高中数学知识点归纳例析

GAO ZHONG SHU XUE ZHI SHI DIAN GUI NA LI XI

凤良仪 万融 等编

安徽教育出版社

高中数学知识点归纳例析

凤良仪　万　融　等编

安徽教育出版社

（皖）新登字03号

高中数学知识点归纳例析

安徽教育出版社出版发行

（合肥市金寨路283号）

新华书店经销　　肥西县印刷厂印刷

※

开本787×1092　1/32　印张18.25字数400000

1993年5月第1版　　1993年5月第1次印刷

ISBN7—5336—1164—0/G·1608

定价：7.70元

前　言

为了帮助高中学生在学习数学时，很好地理解、消化教材，牢固地掌握基础知识和基本技能，并不断强化和提高数学解题能力，获得成功的学习效果，我们特组织一些富有教学经验的教师编写了这本书。

本书以现行全日制中学数学教学大纲（修订本）和高中数学课本为依据，参照国家教委考试中心所颁发的数学学科高考《考试说明》，并按照全部高中数学教学内容（必修部分），逐章编写。

本书的特点之一是从每章的具体内容和特点出发，首先对所涉及的各知识点进行必要的回顾、分析和归纳，其中突出重点、难点和关键内容，并按照了解、理解、掌握和熟练掌握的四个层次对各知识点的学习提出了要求，对有关的学习方法和注意事项也进行了指导。

如何精选代表性和针对性较强的范例进行辨析，是本书的又一个明显特点。书中结合例题，辅以必要的分析和说明，对题型、思路、解法、技巧及相关的数学思想、方法（包括数学思维）都进行了探究，以期达到举一反三、融会贯通的目的；各章（节）后都配有相应的基础练习题、综合训练题及单元自测题。选题时，力求题量适当，题型新颖和知识覆盖面广，不仅有利于读者及时巩固所学知识，而且可以满足不同层次读者的需求。

全部习题的答案或解答提示集中安排在本书最后，以便于读者查对。

本书集中了教师多年来教与学、讲与练方面探索的成果和经验，无论是从配合平时教学，还是从指导阶段学习与系统复习上来看，都有一定的指导意义。本书面向社会、家庭和学校，既可作为高三年级师生的复习用书，也用作高中各年级的辅导教材；既便于在校学生学习参考，又便于社会青年自学阅读。

参加本书编写的有：张重文、彭声应、石英、汤栋臣、许季龙、何一鸣、刘谱传、凤良仪、万融等同志。

本书由凤良仪，万融同志审稿。

由于时间匆促，加之水平所限，书中疏漏之处难免，敬希广大读者批评指正。

编者

1992年10月

目　　录

第一章 幂函数、指数函数和对数函数

一 集 合

知识点的分析与归纳

本节知识点包括集合的基本概念，集合与集合的关系两部分。要从集合的描述性说明以及子集、交集、并集、补集的定义，并结合广泛的实例来理解这些概念。要了解空集和全集的意义，了解属于、包含、相等关系的意义，并能正确使用符号，$\in$、$\notin$、$\subseteq$、$\subset$、$=$来表示元素与集合、集合与集合的关系。两个集合相等的概念是一个重要概念，要给于充分重视。在理解概念的基础上会求给定集合的交，并、补集，能运用相应的符号表示一些较简单的集合。只有掌握了集合的三种表示方法：列举法、描述法以及图示法，才能选用适当的表示法表示给定的集合。在具体问题中，要特别弄清集合元素的一般形式和元素公共属性的特征。要熟悉常见数集及其符号：N（自然数集），Z（整数集），Q（有理数集），R（实数集），C（复数集），Q^+（正有理数集），R^-（负实数集），等等。

范例辨析

例1-1 回答下列问题：

(1) $\{2, 3\}$与$\{(2, 3)\}$，$\{(2, 3)\}$与$\{(3, 2)\}$，$\{(a, b)\}$与$\{(b, a)\}$，0与$\{0\}$，0与$\varnothing$，$\{0\}$与$\varnothing$各是

什么关系？

(2) 设$A=\{x|x^2-x=0\}$，$B=\{P|P\subseteq A\}$，问A与B是什么关系？并用列举法写出B。

【分析】 (1)认清各个集合元素的形式特征，根据两个集合相等关系，元素与集合的关系以及空集的意义即能解答，但对集合元素由字母给出的，须讨论。

(2) 分析集合B的元素属性即可知A、B关系。将集合A化简，写出A的所有子集，即能写出B。

解 (1) $\{(2,3)\}\neq\{2,3\}$；$\{(2,3)\}\neq\{(3,2)\}$；当$a\neq b$时，$\{(a,b)\}\neq\{(b,a)\}$，当$a=b$时，$\{(a,b)\}=\{(b,a)\}$；$0\in\{0\}$；$0\notin\varnothing$；$\varnothing\subset\{0\}$。

(2) $A=\{x|x^2-x=0\}=\{0,1\}$，A的子集有$\varnothing$，$\{0\}$，$\{1\}$，$\{0,1\}$。由B的元素属性知$A\in B$。

$B=\{\varnothing,\{0\},\{1\},\{0,1\}\}$。

【说明】 分析集合元素的一般形式和元素属性特征（即元素适合的条件），是正确表示元素与集合的从属关系以及集合和集合运算的关键。

例1-2 设$A=\{(x,y)|4x+ay=6\}$,$B=\{(x,y)|bx+2y=7\}$且$A\cap B=\{(1,2)\}$，求a和b。

解 $\because A\cap B=\{(1,2)\}$，$\therefore(1,2)\in A$且$(1,2)\in B$，将$x=1$，$y=2$代入$4x+ay=6$，得$a=1$，同样将$x=1$，$y=2$代入$bx+2y=7$得$b=3$。

【说明】 代入法是常用的数学方法。

例1-3 设$I=R$，$A=\{x|-1<x<4\}$，$B=\{x||x|=2y-3,\ y\in A\}$，求$\overline{B}$，$A\cup B$，$\overline{A}\cap\overline{B}$，$\overline{\overline{A}}\cup\overline{B}$。

【分析】 根据集合B的条件将B化简是解答此题的关键。

解 $\because y\in A$, $\therefore -1<y<4$, 又 $|x|=2y-3$

$\therefore 0\leqslant|x|<5$ $\therefore B=\{x|-5<x<5\}$

已知 $I=R$,

$\therefore \overline{B}=\{x|-\infty<x\leqslant-5\}\cup\{x|5\leqslant x<+\infty\}$,

$A\cup B=B$;

$\overline{A}\cap\overline{B}=\{x|-\infty<x\leqslant-5$ 或 $5\leqslant x<+\infty\}=\overline{B}$;

$\overline{\overline{A}}\cup\overline{B}=\{x|x\leqslant-5$ 或 $-1<x<4$ 或 $x\geqslant5\}$.

例1-4 已知：$A=\{x|x^2-ax+a^2-19=0\}$,

$B=\{x|\log_2(x^2-5x+8)=1\}$, $C=\{x|x^2+2x-8=0\}$, 且 $A\cap B\neq\varnothing$, $A\cap C=\varnothing$. 求 a 的值.

【分析】 从化简集合 B、C 入手，再结合条件 $A\cap B\neq\varnothing$, $A\cap C=\varnothing$, 推测一定可找到 A 的一个元素，应用代入法，即可求 a 之值.

解 由 B 得 $x^2-5x+8=2$,

$\therefore x=2$ 或 $x=3$, 即 $B=\{2, 3\}$,

由 C 得 $x=-4$ 或 $x=2$. 即 $C=\{-4, 2\}$,

$\because A\cap C=\varnothing$, $\therefore -4\notin A$, $2\notin A$, 又 $A\cap B\neq\varnothing$,

$\therefore 3\in A$. 将 $x=3$ 代入方程

$x^2-ax+a^2-19=0$, 得 $a^2-3a-10=0$, 解之得

$$a=5 \text{ 或 } a=-2$$

当 $a=5$ 时 $A=\{x|x^2-5x+6=0\}=\{2, 4\}$, 但此时 $A\cap C=\{2\}\neq\varnothing$ 与条件不符，故舍去.

当 $a=-2$ 时，$A=\{x|x^2+2x-15=0\}=\{-5, 3\}$, 此时 $A\cap B=\{3\}\neq\varnothing$, $A\cap C=\varnothing$, 适合条件，故 $a=-2$ 为所求.

【说明】 在一定情况下，须将求出的结果进行检验，才能获得正确结论，这是解数学题时经常要注意的，由此体现了数学思维的严密性。

例1-5 选择

（1）设全集为R，$f(x)=\sin x$，$g(x)=\cos x$，$M=\{x|f(x)\neq 0\}$，$N=\{x|g(x)\neq 0\}$，那么集合$\{x|f(x)g(x)=0\}$等于（　　）.

$(A)\overline{M}\cap\overline{N}$　$(B)\overline{M}\cup N$　$(C)M\cup\overline{N}$　$(D)\overline{M}\cup\overline{N}$

（2）设全集$I=\{(x,y)|x,y\in R\}$，集合$M=\{(x,y)|\frac{y-3}{x-2}=1\}$，$N=\{(x,y)|y\neq x+1\}$，那么$\overline{M\cup N}$等于（　　）.

$(A)\varnothing$　$(B)\{(2,3)\}$　$(C)(2,3)$

$(D)\{(x,y)|y=x+1\}$

【分析】(1)很明显，须从化简M和N入手，再求出$\overline{M}$和$\overline{N}$后方可判断。

(2)将所给集合的元素看作平面直角坐标系中点的坐标，采用数形结合——图象法，有利于找出正确的结论。

解 (1) $M=\{x|f(x)\neq 0\}=\{x|\sin x\neq 0\}=\{x|x\neq n\pi,\ n\in Z\}$，

$N=\{x|g(x)\neq 0\}=\{x|\cos x\neq 0\}$

$=\{x|x\neq n\pi+\frac{\pi}{2},\ n\in Z\}$.

$\therefore\overline{M}=\{x|x=n\pi,\ n\in Z\}$，

$\overline{N}=\{x|x=n\pi+\frac{\pi}{2},\ n\in Z\}$，

而集合

$$\{x|f(x)g(x)=0\}=\{x|\sin x\cos x=0\}=\{x|x=n\pi$$

或$x=n\pi+\frac{\pi}{2}\quad n\in Z\}=\overline{M}\cup\overline{N}$。故选$(D)$。

(2) 将全集I的元素(x, y)看作直角坐标平面上点的坐标，则全集I所表示的图形就是坐标平面。集合

$$M=\{(x, y)|\frac{y-3}{x-2}=1\}=\{(x, y)|y=x+1, x\neq 2\}.$$

由此知M所表示的图形是直线$y=x+1$，但除去点(2, 3)。N表示的图形是坐标平面除去直线$y=x+1$的部分。因此$M\cup N$表示的图形是除去点(2, 3)的坐标平面，从而知$\overline{M\cup N}=\{(2, 3)\}$，故选$(B)$。

【说明】数形结合的观点和方法是数学的基本观点和方法，利用数形结合，往往可以使问题化繁为简，化难为易，迅速找出解题途径。

练　习　一

1.选择：

(1) 下列各式不正确的是(　　)。

(A) $0\in\{0\}$　　(B) $\varnothing\subset\{\varnothing\}$.

(C) $\varnothing\in\{0\}$　　(D) $\{x|x^2+3x+2=0\}\neq\{(-1, -2)\}$

(2) 已知集合A、B且$A\subset B$，则下列等式成立的是(　　)。

(A) $\overline{A}\cap B=\varnothing$　　(B) $A\cap\overline{B}=\varnothing$

(C) $\overline{A}\cap\overline{B}=\varnothing$　　(D) $A\cap B=\varnothing$

(3) 设$I=\{x \mid x\leqslant 8,\ x\in N\}$，若$A\cap\overline{B}=\{1,\ 8\}$，$\overline{A}\cap B=\{2,\ 6\}$，$\overline{A}\cap\overline{B}=\{4,\ 7\}$，则下列结论中正确的是(　　)．

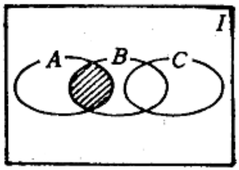
(A) $A=\{1,\ 8\}$，$B=\{2,\ 6\}$

(B) $A=\{1,\ 3,\ 5,\ 8\}$，$B=\{2,\ 3,\ 5,\ 6\}$

(C) $A=\{1,\ 8\}$，$B=\{2,\ 3,\ 5,\ 6\}$

(D) $A=\{1,\ 3,\ 8\}$，$B=\{2,\ 5,\ 6\}$

(4) 设集合I、A、B、C的关系如图所示，并记$\overline{A}$、$\overline{B}$、$\overline{C}$为A、B、C在I中的补集，则图中阴影部分表示的集合是(　　)．



第(4)题

(A) $\overline{C}\cap B$　　(B) $\overline{A}\cap\overline{C}$

(C) $(\overline{A\cap B})\cap C$　　(D) $\overline{\overline{A}\cup\overline{B}}$

(5) 下列六个命题：

①若$A\cap B=\varnothing$，则$\overline{A}\cup\overline{B}=I$；

②若$A\cap B=\varnothing$，则$A=B=\varnothing$；

③若$A\cup B=I$，则$\overline{A}\cap\overline{B}=\varnothing$；

④若$A\cup B=I$，则$A=B=I$；

⑤若$A\cap B=I$，则$A=B=I$；

⑥若$A\cup B=\varnothing$，则$A=B=\varnothing$．

其中不正确的命题(　　)．

(A) 没有　　(B) 仅②和④

(C) 仅⑤和⑥　　(D) 仅①和③

2.填空：

(1) 设$I=\{$绝对值小于5的整数$\}$，$M=\{-1, 0, -2, -4\}$，$N=\{2, 0, 3, -4\}$，$P=\{0, 1, 2, 3\}$，则

①$M\cap N=$______　　②$M\cup N=$______

③$M\cup P=$______　　④$M\cap P=$______

⑤$\overline{M}\cup\overline{N}=$______　　⑥$\overline{M\cup P}=$______

(2) 已知集合$A=\{a^2, a+1, -3\}$，$B=\{a-3, 2a-1, a^2+1\}$，若$A\cap B=\{-3\}$，则a的值是______。

(3) 已知$A=\{x|x^2+3x+2=0\}$，$B=\{-1, -2, 0\}$，则A与B的关系是____；又若$C=\{x|x\subset B\}$，用列举法表示集合$C=$____。

(4) 设$A=\{x|x=2m, m\in Z\}$，$B=\{x|x=2m+1, m\in Z\}$，$I=Z$，则$\overline{A}=$____，$\overline{B}=$____。

(5) 设$A=\{(x, y)|x+y=0\}$，$B=\{(x, y)|x+1=0\}$，$C=\{(x, y)|(x+y)^2+(x+1)^2=0\}$，试用$A$、$B$表示$C$，则$C=$____。

3．设$I=R$，$A=\{x|-2<x<3\}$，$B=\{x|a<x<9+a\}$。问当a取什么值时，下列各式分别成立。

(1) $A\subset B$　　(2) $A\cap B\neq\varnothing$

(3) $A\cap B=\varnothing$　　(4) $\overline{A}\cup B=\overline{A}$

4．设$A=\{-1, 1\}$，$B=\{x|x^2-2ax+b=0, x\in R\}$，$B\neq\varnothing$，且$B\subseteq A$，求$a$，$b$。

5．已知$A=\{x||x+1|<m\}$，$B=\{x|\frac{x^2+2x-8}{x^2+2x+4}<0\}$，问$m$取什么值时(1)$A=B$；(2)$A\subset B$

二　映射与函数

知识点的分析与归纳

映射与函数的概念是数学的基本概念，这是基础知识的重点，同时也是难点。为了在比较中了解和掌握有关概念的涵义以及相互之间的区别和联系，将映射、一一映射、逆映射．函数、反函数、函数的单调性、函数的奇偶性等概念及相互关系，相对集中地分析与归纳，对系统地理解和掌握这些重要内容是有利的。

映射是特殊的对应，只有"多对一"和"一对一"的对应才是映射．它包括三部分：已知集合A和集合B，以及从集合A到集合B的对应法则f，在对应法则f的作用下，对集合A中的任何一个元素a（原象），在集合B中都有唯一的元素b（象）和它对应．这样的对应就叫做从集合A到集合B的映射。

一一映射是特殊的映射，用既满足"单射"又满足"满射"条件的映射是一一映射来说明，就比较容易了解这一概念。

逆映射存在的前提是给定了一个一一映射f：$A\to B$．对于这个已给的映射，得出一个"新"的映射f^{-1}：$B\to A$．在这"新"的映射作用下，对于B中每一个元素b，使b在A中的原象a和它对应．这样的"新"映射就叫做映射f：$A\to B$的逆映射．显然，从对应法则来讲，f和f^{-1}是互逆的．只有对于一一映射，我们才研究它的逆映射．

在掌握了函数的"变量关系"定义（即初中教材中的定义）后，再运用映射概念解释函数，将会加深对函数概念的理解．事实上，函数就是一类特殊的映射．对于映射f：$A\to B$

附加条件①集合A、B都是非空数集，②且B的每一个元素都有原象，那么这样的映射f：$A\to B$就是定义域A到值域B上的函数。

对于函数符号$y=f(x)$，要能理解。在给定的条件下，会求函数的解析式。

反函数的概念是十分重要的概念，但这是一个难点，要从逆映射的观点来刻划反函数概念，方显得简洁明了，并能由此领悟到求反函数的一般方法，即先把函数式$y=f(x)$看作以x为未知数的方程，从中解出$x=f^{-1}(y)$，再改写为$y=f^{-1}(x)$。要掌握互为反函数图象间的关系：关于直线$y=x$成轴对称。

函数的单调性，反映了函数值的变化趋势，它在研究函数性质及图象方面具有重要意义。由于中学阶段数学中的函数，主要讲的是连续函数或者是分段连续函数，因此着重理解和掌握课本中关于增函数和减函数（在区间上）定义。即函数的单调性是确定在区间上的。在此基础上能判断一些简单函数的单调性和求单调区间。

函数的奇偶性，这是一类特殊函数的性质，要理解和掌握。并能判断一些简单函数的奇偶性，利用函数的奇偶性描绘函数的图象。

范例辨析

例1-6 若集合$X=\{x|x=k+\frac{1}{2},\ k\in Z\}$，$Y=\{y|y=\frac{k}{4},\ k\in Z\}$，求集合$X$到$Y$是一一映射的对应法则$f$。

解 由集合X，得$k=x-\frac{1}{2}$，代入$y=\frac{k}{4}$式子中，得$y=\frac{1}{4}(x-\frac{1}{2})$，从而求得一个对应法则$f$：$x\to y=\frac{1}{4}(x-$

$\frac{1}{2}$)，在这个对应法则作用下，集合X到Y是一一映射：f：

$$X \xrightarrow{x \to y=\frac{1}{4}\left(x-\frac{1}{2}\right)} Y.$$

【说明】由一一映射概念可知所求法则并不是唯一的。例如对应法则g：$x \to y=\frac{1}{4}\left(x+\frac{1}{2}\right)+1$，这个对应也是集合$X$到集合$Y$上的一一映射。

例1-7 求$f(x)$：

(1) 已知$f(2x-1)=\dfrac{1}{2x^2-2x+1}$，求$f(x)$；

(2) 已知$f(x)$是定义在实数集R上的函数且满足$f(0)=1$，且对任意实数a,b，有 $f(a-b)=f(a)-b(2a-b+1)$，求$f(x)$。

解 (1) 令$u=2x-1$，则$x=\frac{1}{2}(u+1)$，于是得$f(u)=$

$$\frac{1}{2\left[\frac{1}{2}(u+1)\right]^2-2\times\frac{1}{2}(u+1)+1}=\frac{2}{u^2+1},$$

$$\therefore f(x)=\frac{2}{x^2+1}.$$

(2) $\because f(a-b)=f(a)-b(2a-b+1), a, b\in R$，

$\therefore$令$x=a=b$，则得$f(0)=f(x)-x(x+1)$，又$f(0)=1$，

$\therefore f(x)-x(x+1)=1$，$\therefore f(x)=x^2+x+1$即为所求的函数。

【说明】当已知复合函数求原函数时，常常需要解含有未知数函数的等式，在这方面常用的基本方法是利用换元解方程（组）的解法，第(2)题是利用特殊值的解法。而“特殊值法”是解数学题的巧妙有效之法。