

现代数学书丛

机械化数学引论

石 赫 著

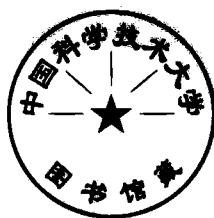


湖南教育出版社

现代数学书丛

机械化数学引论

石 赫 著



湖南教育出版社

机械化数学引论

石 赫 著

责任编辑：孟实华

湖南教育出版社出版发行

湖南省新华书店经销 国防科技大学印刷厂印刷

787×1092 毫米 32 开 印张：7 625 字数：180000

1998 年 12 月第 1 版 1998 年 12 月第 1 次印刷

印数：1—2000

ISBN7—5355—2605—5/G·2600

定价 10.00 元

本书若有印刷、装订错误，可向承印厂调换

序

科学技术是第一生产力，经济发展必须有科学技术的支持。特别是进入 21 世纪后，科技的进步更将成为经济发展的主要动力。其中基础性的创新研究，将使经济出现飞跃式的进展，这已为过去的历史所证明，并已成为全世界有识之士的共识。对我国来说，科技兴国，已是当务之急，这些也已成为全国有识之士的共识。

数学作为一门基础学科，向来被认为是基础的基础，数学主要研究数量关系与空间形式，也通过数量关系与空间形式而渗透到种种各别的科学领域，一门科学的成熟程度，往往以应用数学的深入程度为一项重要衡量标志。在进入 21 世纪时，数学如何发挥它应有的作用，以支持并促进我国科技的进步与经济的发展，乃是一项重大的课题。为此，必须有一批优秀的跨世纪中青年数学人才作为主力，才能担负起这一重大责任，国家为此已为青年数学家创造了种种良好的研究条件和学术环境，设立了各种特殊的基金与资助，

还举办了种种类型旨在培养与选拔拔尖人才的讲习班、暑期学校与研究班等。

早在若干年以前，在国际著名数学家陈省身教授的倡导之下，国家教委与国家基金委曾在天元基金的支持下，乘每年暑期各大专院校休假之机，举办数学上各种专题的讲习班，此后又升级并改名为暑期学校。第一次 1995 年在湖北襄樊地区举行，由武汉大学数学系主持其事，第二次 1996 年改在北京，由北大数学系主持，以后将转往其他地区，由一些著名的大学数学系轮流主持。这些暑期学校都主要由国内外卓有成就的中青年数学家就当前某些有重要意义的活跃领域作系统介绍，使参加学习的来自全国各地的年轻学子能迅速了解这些领域的情况，掌握它们的方法技术，并进入科研前沿。

湖南教育出版社热心中国数学事业的发展，提出由该社组织编辑一套《现代数学》书丛，大部分暑期学校的讲稿经过适当增改后都将收入这一书丛，第一批包括三本：

1. 堵丁柱的《判定树理论导引》；
2. 石赫的《机械化数学引论》；
3. 张贤科的《代数数论导引》。

以后还将陆续分批出书，已定的有：

香港科技大学黄劲松的《李群的表示论》。

其余的也在计划之中。

现试对此次出版的第一批的三本书略作介绍。

《判定树理论导引》一书的作者堵丁柱教授是我国著名的青年数学家，他解决了美国贝尔电话公司关于电话布线有关 Steines 树猜测长期悬而未决的问题，并因此而被英国大百科全书列为当年十大科技成就之一。此书则涉及作者有着重要成就的另一领域：理论计算机科学中的计算复杂度理论。所谓 Karp 猜想的提出者 Karp 是这一理论的主要开创者之一，它引导到迄今还成为悬案的所谓 P-NP 问题。本书作者“将心比心”与“设身处地”深入浅出地介绍这一猜想，并如作者所希望的那样，这一猜想的解决可能会出自于阅读这本小册子的青年学子之手。

数学中的公理化演绎体系几乎是尽人皆知的。20 世纪重大发明之一的计算机，使数学面临变革而有进入一个新时代的可能，即数学的机械化。计算机科学大师 Knuth 曾称计算机科学是一种算法的科学。我国某些数学史家曾论证数学发展的历史过程中，公理化的演绎倾向与机械化的算法倾向往往互为消长交替成为当时数学的主流。由于计算机的出现，为后一倾向带来了新的生命力。书丛的第二本对于数学机械化作了较详细的介绍。作者石赫教授是中国科学院系统科学所的研究员，多年来从事这方面的研究，有过不少重要的贡献。例如书中关于理论物理中杨振宁与 Baxter 方程组的解法，即是石赫教授自己的一项杰作。希望读

者在阅读本书之后，能迅速进入这一方兴未艾的新颖领域，并作出多方面的贡献。

数论，它的研究对象始于最简单不过的整数，却有着最丰富不过的内涵。早在古希腊时期，欧几里得的《几何原本》一书，就有专章通过素数概念以及素数积唯一分解与素数个数无限等定理创立了朴素而诱人的整数理论。在中国古代，虽然整数的性质理论并非主要贯注所在，也有中国剩余定理这种光辉篇章。到近代的几个世纪，整数的理论往往吸引着许多伟大的数学家。诸如 Fermat, Euler, Gauss, Riemann, Jacobi, Dirichlet 等，他们的贡献使数论成为数学中最有魅力的一个分支，著名的难题如 Goldbach 问题，Fermat 大问题，以及 Riemann 猜测等，已成为数百年来许多大数学家所殚精竭虑的焦点。在本世纪中，由于诸如编码等实际上的需要，使数论除了本身理论的优美以外，还成为解决实际问题的一种重要手段。

在本世纪中，由于数学中代数、拓扑、分析等多方面的发展对数论引进了诸多新的手段，经过数代人的努力，终于使 Fermat 大问题得到完全解决。至于在我国，则通过华罗庚、闵嗣鹤等诸前辈的倡导，出现了一批优秀的数论专家，以陈景润等为代表，在 Goldbach 问题上作出了卓越的贡献，为国外所推崇。《代数数论导引》一书的作者张贤科是清华大学的教授，长期从事代数数论的研究，作出过不少重要的贡献。此书从现代

数学的角度介绍了代数数论的基本内容和类域论等很重要的现代理论. 国内有志于数论的青年学子, 尽可通过此书发愤学习而成才, 迅速进入数论这一领域, 并在 21 世纪中与国外学者争奇斗胜.

我们希望书丛中以后出版的著作, 能对国内的青年学者, 起到同样的作用.

吴文俊

1998 年 1 月 22 日

前 言

吴文俊先生提倡的数学机械化研究，已取得令人瞩目的辉煌成就，“吴方法”已闻名于世。许多学者与学生都希望能有书籍较为系统地、初浅地介绍吴先生的学术创造，以便于进行学习与研究。本书是适应这一需求而编写的。

作者时常有机会听到吴先生有关数学机械化的精彩论述，得到教育和启迪，逐步加深对这一深邃的学术思想的理解。作者有机会几次讲授“机械化数学引论”课程。本书是这些学与教的累积。全书共分为五章，按照教材的模式进行安排。第一章简要介绍一些代数学的基本知识，是学习本书主要内容的起点。第二章至第四章介绍吴先生创立的代数方程组求解和初等几何定理机器证明的基本原理和方法，这是全书的核心部分，材料取自吴先生的论著。第五章是几个应用实例，做为练习以加深对这些原理和方法的理解与认识。本书的选材，叙述有许多可以商榷之处，编写中的疏漏或不当亦在所难免。欢迎读者提出批评与建议，以待今后加以改进。

阅读本书时，备置适当的计算机是必要的。只有通过艰苦的上机实践，方能领悟到数学机械化的真与美。一些人力难以完成的繁复推导和计算，对当今的计算机却是微不足道的。一些意想不到的现象或规律，亦可利用计算机予以发现。将质的

困难转化为量的复杂，是借助计算机进行数学研究的一项准则。当然，计算机仅是一种工具，不能取代人脑的智慧与创造。但是，计算机提供了物质条件，可使人们的聪明才智获得尽情发挥。

本书的编写得到数学天元基金和湖南教育出版社的关心与鼓励。编写过程中，中国科学院系统科学所数学机械化研究中心的同事们给予作者慷慨的支持与帮助。谨此一并致以谢意。

程民德先生为数学机械化事业倾注了大量心血，经常向作者讲述他的见解，作者从中获益匪浅。程先生认为：数学机械化思想的明确提出，意义十分重大，是从战略的高度为数学科学的发展提出了构想；实现数学机械化是数学发展历史中的一座里程碑。程先生指出：开展数学机械化研究将对中华数学的振兴乃至复兴做出重大贡献，产生深远影响。实践正在证明着这些论断的科学性和预见性。

作 者

1997年12月

写于科学园南里

引言 关于数学机械化

吴文俊先生倡导的数学机械化事业的性质、内容、方法及意义已日益获得科学界的理解和赞同. 机械化数学研究的兴起, 是我国当代数学发展中一个引人瞩目的具有我国传统特色的新里程碑.

20 世纪行将结束. 人们不时在展望 21 世纪数学发展的趋势和前景. 可以预见: 电子计算机作为数学研究强有力的工具, 势必大范围地介入数学研究的诸多领域, 在相当程度上替代现今使用的基本工具——纸和笔, 从而改变数学研究的面貌, 促进数学科学的迅猛发展. 这, 将是未来世纪中数学发展的突出特点.

随着数学研究的不断发展和深入, 在许多数学分支, 尤其在那些涉及非线性数学问题的学科, 相当数量的课题中, 往往出现大量的推导和繁复的计算. 它们不仅耗费了数学家们大量的时间和宝贵的精力, 而且有些问题之繁, 即使投入再多的人力仍然是难以完成的. 电子计算机则以其高速、准确的计算, 能在可接受的时间之内实现这些繁杂的推导和计算, 这无疑将给数学家们带来极大的便利, 使得他们不仅能够研讨那些涉及繁

杂推导和运算的数学课题，而且可以节省出宽裕的时间和精力投入到那些更能发挥自己聪明才智的研究中去。

研究工具的革新，极大地促进了科学的进步。数学研究工具的变革，推动了数学科学的发展前进，这曾为数学发展的历史所证明，也将为今后数学的发展所证实。如今，电子计算机成为数学研究的工具已是大势所趋。然而，数学家们若想利用计算机进行数学研究，一方面要把实践中产生的各类问题以计算机易于接受的形式恰当地提出，而且需要“教会”计算机如何去做，即提供相应的计算方案。如果这种算法是创造性的，则需要相应的数学理论的支撑，以保证算法的正确性及可行性。这将引发一些新的数学观念的建立，促使一些沉寂着的原有概念的复苏，以至于创立全新的数学理论。如果这种算法是有效的，那么它将为数学工作者带来极大的便利，使他们敢于问津前人望而却步的数学问题，使得他们能够大踏步进入前人未曾涉足的研究领域，使一些令人棘手的问题获得解决。因此，数学研究的机械化和机械化数学理论的发展，是相互依存，相互促进的同一事物的两个方面。这种相辅相成的有机联系，保证了数学机械化事业的强大生命力。

“机械化”一词先是出现在王浩先生的论著，而被吴文俊先生选用的，它具有清新的时代气息。吴文俊先生提出：所谓机械化，无非是刻板化和规格化。机械化的动作由于简单刻板，因而可以让机器来实现，又由于往往需要重复千百次，超出了人力的可能，因而又不得不让机器来实现。人类的体力劳动如此，人类的脑力劳动应亦如此。如果说，工业机器的出现所导致的产业革命，人类逐步实现了体力劳动的机械化，从而促进了社

会生产力的极大发展，使人类的生活面貌大为改观，那么，电子计算机的飞速发展，则为人类实现脑力劳动的机械化创造了物质条件。当前，在一些领域，计算机已经部分地代替了人类的脑力劳动，为社会生活带来前所未有的深刻变化。体力劳动机械化的过程，已经经历了数百年，如今仍在延续，而脑力劳动的机械化毕竟刚刚开始起步。举步不易，开拓愈艰。作为典型脑力劳动的数学研究，具有表达精确，论证严谨的特点，理应率先实现机械化。所谓数学问题的机械化，就要求在运算或证明过程中，每前进一步，都有一个确定的必须选择的下一步，这样沿着一条有规律的刻板的道路一直达到结论。因此，在电子计算机日益普及，人力难以胜任的繁琐而重复的大量计算已成为不足道的时代，数学机械化的思想应比公理化思想受到更大的重视。

吴文俊先生的数学机械化思想是在 70 年代逐步形成的，其后的十余年里不断获得发展和丰富。70 年代，他花大力气研读了中国古代数学的发展历史。基于长期的数学实践及对数学科学发展规律的深刻理解，他明确提出：中国传统数学基本上是一种机械化的数学，机械化思想是中国古代数学发展的主线。当时，他有机会接触到电子计算机，使他敏锐地觉察到：今天的数学家们不得不面对计算机的挑战，而且计算机的快速普及，将为中国传统机械化数学的发扬光大创造极好的机遇。于是，在多种场合，他满怀激情地宣讲、阐述数学机械化的重要意义和深远影响，提倡建立具有我国特色的数学。他撰写的一部分贯穿数学机械化思想的专论，以及论述数学机械化的文章，收集在《吴文俊文集》中。最近，又将内容加以扩充，重版为《吴文俊论数学机械化》，已由山东教育出版社出版。这两本

文集以数学机械化思想贯通全书，其史料之翔实，立意之新颖，论断之精彩，意境之广博，思想之深邃，令读者为之心折，甚而感受到强烈的震撼。现将部分论述转录如下：

统览数学科学发展的全局，吴文俊明确提出：贯串在整个数学发展历史过程中有两个中心思想，一是公理化思想，另一是机械化思想。前者源于希腊，后者则贯串于整个中国古代数学。它们对数学的发展都曾起过巨大作用，理应兼收并蓄。公理化思想在现代数学，尤其在纯粹数学中占据着统治地位，而机械化思想却远远没有得到应有的重视。然而，如果检查一下数学两千年的发展历史，可以看到数学多次重大跃进无不与数学机械化有关。数学的启蒙教育，小学课程中的算术四则运算是机械化的。代数学的出现使算术四则难题实现了机械化。线性方程组求解的消元法是机械化思想的杰作。对近代数学起着决定作用的解析几何和微积分，实质上是机械化思想的产物。即便在现代纯粹数学研究中，机械化思想也一直发挥着重大作用。对本世纪数学的发展产生重大影响的希尔伯特（D. Hilbert），在他的以公理化方法著称的《几何基础》一书中，同时包含着机械化思想，书中论述了一类交点型定理的机械化证法。这一点往往被忽视，首先是由吴文俊明确提出来的。其实希尔伯特长时间致力于数学定理机械化证明的研究，在他的倡导下，数理逻辑获得蓬勃发展，为计算机的设计原理提前做了准备。数学巨匠，埃里·嘉当（E. Cartan）关于微分方程、微分几何及李群的浩瀚著作中，经常显现出机械化的特色。亨利·嘉当（H. Cartan）关于代数拓扑学中同调群的计算，可看作是机械化方法成功的典范。对数学整体产生深远影响的陈省身示性类的研究，闪烁着机械化思想的光辉。数学机械化思想对数

学发展产生重大作用的成功之例不胜枚举，几乎在数学的各个角落都可找到机械化思想的踪迹。当前，机械化的方法与作用正日益为数学家们所认识。在数学科学发展过程中，机械化思想的历史功绩是不可磨灭的。

回顾中国古代数学的伟大成就，吴文俊自豪地写道：中国古代的劳动人民，在广泛实践的基础上，建立了世界上最先进的我国古代数学，直至 16 世纪，我国数学在最主要的领域一直居于世界领先的地位。中国人创造与发展了记数、分数、无理数、小数、零与负数以及任意逼近任一实数的方法，实质上达到了整个实数系统的完成。特别是自古就有的完美的十进位值制记数法，是中国的独特创造，是世界其它古代民族所没有的。这一创造，在人类文明史上居于显赫的地位。联立线性方程组求解的消元法，高次方程求解的开方术，多项式方程组求解的消元法，不定方程求解的剩余定理等等成就说明，代数学的创立几乎是中国一手包办了的。我国古代的几何学有着极其辉煌的成就。测高望远之学形成了重差理论，土地的丈量与容积的量测产生了面积和体积理论，提炼成出入相补的一般原理。整个多面体体积理论可奠基于刘徽原理及出入相补原理之上。祖暅原理则解决了球体体积问题。勾股测量学及勾股定理的证明，圆周率的推导和计算。这些成就表明，我国古代几何学，既有丰硕的成果，又有系统的理论。吴文俊强调：与希腊几何学的演绎体系不同，我国数学发展过程中自始至终把空间形式与数量关系融合在一起，因而数系统的建立臻于完美，代数学的发生与发展始终与几何学联系在一起。机械化思想是我国古代数学的精髓。

吴文俊强调指出：我国古代数学的重大成就，为近代数学的建立奠定了基础，为近代数学的发展发挥了巨大作用。大家知道，解析几何与微积分学的建立决定了近代数学的发展。我国古代天文学中，以经纬度表示星座的位置，是解析几何中坐标概念的雏形。中国传统数学特有的几何的代数化，则是解析几何的前奏。实数系统是数学分析的基础，中国古代数学中对实数的任意逼近术，实质上完成了实数系统的建立。极限是微积分的基本概念，中国独创的十进制小数与极限概念一脉相通，割圆术则是极限概念的实际应用。“幂势既同，则积不容异”的祖暅原理已蕴含着微积分的基本思想。吴文俊分析了微积分学的建立过程，深刻指出：从开普勒（J. Kepler）到牛顿（I. Newton）的漫长过程中，希腊式数学显得软弱乏力，遭遇难以逾越的本质困难，只是在引入具有生命力的东方数学（即经由阿拉伯国家传入欧洲的中国式数学）之后，才获得了重大的突破。自然的结论是：微积分学建立的过程表明，中国古代数学的作用远优于希腊式数学。

综观我国古代数学的发展过程，吴文俊得出结论：从西汉以迄宋元，随着我国社会经济和劳动人民创造性发展，数学人材与数学创作仍世代不绝。中国数学在世界上可以说一直居于主导地位，并在许多主要领域内遥遥领先。只是在16世纪之后，中国数学的发展出现中断，昔日之辉煌渐渐转变为今日之落后。在以体力劳动机械化为特征的产业革命激发下，获得迅速发展的西方数学则乘虚而入，以至于中国近代的一些知识分子，接触到的数学都是“西方”的，看到的数学史大都是“西方史家”的。然而，中国数学的许多重大成就，获得的时间要比西方早数百年甚至一千几百年。中国古代数学发达之时，欧洲仍

然十分落后，处于一个宗教的“黑暗时代”。就是到十二三世纪，他们甚至连加法都认为是学术上很难的东西。近代西方的一些数学史家，对中国古代数学的精髓缺乏了解，李约瑟(J. Needham)虽然注意到中国古代科学的巨大成就，也未能指出我国古代数学的传统特色。至于其他编写近代数学史的一些西方作者，更无视我国古代数学的巨大成就和深远影响。但是，历史真理怎能淹没。吴文俊愤然发出呐喊：被颠倒的历史必须颠倒过来！他大声疾呼：我们要珍惜中国传统数学的机械化思想。他科学地预言：数学机械化思想的未来生命力将是无比旺盛的。事物总是朝向自己的对立面转化的，中国数学今日之落伍，亦能转化为未来的再度辉煌，全看中国人自己争气不争气。为此，吴文俊规定的目标十分明确：推行数学机械化，使作为中国古代数学传统的机械化思想，光芒普照于整个数学的各个角落。

这是高瞻远瞩的宏伟设想。它色彩斑斓富有浪漫性，又是构筑于科学综析的坚实理念之上的。道路一旦认清，坚定的信念即刻转化为顽强的动力。十多年来，吴文俊先生身体力行，义无反顾地在数学机械化的征途上奋勇拼搏，努力攀登。在近耳顺之年，他从头学习计算机语言，亲自在袖珍计算器和台式计算机上编制计算程序，尽尝了在微机上操作的甘苦。他的勤奋是惊人的，譬如在利用 HP-1000 计算机进行研究的那段时间内，他的工作日程经常是这样安排的：清早，他来到机房外面等候开门，进入机房之后是 8—9 个小时的不间断工作。下午 5 时许，他步行回家进餐，还要抓紧时间整理分析计算结果。傍晚 7 时左右，他又出现在机房工作至次日凌晨。有时深夜离开机房步行回家稍事休息，四五个小时之后，又于清晨在机房等候开门。他就是这样夜以继日，废寝忘食，周而复始，精力过人。