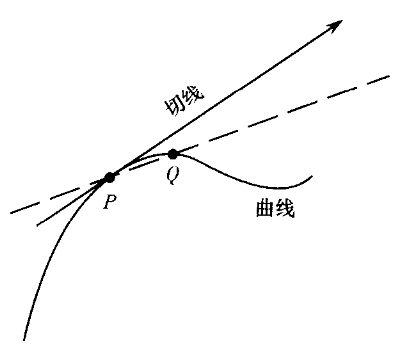
依萨克·牛顿爵士(同时还有莱布尼茨独立地)发展出微分学和积分学来分别地解决问题 1 和 2.初看起来,上述两个问题似乎没有什么关联.非常令人注目的是,这两个问题的解是互逆的.为了得到一条曲线在一点切线的斜率,微分运算提供了有顺序的一系列步骤,而对区域$\mathscr{R}$的面积的计算则由相同的系列步骤进行,但顺序相反.在正式把它陈述出来时,我们便得到了微积分的基本定理.此定理的严格推导将在正文中给出,它是本书第 I 部分的中心目标.

微积分是建立在极限这个关键概念上的(它最终让我们以聚合的方式来描述实数).像$\sqrt{2}$或$\pi$这样的一个无理数不能用有限项来描述,但可以定义为有理数的一个序列的极限.数

$$1,\quad 1.4,\quad 1.41,\quad 1.414,\quad \cdots \longrightarrow \sqrt{2}$$
$$3,\quad 3.1,\quad 3.14,\quad 3.141,\quad 3.1415,\quad \cdots \longrightarrow \pi$$

应该被想成是趋向极限$\sqrt{2}$和$\pi$的序列.这种思想在关于面积问题的希腊数学中就已出现.在一个圆内利用一系列的内接多边形(其边数逐渐增多),阿基米德构造了序列,其项越来越好地逼近了此圆的面积,并趋向于作为极限的圆的准确面积.类似地,最终提供给问题 1 解的基本思想也是由极限给出的.在 $P$ 点附近选取一点 $Q$,经过 $P$ 和 $Q$ 的虚线当 $Q$ 趋向 $P$ 时,越来越靠近在 $P$ 点的切线.牛顿的重大成就在于抽象地分析了 $Q$ 趋向于 $P$ 时的极限.这是微分学的精华所在.





上面描述的是一个无限的过程. 利用无限过程去分析一个有限的(甚至离散的)问题的观念事实上是革命性的,而且它扩散到了整个科学,工程学,经济学,生物学等等. 不应该把这个成就所产生的影响只看成是技术性的. 应该始终记住这种思想方式已经产生了社会的和文化的成果,工业革命便是突出的例证.

# 第一章　函数及其图像

## 1.1　函数

学习数学的一个至关重要的概念是集合(各种对象的一个聚合)间的函数的观念. 因此我们从下面的定义开始.

**定义**　*已知两个集合$A$,$B$;从$A$到$B$的一个**函数**是一个规则,它对集合$A$中每个元素指定了集合$B$中一个唯一的元素.*

函数无处不在. 例如,如果$A$是某杂货店里蔬菜的集合,而$B$是价格的集合,于是我们有一个众所周知的函数(价格函数). 这个特定的函数的规则是由店主依最大利润原则决定的. 注意,价格是唯一的. 一把胡萝卜不能同时被定价为90分和80分,只有唯一的一个价格. 这就是为什么这个一般性定义要求其规则对$A$的每个元素只指定$B$的一个唯一的元素.

上面所给出的函数的一般性数学定义特别适合于计算机. 在区分集合$A$和$B$以及它们之间的规则时,我们不得不以计算机语言进行思考. 一般需要用记号命名一个函数和描述其规则. 通常用一个字母,如像$F$(意为 Function) 来代表函数. 如果$x$在集合$A$中,记以$x \in A$,则$F(x)$将表示由此函数规则所决定的集合$B$中的那个唯一的元素. 我们形象化地表示一个函数如下:

$$F: A \longrightarrow B,$$