Guide

· 根据二期课改教材修订 ·

重点中学
高中数学导读

主　编　王祥麟
副主编　孙永铉　徐浩颖

shuxue

第四版

导读丛书 15 年

著名品牌　畅销

上海科学技术文献出版社

Guide

· 根据二期课改教材修订 ·

重点中学
高中数学导读

·第四版·

主　编　王祥麟
副主编　孙永铉　徐浩颖

上海科学技术文献出版社

图书在版编目（CIP）数据

重点中学高中数学导读／王祥麟主编．—4版．—上海：上海科学技术文献出版社，2005.11
ISBN 7-5439-2704-7

Ⅰ.重...　Ⅱ.王...　Ⅲ.数学课-高中-教学参考资料　Ⅳ.G634.603

中国版本图书馆CIP数据核字（2005）第106209号

责任编辑：张秉芬
封面设计：王　慧

重点中学高中数学导读

（第四版）

主编　王祥麟　副主编　孙永铉　徐浩颖

*

上海科学技术文献出版社出版发行
（上海市武康路2号　邮政编码200031）
全国新华书店经销
常熟市文化印刷有限公司印刷

*

开本787×1092　1/16　印张24　字数614 000
2005年11月第1版　2005年11月第1次印刷
印数：1-5 300
ISBN 7-5439-2704-7/O·166
定价：28.00元
http://www.sstlp.com

出版说明

导读丛书包括高中数学、语文、英语、物理、化学和初中数学、语文、英语、物理、化学等10种，自1990年5月出版以来，先后修订再版了3次，重印10多次，每一种累计印数达数十万册，深受上海市和其他省市广大读者的欢迎。

本丛书在原有基础上，根据教育部《基础教育课程改革纲要(试行)》和《上海市普通中小学课程方案》，结合现行二期课改中学(试行本)的内容修订而成。作者基本上是原导读丛书的作者，均是上海市重点中学的特级教师和资深教师，具有丰富的教学经验。本丛书保持了原有的风格，针对新课本的重点、难点和学生在学习过程中容易产生的错误进行修订，是一套最新的中学生学习指导和复习提高的参考书。

导读丛书在内容上兼顾上海市和其他省市的教改要求，所以不仅适用于上海市中学生，也适用于全国各地的中学生。

上海科学技术文献出版社

2005年9月

前 言

《重点中学高中数学导读(第四版)》,是按照教育部《基础教育课程改革纲要(试行)》和《上海市普通中小学课程方案》,结合现行二期课改高中数学课本(试行本),凭借编者数十年教学经验,并充分考虑当前高中学生水平编写而成的一本数学学习指导和复习提高的参考书。

本书自1990年5月初版以来,先后已再版3次,重印20次,累计印数达数十万册,深受上海市和全国广大读者欢迎。

随着二期课改的不断深入,为更好地配合当前二期课改教学实际,以培养学生的创新精神和实践能力为重点,在保持原书特色、风格的基础上,删减了原书的部分内容,增加了新的内容,如空间向量及其应用、矩阵与行列式等。为了满足全国广大读者的需要,还增加了函数极限和导数、定积分及其应用等内容。对练习题作了不同程度的调整、充实,更新了不少内容,以便更好地满足广大中学生的需要。

导读(第四版)共分四篇。第1篇为代数与初等函数;第2篇为向量初步、立体几何和解析几何;第3篇为排列组合、二项式定理和概率、统计初步;第4篇为极限和导数、定积分及其应用。

每篇按教学内容介绍:一、内容提要,列举要点。二、重点、难点剖析,对重点、难点、关键之处作了精辟的分析,帮助读者切实掌握教材内容。三、思路与技能,对解题通法、解题技能技巧和各种数学思想方法作详尽的介绍。四、拓展与提高,引导读者拓宽知识层面,提高读者自主学习的能力。配备的练习题及其解答,供读者练习和自检。

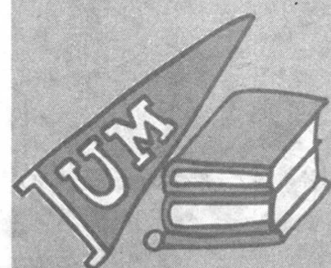
参加本书编写的还有:张美均,倪丽辉,周中平,刘金钟,姚志勇,赵磊等。限于编者水平,难免有缺点与不足之处,敬请广大读者批评和指正。

愿本书能成为广大高中学生和数学爱好者的良师益友!

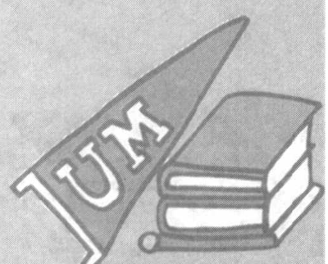
编 者

2005年8月

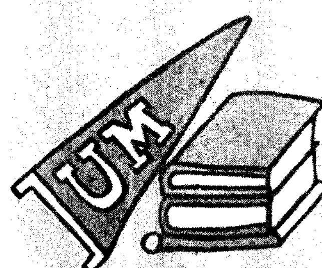
目录



目录



目录



目录

第1篇　代数与初等函数

1.1　集合与命题；充分条件与必要条件；幂函数、指数函数和对数函数；☆逻辑初步；抽屉原则与平均数原则

内容提要

集合、子集、交集、并集、补集和全集；命题、命题的四种形式及其相互关系；充分条件、必要条件；函数的一般概念及其性质；幂函数、指数函数和对数函数、指数方程和对数方程。

拓展与提高：☆逻辑初步；抽屉原则与平均数原则。

重点、难点剖析

集合是近代数学最基本的概念之一，很多重要的数学分支如近世代数、实变函数、概率统计和拓扑学等都建立在集合论的基础上。随着科学技术的迅速发展，"集合"这一术语在科技、科普读物中也经常出现，因此，中学阶段学习一些集合初步知识显得十分必要。它既可为今后学习近代数学提供有利条件，同时也有利于中学数学的学习。因此集合及其有关概念和它们相互之间的区别与联系是本单元的重点。然而由于集合概念逻辑性强，符号又较多，所以初学时较难理解和掌握，故它又是一个难点。

命题和推出关系是今后学习论证题的基础，命题的四种形式之间的相互关系又是间接法证明的逻辑基础。因此在学习时必须加以重视。

充分条件与必要条件是两个重要的数学术语，如何正确理解和判断是学习的重点和难点。

此外，应该认识到函数概念是中学数学中的一个重要内容，幂函数、指数函数和对数函数等知识都是本单元的学习重点。

（一）集合

1. 集合是数学中的一个原始概念，不能用其他更基本的概念来定义它，故又称为不定义概念，对它只能作描述性的说明。集合中的对象叫做集合里的元素，元素可以是任何事物。

2. 构成一个集合必须具备以下三个特征：

(1) 确定性　集合中的任何一个对象，可以通过某种法则来判定它属于或不属于这个集合，二者必居其一。

☆　凡有此标记均为拓展内容。

例如“相当小的数的全体”、“模范中学高一(1)班身高比较高的男学生”、“好看的花布”等它们都不能构成集合，因为“相当小”、“较高”、“好看”这些标准都很模糊，不具有确定性。而“大于5的数的全体”、“模范中学高一(1)班身高不低于165 cm的男学生”等都是集合。

(2) 互异性　在同一个集合里，不能重复出现相同的元素。例如：$\{a, b, c, c, d\}$的写法是错误的，应该是：$\{a, b, c, d\}$。

(3) 无序性　在同一集合里，不考虑元素之间顺序。例如：$\{a, b, c\}$与$\{b, c, a\}$，$\{c, a, b\}$都表示同一集合。

3. 集合的表示方法

(1) 描述法　给出集合中元素的代表符号，用数学语言对集合中的元素的特性加以说明的方法。例如集合$A=\{x|1<x<2\}$这里竖线前面的x叫做代表元素，后面部分$1<x<2$是描述代表元素具有的特性。

(2) 列举法　把集合中的元素一一列出的方法。例如：我国古代四大发明所构成的集合，可表示为：{指南针、火药、造纸、活字印刷}；又如集合$M=\{-5, -2, 0, 1\}$。

上述两种表示方法，列举法能比较具体看清集合中的元素，而描述法能看清元素的特性，采用哪一种方法要由具体问题而定。但这样说，并不是说任何一个集合都可以同时用上述两种方法表示，例如上述集合A就不能用列举法表示，集合M也不宜用描述法，如$\{x|x=-5, x=-2, x=0, x=-1\}$来表示。

4. 空集

空集是一个数学概念，不是一个实体，它是为了方便而引入的，对它需注意：

(1) 空集是一个不含任何元素的集合，记作$\varnothing$。例如求方程$x^2+1=0$的实数根，显然方程无解，此时它的解用集合来表示就可以记作为$x\in\varnothing$。又如两平行直线的公共交点的集合是$\varnothing$。

(2) 空集$\varnothing$与单元集合$\{0\}$的区别。空集不包含任何元素，$\{0\}$表示集合中有一个元素零，两者完全不同。例如方程$x(x^2+1)=0$的实数解用集合表示就是$\{x \mid x=0\}$，即$x\in\{0\}$。

(3) $\varnothing$与$\{\varnothing\}$的不同，$\varnothing$是空集，$\{\varnothing\}$表示用空集$\varnothing$作元素组成的集合，所以$\varnothing\in\{\varnothing\}$。由此可见，集合中的元素也可以集合形式出现。例如集合$\{1, 2, \{3, 5\}\}$它的元素是1，2和$\{3, 5\}$。

5. 子集、真子集

(1) 定义　两个集合A，B，如果A的任何一个元素是B的元素，那么A叫做B的子集。记作$A\subseteq B$(读作A包含于B)或$B\supseteq A$(读作B包含A)。

这里$A\subseteq B$包含了两种可能，$A=B$或$A\subset B$，且二者只居其一。

两个集合A，B，如果A的任何一个元素都是B的元素，而B中至少有一个元素不属于A，那么A叫做B的真子集。记作$A\subset B$(读作A真包含于B)，或$B\supset A$(读作B真包含A)。

[例]　写出集合$\{a, b, c\}$的所有子集及真子集。

[解]　子集为$\varnothing$，$\{a\}$，$\{b\}$，$\{c\}$，$\{a, b\}$，$\{a, c\}$，$\{b, c\}$，$\{a, b, c\}$。

真子集为上述子集中除去$\{a, b, c\}$。

(2) 子集的性质

1) $A\subseteq A$；2) 如果$A\subseteq B$，$B\subseteq C$，则$A\subseteq C$；3) 规定$\varnothing\subseteq A$(空集是任何集合的子集)；4) 如果$A\subseteq B$，$A\supseteq B$，则$A=B$；5) 有限集合$A=\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$的子集个数为$2^n$个。真子集的个数为$2^n-1$个。

在学习集合时,对符号的使用应特别注意。元素与集合之间的从属关系只能用“$\in$”或“$\notin$”表示,集合与集合之间的关系包含用“$\supseteq$”;真包含用“$\supset$”,相等用“$=$”。相互不能混淆。例如集合 $M=\{0, 1, 2\}$,集合 $N=\{0\}$,它们之间的关系是 $M\supset N$, $1\in M$, 但 $1\notin N$。

6. 交集、并集、全集和补集

课本不仅用文字给出了它们的定义,还用表达式给予表示。如:

$$A\cap B=\{x\mid x\in A\text{ 且 }x\in B\};\ A\cup B=\{x\mid x\in A\text{ 或 }x\in B\};$$

$$\complement_U A=\{x\mid x\in U\text{ 且 }x\notin A\}(U\text{ 为全集})$$

这些式子中需注意“且”和“或”。

$A\cap B$ 的任何一个元素都是 A, B 的公共元素,所以 $A\cap B$ 必定是 A 与 B 的公共子集。则 $A\cap B\subseteq A$, $A\cap B\subseteq B$。

$A\cup B$ 可能有下列三种情况:

1) $x\in A$ 但 $x\notin B$; 2) $x\in B$ 但 $x\notin A$; 3) $x\in A$ 且 $x\in B$。

因此 $A\cup B$ 是由所有至少属于 A、B 两者之一的元素组成的集合。不难得出 $A\cap B\subseteq A\subseteq A\cup B$, $A\cap B\subseteq B\subseteq A\cup B$。

$\complement_U A$ 表示从全集 U 中除去属于 A 的元素,余下的元素组成的集合称作集合 A 的补集。

此外,还应熟练地掌握它们的一些主要性质。如: U 为全集,集合 A, B 为真子集。

$$A\cap\varnothing=\varnothing;\ A\cup\varnothing=A;$$

$$A\cup\complement_U A=U;\ A\cap\complement_U A=\varnothing;$$

$$\complement_U(\complement_U A)=A;\ A\cap U=A;$$

$$A\cup U=U;\ \complement_U(A\cap B)=\complement_U A\cup\complement_U B;$$

$$\complement_U(A\cup B)=\complement_U A\cap\complement_U B。$$

[例 1] 设全集 $U=\{x\mid x^2-22x+40\leqslant 0, x\in\mathbf{Z}\}$,其子集 $A=\{x\mid x=4k-1, k\in\mathbf{Z}\}$, $B=\{x\mid x=3k, k\in\mathbf{Z}\}$, $C=\{20\text{ 以内的质数}\}$,$D=\{x\mid x=2k, k\in\mathbf{Z}\}$,用列举法表示以下各集合:

(1) $A\cap B$; (2) $A\cup B$; (3) $B\cap C$; (4) $\complement_U D$;

(5) $C\cap\complement_U D$; (6) $A\cap D$; (7) $\complement_U(C\cap\complement_U D)$; (8) $\complement_U C\cup D$。

[解] $U=\{x\mid 2\leqslant x\leqslant 20, x\in\mathbf{Z}\}$;

$A=\{3, 7, 11, 15, 19\}$, $B=\{3, 6, 9, 12, 15, 18\}$;

$C=\{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\}$;

$D=\{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20\}$。

(1) $A\cap B=\{3, 15\}$;

(2) $A\cup B=\{3, 6, 7, 9, 11, 12, 15, 18, 19\}$;

(3) $B\cap C=\{3\}$;

(4) $\complement_U D=\{3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19\}$;

(5) $C\cap\complement_U D=\{3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\}$;

(6) $A\cap D=\varnothing$;

(7) $\complement_U(C \cap \complement_U D) = \{2, 4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, 18, 20\}$；

(8) $\complement_U C \cup D = \{2, 4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, 18, 20\}$。

[注意] 1 不是质数，是单位。

[例 2] 设全集 $U = \{1, 2, 3\}$，满足 $\complement_U(A \cup B) = \{2\}$ 的集合共有几组，并把它们写出来。

[解] 由题设知，$A \cup B = \{1, 3\}$。

因此 $A = \{1\}, B = \{3\}$；$A = \{3\}, B = \{1\}$；

$A = \{1, 3\}, B = \{1\}$；$A = \{1, 3\}, B = \{3\}$；

$A = \{1\}, B = \{1, 3\}$；$A = \{3\}, B = \{1, 3\}$；

$A = \{1, 3\}, B = \{1, 3\}$；$A = \varnothing, B = \{1, 3\}$；

$A = \{1, 3\}, B = \varnothing$。

故它有 9 组数。

[注意] 本题解法灵活应用补集概念，将满足条件 $\complement_U(A \cup B) = 2$，求 A, B；转化为求满足条件 $A \cup B = \{1, 3\}$ 的集合 A 和 B。这样显得简捷。

[例 3] 已知 U 为全集，M, N 为 U 的真子集，且 $M \cap N = N$，则下列各关系式中成立的是(　　)。

(A) $\complement_U M \supseteq \complement_U N$；　　(B) $\complement_U M \subseteq \complement_U N$；

(C) $M \subseteq \complement_U N$；　　(D) $M \supseteq \complement_U N$。

[解] (B)。因为 $M \subset U, N \subset U$，且 $M \cap N = N$，所以 M, N 之间的关系用图示法表示只能是图 1-1-1 及图 1-1-2 两种可能，因此 $\complement_U M \subseteq \complement_U N$。故选(B)。

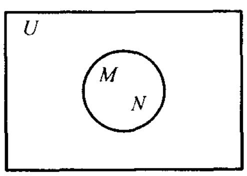


图 1-1-1

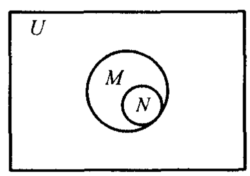
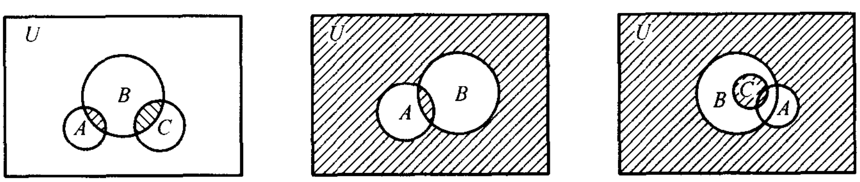


图 1-1-2

[例 4] (1) 用集合符号表示图 1-1-3(a)(b)(c)中的阴影部分。



(a)　(b)　(c)

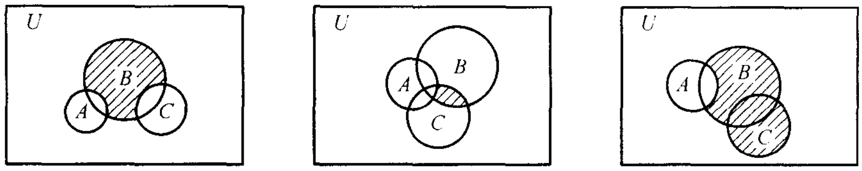
图 1-1-3

(2) 用图示法表示给出的集合。

(A) $\complement_U(A \cup C) \cap B$；(B) $(B \cap C) \cap \complement_U A$；(C) $(\complement_U A \cap B) \cup C$。

[解] (1) (A) $(A \cap B) \cup (B \cap C)$；(B) $\complement_U(A \cup B) \cup (A \cap B)$；(C) $\complement_U(A \cup B) \cup C$。

(2) 见图 1-1-4。



(a) (b) (c)

图 1-1-4

（二）命题

1. 命题 命题是一句完整的具有条件和结论，并且能判断它正确与否的句子。若这个句子正确，则称它为真命题，反之称为假命题。

命题可分为两种。一种称为简单命题，如“6 是偶数”，它不能再分解。另一种称为复合命题。通常复合命题由几个简单命题用逻辑词“不是”、“且”、“或”、“若……则……”等连接起来。如“‘二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的判别式为负’则‘此二次方程没有实根’”是复合命题，而引号‘ ’内的部分为简单命题。

2. 推出关系

(1) 对于 α，β 两个事件，若 α 成立则 β 也成立，则称由 α 推出 β。记作 $\alpha\Rightarrow\beta$。

推出关系具有以下性质：

若 $\alpha\Rightarrow\beta$ 且 $\beta\Rightarrow\alpha$，则 $\alpha\Leftrightarrow\beta$。

若 $\alpha\Rightarrow\beta$ 且 $\beta\Rightarrow\gamma$，则 $\alpha\Rightarrow\gamma$。（传递性）

(2) 对于一个命题而言，其条件与结论可以分别认为是两个事件。这样，如命题“若 α，则 β”为真命题，则可记为 $\alpha\Rightarrow\beta$。若要证明命题“若 α，则 β”为真命题，我们只需找出一连串适当且正确命题 $\alpha\Rightarrow\alpha_1$，$\alpha_1\Rightarrow\alpha_2$，$\cdots$，$\alpha_n\Rightarrow\beta$，由传递性可知 $\alpha\Rightarrow\beta$。我们把这种方法称为直接法证明。

对事件 α 的否定用 $\bar{\alpha}$ 表示。事件 α，$\bar{\alpha}$ 不能同时成立。这样若要证明命题“若 α 则 β”为真命题，则必须进行证明。然而若要证明“若 α 则 β”为假命题，只需构造一种情况使命题“若 α 则 $\bar{\beta}$”成立即可。我们称此为举反例。举反例是一种重要的数学思想，值得大家重视。

[例] 举反例证明“对角线互相垂直的四边形为菱形”为假命题。

[解] 如图 1-1-5。

由图知，$AC\perp BD$，但 $AD\neq DC$，显然 $ABCD$ 不是菱形，故该命题是假命题。

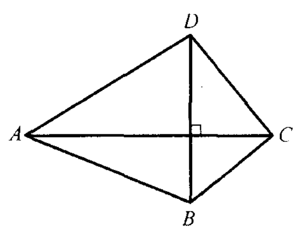


图 1-1-5

(3) 推出关系和集合密不可分。若将“使事件 α 成立的对象的全体”构成集合为 A，即 $A=\{x\mid x$ 使事件 α 成立$\}$，则称 A 为事件 α 的真值集。同理可构造 β 的真值集 B。则“$\alpha\Rightarrow\beta$”$\Leftrightarrow$“$A\subseteq B$”，因此本章内容的主线为集合。

3. 命题的四种形式

见图 1-1-6 所示。

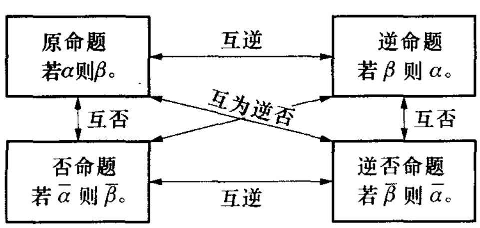


图 1-1-6

(1) 一般情况下原命题为真,并不一定能推出逆命题或否命题为真。但互为逆否的两个命题是等价命题,所以互为逆否的两命题同真或同假。

(2) 四种命题形式构成虽然简单,但给出一种命题形式后要正确写出命题的另外三种形式并非易事。解决这个难点的关键在于分清命题的条件 α 和结论 β。必要时可先将命题改写成"若 α 则 β"的形式。同时特别要注意的是写否命题时对逻辑词"且"、"或"、"至少"、"一定"等的否定。

[**例 1**] 写出下列命题的否命题:

(1) 若 $a=0$,则 $ab=0$;

(2) 两个有理数之和为有理数;

(3) 若 $0<x<1$,则 $x<\frac{1}{x}$;

(4) 所有的质数都是奇数;

(5) 使不等式 $x^2+x+1\leqslant 0$ 成立的实数 x 是存在的;

(6) 能被 4 整除的数一定能被 2 整除。

[**解**] 所求的否命题分别为:

(1) 若 $a\neq 0$,则 $ab\neq 0$;

(2) 若两个数中至少有一个不是有理数,则这两数之和不是有理数;

(3) 若 $x\leqslant 0$ 或 $x\geqslant 1$,则 $x\geqslant\frac{1}{x}$;

(4) 至少存在一个质数 p,而 p 不是奇数;

(5) 对所有的实数 x,不等式 $x^2+x+1>0$ 恒不成立;

(6) 不能被 4 整除的数,一定不能被 2 整除。

[**例 2**] 已知 $a, b, c\in\mathbf{N}$。

命题"如果 $a\times b$ 是 c 的倍数,则 a, b 中至少有一个是 c 的倍数"。

写出它的逆命题、否命题和逆否命题,并判断其真假。

[**解**] 逆命题:"若 a, b 中至少有一个是 c 的倍数,则 $a\times b$ 是 c 的倍数"。它是真命题;

否命题:"若 $a\times b$ 不是 c 的倍数,则 a, b 都不是 c 的倍数"。它是真命题;

逆否命题:"若 a, b 都不是 c 的倍数,则 $a\times b$ 不是 c 的倍数"。它是假命题,同样原命题也是假命题。

[**注意**] "一定"的否定是"一定不"而非"不一定"。因为"不一定"包含两种可能性,它和"一定"并非完全对立,而事件 α 和 $\bar{\alpha}$ 决不能同时成立。"都是"的否定是"不都是"或"至少有一个不是"。

4. 等价命题　如果两个命题 A, B 满足 $A\Rightarrow B, B\Rightarrow A$,则称 A, B 为等价命题。等价的两个命题同真同假,因此互为逆否的两个命题为等价命题。但要注意的是等价命题不都是互为逆否命题。

(三) 充分条件和必要条件

如果事件 α 成立,可以推出事件 β 成立,即 $\alpha\Rightarrow\beta$,则 α 叫做 β 的充分条件。

如果 $\beta\Rightarrow\alpha$,则 α 叫做 β 的必要条件。

如果事件 α 既是 β 成立的充分条件,又是 β 成立的必要条件,即 $\alpha\Rightarrow\beta$ 且 $\beta\Rightarrow\alpha$,即 $\alpha\Leftrightarrow\beta$,则 α 叫做 β 的充分而且必要条件。简称充要条件。

从逻辑推理而言,对于命题"若 α 则 β",有:

若 $\alpha \Rightarrow \beta$ 但 $\beta \nRightarrow \alpha$，则 α 是 β 的充分而非必要条件；

若 $\beta \Rightarrow \alpha$ 但 $\alpha \nRightarrow \beta$，则 α 是 β 的必要而非充分条件；

若 $\alpha \Rightarrow \beta$ 且 $\beta \Rightarrow \alpha$，则 α 是 β 的充要条件；

若 $\alpha \nRightarrow \beta$ 且 $\beta \nRightarrow \alpha$，则 α 是 β 的既非充分又非必要条件。

[例 1] 指出下列命题中的 α 是 β 的什么条件(填入充分非必要条件、必要非充分条件、充要条件、既非充分又非必要条件)。

(1) 命题 α“x 能被 4 整除”，命题 β“x 能被 2 整除”，则 α 是 β 的____________。

(2) 命题 α“$x<3$”，命题 β“$x<0$”，则 α 是 β 的____________。

(3) 命题 α“直线 $y=kx+b$ 过坐标原点”，命题 β“$b=0$”，则 α 是 β 的____________。

(4) 命题 α“$x+y>0$”，命题 β“$x>0,\ y>0$”，则 α 是 β 的____________。

[解]

(1) α 是 β 的充分非必要条件。

因为能被 4 整除的数一定能被 2 整除，反之能被 2 整除的数未必都能被 4 整除。如 2，6，10 等。所以 $\alpha \Rightarrow \beta$，但 $\beta \nRightarrow \alpha$。故 α 是 β 的充分非必要条件。

(2) α 是 β 的必要非充分条件。

因为当 $x<0$ 时一定有 $x<3$，但 $x<3$ 时未必有 $x<0$。所以 $\beta \Rightarrow \alpha$，但 $\alpha \nRightarrow \beta$。

(3) α 是 β 的充要条件。

因为当直线 $y=kx+b$ 过原点，一定有 $b=0$，反之若 $b=0$，$y=kx$ 必过点(0，0)。所以 $\alpha \Rightarrow \beta$，$\beta \Rightarrow \alpha$，有 $\alpha \Leftrightarrow \beta$。

(4) 命题的条件 α 与结论 β 之间，显然没有任何必然的因果关系，即 $\alpha \nRightarrow \beta$，同时 $\beta \nRightarrow \alpha$。所以 α 是 β 的既非充分又非必要条件。

[例 2] 为使方程 $x^2+(a-1)x+a-3=0$ 有一个根小于 -1，另一根大于 1，求 a 的取值范围。

[解] 原方程有一个根小于 -1，一个根大于 1 的充要条件是方程在 $(-\infty,-1)$ 和 $(1,+\infty)$ 内各有 1 个根，也等价于二次函数 $y=x^2+(a-1)x+a-3$ 的图像与 x 轴有两个交点分别位于 $[-1,1]$ 的两侧，如图 1-1-7 所示。于是有

$$\begin{cases} f(1)<0 \\ f(-1)<0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1+(a-1)+a-3<0 \\ 1-(a-1)+a-3<0 \end{cases} \Rightarrow a<\frac{3}{2},$$

所以 a 的取值范围是 $\left(-\infty,\ \frac{3}{2}\right)$。

[说明] 本题应用数形结合方法，形象直观地求出 a 的取值范围。

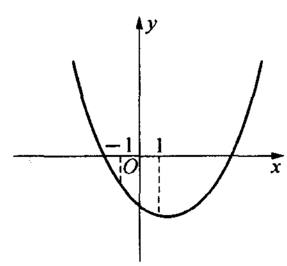


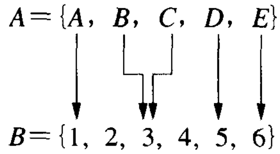
图 1-1-7

(四) 映射、一一映射和逆映射

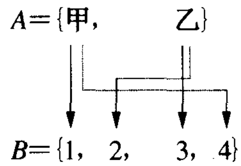
1. 映射 设 A，B 为两个集合，如果按照某种对应法则 f，对于集合 A 中的任何一个元素在集合 B 中都有唯一的元素和它对应，这样的对应叫做从集合 A 到集合 B 的映射。记作 $f: A \to B$。A 中的元素 a，对应于 B 中的元素 b，b 叫做 a(在法则 f 下)的像，a 叫做原像。

事件 1 圆面积 S 与半径 r 之间存在 $S=\pi r^2$。

事件 2 五个高校毕业生可以分配到 6 个部门工作，分配方案是：



事件 3　两名武警战士，负责高一年级四个班级的军训，分工办法是：



事件 4　$A=\{0, 1, 2, 3, \cdots, n\}$，$B=\left\{0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots, \frac{1}{n}\right\}$，对应法则 f 是“取倒数”。

事件 1，两个数集 A，B 通过对应法则（圆面积公式），A 中任一元素 r 在 B 中有唯一的元素 $S(\pi r^2)$ 和它对应，因此是从 A 到 B 的映射。A 中的原像是圆半径 r，它的像是 B 中的圆面积 S。

事件 2，A 中的元素是五个高校毕业生，通过对应法则（分配方案）每个人都在部门 B 中找到唯一的元素（工作部门）与它对应，所以是从 A 到 B 的映射。

事件 3，A 中元素是甲、乙两名武警战士，B 中元素是 1，2，3，4 四个班级，通过对应法则“分工办法”，甲在 B 中有两个元素（1，4）两个班级与它对应，故它不是 A 到 B 的映射。

事件 4，A 中元素 0，通过对应法则 f“取倒数”，在 B 中无法找到唯一的元素和它对应。故它也不是映射。

由此可见，在映射中：(1) 集合 A 中的任何一个元素，都要有像，并且要唯一。(2) 多个原像对应于同一个像是可以的。(3) 不要求 B 中的每一个像都有原像。因此映射是一种特殊的对应，可以是“一对一”也可以是“多对一”的对应。

在映射中，如果集合 B 中的每一个元素都有原像时，这样的映射称为从 A 到 B 上的映射（或称满射）。必须注意，“从 A 到 B 的映射”与“从 A 到 B 上的映射”的不同，区别在于前者不要求 B 中每一个元素都有原像，后者 B 中每个元素都要有原像。

2. 一一映射　设 A，B 为两个集合，f：$A\to B$ 是集合 A 到集合 B 的映射，且对于 A 中的不同元素，在 B 中有不同的像，且 B 中的每一个元素都有一个原像，那么这种映射叫做从 A 到 B 上的一一映射。

3. 逆映射　如果 f：$A\to B$ 是集合 B 上的一一映射，又对于 B 中每一个元素 b 有 A 中原像 a 和它对应，这样所得的映射叫做映射 f：$A\to B$ 的逆映射。记作 f^{-1}：$B\to A$。

这就是说，给定一个集合 A 到集合 B 上的一一映射 f：$A\to B$，存在集合 B 到集合 A 上的一一映射 f^{-1}：$B\to A$。一一映射 f：$A\to B$ 和 f^{-1}：$B\to A$ 互为逆映射。

［例 1］　已知 $A=\{x \mid x\in \mathbf{R}\}$，$B=\{y \mid y\in \mathbf{R}\}$ 对应法则 f：$x\to y=3x+2$，写出它的逆映射。

［解］　因为 $y=3x+2$，所以 $x=\frac{y-2}{3}$，即有 f^{-1}：$B\to A$，使 A 中的 $x=\frac{y-2}{3}$ 与 B 中的 y 对应。

［例 2］　指出下列对应是否是映射？一一映射？哪些有逆映射，如有试写出 f^{-1}。