不确定理论与优化丛书

Uncertainty Theory and Optimization Series

不确定理论教程

A Course in Uncertainty Theory

刘宝碇　彭锦　著

Liu Baoding　Peng Jin

清华大学出版社

不确定理论与优化丛书

Uncertainty Theory and Optimization Series

不确定理论教程

A Course in Uncertainty Theory

刘宝碇　彭锦　著

Liu Baoding　Peng Jin

清华大学出版社

北京

内容简介

不确定理论是概率论、可信性理论、信赖性理论的统称，本书旨在介绍不确定理论的公理化框架，提供处理常见不确定性问题的数学工具．全书共分13章，内容包括测度与积分、概率论、可信性理论、信赖性理论、模糊随机理论、随机模糊理论、随机粗糙理论、粗糙随机理论、模糊粗糙理论、粗糙模糊理论、双重随机理论、双重模糊理论、双重粗糙理论．本书所选内容部分反映了不确定理论的最新研究成果、研究方法和研究动向，在理论体系和方法上均有所创新，构建了不确定理论研讨的平台．本书可作为应用数学、运筹学、管理科学、计算机科学、系统科学、信息科学与工程技术等专业高年级大学生和研究生的教材，也可作为相关专业的教师和研究人员的参考书．

图书在版编目（CIP）数据

不确定理论教程/刘宝碇，彭锦著．—北京：清华大学出版社，2005.7

（不确定理论与优化丛书）

ISBN 7-302-10832-3

Ⅰ.不…　Ⅱ.①刘…　②彭…　Ⅲ.①数学规划－研究生－教材　②模糊数学－研究生－教材

Ⅳ.①O221　②O159

中国版本图书馆CIP数据核字（2005）第035517号

出 版 者：清华大学出版社　　地　　址：北京清华大学学研大厦
http://www.tup.com.cn　　邮　　编：100084
社 总 机：010-62770175　　客户服务：010-62776969
责任编辑：王海燕
印 刷 者：北京四季青印刷厂
装 订 者：三河市化甲屯小学装订二厂
发 行 者：新华书店总店北京发行所
开　　本：170×230　印张：25.75　字数：532千字
版　　次：2005年7月第1版　2005年7月第1次印刷
书　　号：ISBN 7-302-10832-3/O·457
印　　数：1～3000
定　　价：42.00元

不确定理论与优化丛书

在运筹学、管理科学、信息科学、工业工程、航天技术以及军事等众多领域都存在人为的或客观的不确定性，表现形式也多种多样，如随机性、模糊性、粗糙性以及多重不确定性. 辩证地讲，不确定性是绝对的，确定性是相对的. 不确定理论与优化不仅具有学术价值，而且具有广阔的应用前景. 为了促进不确定理论、不确定规划、算法及应用的学术交流与发展，清华大学出版社决定出版《不确定理论与优化丛书》. 本丛书将在编委会的指导下遴选书稿，指导思想是突出学术性、创新性、实用性. 既出版有独到见解的学术专著，又出版实用案例分析和研究生教材. 如您希望您的著作加入本丛书，请向编委会垂询. http：//orsc. edu. cn/use

丛 书 编 委 会

不确定理论与优化丛书
Uncertainty Theory and Optimization Series

本丛书已出版书目：

第 1 卷：《不确定规划及应用》　刘宝碇，赵瑞清，王纲
第 2 卷：《不确定多属性决策方法及应用》　徐泽水
第 3 卷：《实用马尔可夫决策过程》　刘克
第 4 卷：《多目标决策的理论与方法》　徐玖平，李军
第 5 卷：《不确定理论教程》　刘宝碇　彭锦

序 言

当今世界处在一个信息时代. 信息是人类认识世界和改造世界的知识源泉. 人们接触到的各种各样的信息有时候是确定的，更多的时候是不确定的.

信息本身的确定或不确定属性无所谓好坏. 问题在于我们怎样去正视不确定性、认识不确定性、把握不确定性. 确定与不确定揭示和反映事物变化发展过程中的必然与偶然、清晰与模糊、精确与近似之间的关系. 确定性是指客观事物联系和发展过程中有规律的、必然的、清晰的、精确的属性. 不确定性是指客观事物联系和发展的过程中无序的、或然的、模糊的、近似的属性. 确定与不确定，既有本质区别，又有内在联系，两者之间的关系是辩证统一的.

在运筹学、管理科学、信息科学、系统科学、计算机科学以及工程技术等众多领域都存在着客观的或人为的不确定性. 这些不确定性的表现形式是多种多样的，如随机性、模糊性、粗糙性、模糊随机性以及其他的多重不确定性. 一个基本而重要的问题是如何提供处理这些不确定性的数学工具.

人类对不确定性的认识由来已久. 概率论的产生可以追溯到几百年前，模糊数学诞生于 20 世纪 60 年代，粗糙集合的问世则是近 20 年的事情. 概率论已经广泛应用于众多的学科. 模糊集的理论与方法也逐渐受到人们的青睐. 粗糙集合的理论与方法也日益引起人们的关注. 一大批数学工作者、工程技术人员、语言逻辑学家甚至哲学家，对不确定性的研究表现出了浓厚的兴趣. 概而论之，不确定信息的研究越来越引起人们的重视.

复杂系统的处理往往难以回避定性的、不精确的、不完全的和不确定的信息. 从数学理论的角度来审视，不确定理论的数学基础的建立显得越来越重要. 尤其是公理化方法的建立，使得不确定理论形成一门严谨的数学分支.

不确定理论是概率论、可信性理论、信赖性理论的统称，同时还包括模糊随机理论、随机模糊理论、双重随机理论、双重模糊理论、双重粗糙理论、模糊粗糙理论、粗糙模糊理论、随机粗糙理论、粗糙随机理论.

本书旨在介绍不确定理论的公理化框架基础，提供处理常见不确定性问题的数学工具. 书中所选内容部分反映了不确定理论的最新研究成果、研究方法和研究动向.

阅读与学习本书的读者需要一定的数学专业基础知识. 为了帮助读者理解或加深印象，本书给出了大量的例子；为了便于读者查阅，书末附有重要名词索引.

本书可作为高等院校有关专业的高年级大学生和研究生的教材，也可作为应用数学、运筹学、管理科学、计算机科学、系统科学、信息科学与工程技术等方面研究人员的参考书.

本书是在清华大学精品课程《不确定理论》讲稿基础上经过反复修改、扩充而成的. 在写作过程中，刘彦奎、赵瑞清、朱元国、周建、高金伍、杨立兴、柯华、计小宇、刘林忠、王纲、李平科、高晓风等同仁给予了热情的支持，并提出了详尽的修改意见，作者在此表示诚挚的谢意. 同时，作者衷心感谢国家自然科学基金委员会和教育部博士点基金项目的资助，以及清华大学出版社给予的支持和帮助。

刘宝碇　彭锦
http://orsc.edu.cn/utlab
2005 年春于清华园

目　录

第 1 章

预 备 知 识

阅读本书仅需的预备知识是测度论与积分. 测度论是数学的一个分支, 长度、面积、体积都是测度概念的特例. 本章简要介绍测度论的基本概念和主要内容, 包括测度、 Borel 集、可测函数、 Lebesgue 积分、 Lebesgue-Stieltjes 积分、单调类定理、 Carathéodory 扩张定理、测度连续性定理、乘积测度定理、单调收敛定理、Fatou 引理、 Lebesgue 控制收敛定理、 Fubini 定理. 由于本章的主要结果是众所周知的, 所以没有注明具体的参考文献.

1.1 测　　度

1. 测度的概念

定义 1.1 设 Ω 是一个非空集合, $\mathcal{A}$ 是由 Ω 的一些子集构成的集类. 如果下列条件成立:

(a) $\Omega \in \mathcal{A}$;

(b) 若 $A \in \mathcal{A}$, 则 $A^{\mathrm{c}} \in \mathcal{A}$;

(c) 若 $A_i \in \mathcal{A}$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$, 则 $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{A}$.

那么称 $\mathcal{A}$ 是一个代数. 如果将条件 (c) 换为对可数并运算封闭, 那么就称 $\mathcal{A}$ 为一个 σ 代数.

例 1.1 设 Ω 是一个非空集合, 则 $\{\emptyset, \Omega\}$ 是 Ω 上的最小 σ 代数, 而幂集 $\mathcal{P}(\Omega)$ (Ω 的所有子集全体) 是 Ω 上的最大 σ 代数.

例 1.2 令 A 是 Ω 的一个非空真子集. 于是 $\{\emptyset, \Omega, A, A^{\mathrm{c}}\}$ 是包含 A 的最小 σ 代数.

例 1.3 设 $\mathcal{A}$ 是形如 $(-\infty, a]$, $(a, b]$, (b, ∞) 和 $\mathbb{R}$ 的一切区间的所有有限不交并构成的集合. 易知, $\mathcal{A}$ 是一个代数, 但不是一个 σ 代数. 实际上, 若对任意 i 定义 $A_i = (0, (i-1)/i] \in \mathcal{A}$, 则

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = (0, 1) \notin \mathcal{A}.$$

请读者注意这是一个非常重要的代数, 以后的定理证明中会多次用到它.

定理 1.1 σ 代数的交仍然是一个 σ 代数. 进一步地, 对于任何非空类 $\mathcal{C}$, 存在惟一一个包含 $\mathcal{C}$ 的最小 σ 代数.

证明 前一断言容易证明. 令 $\mathcal{A}$ 是包含 $\mathcal{C}$ 的所有 σ 代数之交. 由前一断言知 $\mathcal{A}$ 是一个 σ 代数. 易验证, $\mathcal{A}$ 包含 $\mathcal{C}$ 及其最小性. 定理证毕.

定理 1.2 一个 σ 代数 $\mathcal{A}$ 对差运算、可数并、可数交、极限、上极限和下极限是封闭的. 即

$$A_2 \setminus A_1 \in \mathcal{A}; \quad \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}; \quad \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}; \quad \lim_{i\to\infty} A_i \in \mathcal{A}; \tag{1.1}$$

$$\limsup_{i\to\infty} A_i = \bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{i=k}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}; \quad \liminf_{i\to\infty} A_i = \bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcap_{i=k}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}. \tag{1.2}$$

证明 由定义即得.

定义 1.2 设 Ω 是一个非空集合, $\mathcal{A}$ 是由 Ω 的一些子集构成的 σ 代数. 则 $(\Omega, \mathcal{A})$ 称为可测空间, 而 $\mathcal{A}$ 中的集合称为可测集.

定义 1.3 设 $(\Omega, \mathcal{A})$ 是一个可测空间. 一个测度 π 是定义在 $\mathcal{A}$ 上的广义实值函数, 满足:

(a) 对任意 $A \in \mathcal{A}$, $\pi\{A\} \geq 0$;

(b) 对于可数个互不相交的集合 $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$, 有

$$\pi\left\{\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right\} = \sum_{i=1}^{\infty} \pi\{A_i\}. \tag{1.3}$$

定义 1.4 设 $(\Omega, \mathcal{A})$ 是一个可测空间. 测度 π 是有限的当且仅当 $\pi\{A\}$ 对于任意 $A \in \mathcal{A}$ 都是有限的. 测度 π 是 σ 有限的当且仅当 Ω 可表示为 $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i$, 其中 $A_i \in \mathcal{A}$ 且对一切 i 有 $\pi\{A_i\} < \infty$.

定义 1.5 设 Ω 是非空集, $\mathcal{A}$ 是由 Ω 的子集构成的 σ 代数, π 是 $\mathcal{A}$ 上的测度. 则三元组 $(\Omega, \mathcal{A}, \pi)$ 称为一个测度空间.

下面不加证明地表述单调类定理、 Carathéodory 扩张定理以及逼近定理. 对证明感兴趣的读者可查阅有关测度论的书籍.

定理 1.3 (单调类定理) 假设 $\mathcal{A}_0$ 是 Ω 的子集构成的代数, 且 $\mathcal{C}$ 是 Ω 的子集构成的单调类 (若 $A_i \in \mathcal{C}$ 且 $A_i \uparrow A$ 或 $A_i \downarrow A$, 则 $A \in \mathcal{C}$). 如果 $\mathcal{C}$ 包含 $\mathcal{A}_0$, 那么 $\mathcal{C}$ 包含 $\mathcal{A}_0$ 上的最小 σ 代数.

定理 1.4 (Carathéodory 扩张定理) 代数 $\mathcal{A}_0$ 上的一个 σ 有限测度 π 可以惟一扩张成为包含 $\mathcal{A}_0$ 上的最小 σ 代数 $\mathcal{A}$ 上的测度.

定理 1.5 (逼近定理) 设 $(\Omega, \mathcal{A}, \pi)$ 为一个测度空间, 又设 $\mathcal{A}_0$ 是 Ω 的子集构成的代数, 使得 $\mathcal{A}$ 是包含 $\mathcal{A}_0$ 上的最小 σ 代数. 如果 π 是 σ 有限的, 并且 $A \in \mathcal{A}$ 有有限的测度, 那么对于任意给定的 $\varepsilon > 0$, 存在一个集合 $A_0 \in \mathcal{A}_0$ 使得 $\pi\{A \setminus A_0\} < \varepsilon$.

2. 测度连续性定理

定理 1.6 设 $(\Omega, \mathcal{A}, \pi)$ 为一个测度空间, $A_1, A_2, \cdots \in \mathcal{A}$.

(a) 若 $\{A_i\}$ 是单调增集列, 则

$$\lim_{i \to \infty} \pi\{A_i\} = \pi\left\{\lim_{i \to \infty} A_i\right\}. \tag{1.4}$$

(b) 若 $\{A_i\}$ 是单调减集列, 且 $\pi\{A_1\}$ 有限, 则

$$\lim_{i \to \infty} \pi\{A_i\} = \pi\left\{\lim_{i \to \infty} A_i\right\}. \tag{1.5}$$

证明 (a) 记 $A_i \to A$ 和 $A_0 = \emptyset$, 即空集, 则 $\{A_i \setminus A_{i-1}\}$ 是不交的集列, 并且对 $k = 1, 2, \cdots$ 有

$$\bigcup_{i=1}^{k} (A_i \setminus A_{i-1}) = A_k, \quad \bigcup_{i=1}^{\infty} (A_i \setminus A_{i-1}) = A.$$

于是, 我们有

$$\begin{aligned}
\pi\{A} &= \pi\left\{\bigcup_{i=1}^{\infty} (A_i \setminus A_{i-1})\right\} = \sum_{i=1}^{\infty} \pi\{A_i \setminus A_{i-1}\} \\
&= \lim_{k \to \infty} \sum_{i=1}^{k} \pi\{A_i \setminus A_{i-1}\} = \lim_{k \to \infty} \pi\left\{\bigcup_{i=1}^{k} (A_i \setminus A_{i-1})\right\} \\
&= \lim_{k \to \infty} \pi\{A_k\}.
\end{aligned}$$

结论 (a) 得证.

(b) 显然, 集列 $\{A_1 \setminus A_i\}$ 单调增加. 由 $\pi\{A_1\} < \infty$ 和结论 (a) 知

$$\begin{aligned}
\pi\{A_1\} - \pi\{A\} = \pi\left\{\lim_{i \to \infty} (A_1 \setminus A_i)\right\} &= \lim_{i \to \infty} \pi\{A_1 \setminus A_i\} \\
&= \pi\{A_1\} - \lim_{i \to \infty} \pi\{A_i\}.
\end{aligned}$$

这意味着 $\pi\{A_i\} \to \pi\{A\}$. 定理证毕.

例 1.4 若 $\pi\{A_1\}$ 不是有限的，则定理 1.6 的结论 (b) 未必成立. 例如，设 $A_i=[i,+\infty)(i=1,2,\cdots)$ 且令 π 为区间长度. 则当 $i\to\infty$ 时，有 $A_i\downarrow\emptyset$. 然而，$\pi\{A_i\}\equiv+\infty\not\to 0=\pi\{\emptyset\}$.

定理 1.7 设 $(\Omega,\mathcal{A},\pi)$ 为一个测度空间，且 $A_1,A_2,\cdots\in\mathcal{A}$. 则有

$$\pi\left\{\liminf_{i\to\infty}A_i\right\}\le\liminf_{i\to\infty}\pi\{A_i\}. \tag{1.6}$$

若 $\pi\left\{\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\right\}<\infty$, 则

$$\limsup_{i\to\infty}\pi\{A_i\}\le\pi\left\{\limsup_{i\to\infty}A_i\right\}. \tag{1.7}$$

证明 (a) 因为 $\bigcap_{i=k}^{\infty}A_i$ 是单调增序列且 $\bigcap_{i=k}^{\infty}A_i\subset A_k$, 所以

$$\pi\left\{\liminf_{i\to\infty}A_i\right\}=\pi\left\{\lim_{k\to\infty}\bigcap_{i=k}^{\infty}A_i\right\}=\lim_{k\to\infty}\pi\left\{\bigcap_{i=k}^{\infty}A_i\right\}\le\liminf_{i\to\infty}\pi\{A_i\}.$$

(b) 类似地，$\bigcup_{i=k}^{\infty}A_i$ 是单调减序列且 $\bigcup_{i=k}^{\infty}A_i\supset A_k$. 于是

$$\pi\left\{\limsup_{i\to\infty}A_i\right\}=\pi\left\{\lim_{k\to\infty}\bigcup_{i=k}^{\infty}A_i\right\}=\lim_{k\to\infty}\pi\left\{\bigcup_{i=k}^{\infty}A_i\right\}\ge\limsup_{i\to\infty}\pi\{A_i\}.$$

定理证毕.

例 1.5 定理 1.7 中的严格不等式可能成立. 例如，设

$$A_i=\begin{cases}(0,1], & \text{若 } i \text{ 为奇数},\\ (1,2], & \text{若 } i \text{ 为偶数},\end{cases}$$

其中 $i=1,2,\cdots$, 又设 π 为区间长度，那么

$$\pi\left\{\liminf_{i\to\infty}A_i\right\}=\pi\{\emptyset\}=0<1=\liminf_{i\to\infty}\pi\{A_i\},$$

$$\limsup_{i\to\infty}\pi\{A_i\}=1<2=\pi\{(0,2]\}=\pi\left\{\limsup_{i\to\infty}A_i\right\}.$$

定理 1.8 设 $(\Omega,\mathcal{A},\pi)$ 为一个测度空间，且 $A_1,A_2,\cdots\in\mathcal{A}$. 如果 $\pi\left\{\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\right\}<\infty$, 且 $\lim_{i\to\infty}A_i$ 存在，那么

$$\lim_{i\to\infty}\pi\{A_i\}=\pi\left\{\lim_{i\to\infty}A_i\right\}. \tag{1.8}$$

证明 由定理 1.7 得

$$\pi\left\{\liminf_{i\to\infty} A_i\right\} \le \liminf_{i\to\infty} \pi\{A_i\} \le \limsup_{i\to\infty} \pi\{A_i\} \le \pi\left\{\limsup_{i\to\infty} A_i\right\}.$$

因为 $\lim\limits_{i\to\infty} A_i$ 存在，所以等式成立．定理证毕．

3. 乘积测度定理

设 $\Omega_1, \Omega_2, \cdots, \Omega_n$ 为任意集合 (不必是同一空间的子集)．卡氏积 $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2 \times \cdots \times \Omega_n$ 就是形如 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 的一切有序的 n 元组的集合，其中 $x_i \in \Omega_i$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$．

定义 1.6 设 $\mathcal{A}_i$ 分别是 Ω_i $(i = 1, 2, \cdots, n)$ 的子集构成的 σ 代数．记 $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2 \times \cdots \times \Omega_n$．所谓 Ω 中的一个可测矩形是指集合 $A = A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$，其中 $A_i \in \mathcal{A}_i$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$．包含 Ω 中的所有可测矩形的最小 σ 代数称为乘积 σ 代数，记为 $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2 \times \cdots \times \mathcal{A}_n$．

请注意，乘积 σ 代数 $\mathcal{A}$ 是可测矩形上的最小 σ 代数，并非就是 $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \cdots, \mathcal{A}_n$ 的卡氏积．

定理 1.9 (乘积测度定理) 设 $(\Omega_i, \mathcal{A}_i, \pi_i)$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$ 是测度空间．假设 π_i $(i = 1, 2, \cdots, n)$ 是 σ 有限的， $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2 \times \cdots \times \Omega_n$, $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2 \times \cdots \times \mathcal{A}_n$．则 $\mathcal{A}$ 上存在惟一测度 π 使得

$$\pi\{A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n\} = \pi_1\{A_1\} \times \pi_2\{A_2\} \times \cdots \times \pi_n\{A_n\} \tag{1.9}$$

对每个可测矩形 $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$ 成立．

测度 π 称为 $\pi_1, \pi_2, \cdots, \pi_n$ 的乘积，记为 $\pi = \pi_1 \times \pi_2 \times \cdots \times \pi_n$．三元组 $(\Omega, \mathcal{A}, \pi)$ 称为乘积测度空间．

4. 无穷乘积测度定理

设 $(\Omega_i, \mathcal{A}_i, \pi_i)$ $(i = 1, 2, \cdots)$ 是一列无穷多个测度空间，满足 $\pi_i(\Omega_i) = 1$ $(i = 1, 2, \cdots)$．卡氏积 $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2 \times \cdots$ 定义为形如 $(x_1, x_2, \cdots)$ 的一切有序元所构成的集合，其中 $x_i \in \Omega_i$ $(i = 1, 2, \cdots)$．对此情形，一个可测矩形是指形如 $A = A_1 \times A_2 \times \cdots$ 的集合，其中对所有 i, $A_i \subset \mathcal{A}_i$, 并且对有限多个 i 之外有 $A_i = \Omega_i$．包含 Ω 的所有可测矩形的最小 σ 代数称为乘积 σ 代数，记为 $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2 \times \cdots$．

定理 1.10 (无穷乘积测度定理) 假设 $(\Omega_i, \mathcal{A}_i, \pi_i)$ 是一列无穷多个测度空间，满足 $\pi_i\{\Omega_i\} = 1$ $(i = 1, 2, \cdots)$．令 $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2 \times \cdots$ 和 $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2 \times \cdots$，则 $\mathcal{A}$