W & W Education

水木艾迪
教育丛书

考研数学应试导引与进阶

线性代数
通用辅导讲义

俞正光 刘坤林 谭泽光 葛余博 编著

清华大学出版社

W&W Education 水木艾迪教育丛书

考研数学应试导引与进阶

线性代数

通用辅导讲义

俞正光 刘坤林 谭泽光 葛余博 编著

清华大学出版社
北京

内容简介

本书是作者根据新的研究生入学统一考试大纲，结合多年的教学经验和考研辅导经验精心编写而成. 主要内容包括行列式、矩阵代数、矩阵的初等变换与矩阵的秩、向量组的线性相关性、线性方程组、向量空间、特征值与特征向量及二次型等. 每部分内容均按照“知识综述与应试导引”、“问题集粹”、“自测与模拟题”进行编排.

本书主要针对参加研究生入学考试的理工类与经济类考生，也可作为大学本科和专科学生的教学辅导用书.

图书在版编目(CIP)数据

线性代数通用辅导讲义/俞正光等编著. 北京：清华大学出版社，2006. 4

(考研数学应试导引与进阶)

ISBN 7-302-12874-X

Ⅰ. 线… Ⅱ. 俞… Ⅲ. 线性代数一研究生一入学考试一自学参考资料 Ⅳ. O151. 2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 036792 号

出 版 者：清华大学出版社 **地 址**：北京清华大学学研大厦

http://www.tup.com.cn **邮 编**：100084

社 总 机：010-62770175 **客户服务**：010-62776969

组稿编辑：刘 颖

文稿编辑：霍志国

印 装 者：北京市清华园胶印厂

发 行 者：新华书店总店北京发行所

开 本：185×260 **印张**：12.75 **字数**：326 千字

版 次：2006 年 4 月第 1 版 2006 年 4 月第1 次印刷

书 号：ISBN 7-302-12874-X/O・527

印 数：1～4000

定 价：19.90 元

从 书 序

全国硕士研究生入学统一考试作为一种选拔性考试,并不同于等级考试.命题工作人员的任务是结合对基本知识点的理解与不同知识点的交叉运用能力,在试题中设置不同深度的“陷阱”,以求从能力、水平上将庞大的考生队伍拉开档次,进而实现国家选拔人才的目的.考生的任务是在全面准确地理解知识系统的前提下,掌握识破命题“陷阱”的能力,力争在考场上以居高临下的知识洞察力与良好的应试状态,一举成功.

学习数学需要培养悟性,应试考研数学需要一定的数学知识洞察力.所谓悟性或洞察力,是指对数学基本概念的深入理解与准确把握.而这种理解与把握,首先要求对基本概念与基本知识点的理解要准确、完整,进一步才是掌握知识的系统性、交叉性与灵活性.没有对基本概念与基本知识点理解的准确性与完整性,就谈不上掌握知识的系统性及灵活运用的能力,当然更谈不上解题的思路与技巧.

本套《考研数学应试导引与进阶》作为考研数学的通用辅导讲义,其宗旨是:“为考生面对考试造就一种居高临下的知识洞察力和感觉良好的临场状态.”这也是水木艾迪考研辅导班的教学宗旨.

我们一贯强调,首先注重知识的基础性、系统性与完整性.从分析历届的试题组成来看,完全基础性题目一般占 60 分以上(满分 150 分),并且基本知识点在综合题目中也占有相当的分量,基础性知识点的失误往往导致选错综合题目的切入点,最后造成的是全局性错误.相反,如果对基本知识点理解准确、全面、系统,则对题目的切入点就会准确无误,即使解答过程中有个别错误,也往往是局部错误,损失不大.以一种加权的估计来分析,基本知识点在全部试卷中所占的比重可高达 120 分.从阅卷过程中所反映出的问题来看,考生出现的大量错误是由于对基本概念与知识点理解的不准确或不完整,甚至是对基本知识点理解的扭曲所造成的.

对于基本知识点的理解与学习,应首先做到理解上的准确性、全面性,其次是系统性与交叉性.还应注意基本概念的背景和各个知识点间的相互关系,适量做题,少做难题,不做偏题是可取之策.对与基本知识点相关的基本题目涉及的方法与技巧,要多总结与分析,力争做到举一反三,以一当十,这样的训练会促使考生的能力与技巧成熟起来,即使遇到难题,也会容易地找到切入点与思路.

《考研数学应试导引与进阶》以最简捷的篇幅梳理数学三门课程中的若干基本知识点,以及不同知识点之间的内在联系,配合适量典型的基本题型与知识交叉运用题型,引导读者高效率地做到对基本概念与基础知识点理解的准确性与完整性,并逐渐过渡到对掌握知识的系统性与交叉运用能力的训练.通过对基本题目涉及的方法与技巧的总结与分析,对综合题目中知识点交叉模式的了解与熟悉,以达到对这些内容具有敏感性.全套讲义每个章节具有统一的编排格式:

[**知识综述与应试导引**] 依据全国硕士研究生入学统一考试大纲中要求的重点,对知识模块给予简短的综述,突出重点,详解难点,指出读者容易忽略的薄弱环节及存在的弱点,必要时给出识破命题“陷阱”的特别提示.

[**问题集粹**] 以学生提问的方式,由编者设计覆盖基本知识点与概念交叉运用能力的若干问题,配以解答与导引,同时针对此类问题,配合若干典型例题,力图使读者牢固掌握相应知识点及具有处理相关题型的能力.

[**自测与模拟题**] 每一讲后配置典型练习题,给读者自我检测及训练发挥的空间,充分体现教学双向互动的过程.在书后给出练习题的解答、答案与提示(做题时请不要先看解答或答案)供读者核实自己的解答.

书中所有例题与练习题,都是经过编者精心研究与讨论,进而设计与编排所成.这一工作是基于作者在清华大学与清华大学考研辅导班的多年教学经验积累,以及对全国硕士研究生入学统一考试要求与试题类型深入研究的结果,具有重要的典型性与代表性.对于这些例题与练习题,读者可视自身情况选读或选做,但应注意两点:一是立足于独立思考与亲自动手练习,二是应将每一个题目作为一类问题,以达到触类旁通的目的.

参与本书编写的老师为清华大学在职教师,他们是一个教学与研究成绩卓著的教授群体,长期担任水木艾迪考研辅导班主讲,突出了双向了解的优势:了解全国硕士研究生入学统一考试大纲与命题走向,了解考生的知识状况与实际需求.他们有许多教材与专著出版,广大考生给予了很高的评价,他们也愿做广大考生和学生的良师益友.基于长期丰富的教学研究与授课经验积累,经过对全国硕士研究生入学考试大纲与辅导教学进行长期专门的深入研究,倾心编写出这套讲义,真诚希望为在读大学生的学习,以及参加研究生入学统一考试的考生送去一份智慧,提供一份帮助.

本教材的读者范围包括参加全国硕士研究生入学统一考试的考生,包括数学试卷一、二、三、四的全体应试者,大学本科在读学生.

特别指出的是,不少人认为经济类考生只学过经济类高等数学就够了,其实这是一种误导.试卷三、四的历年题目表明,题目的题型与难度都与试卷一、二相当,并且与试卷一、二共用题目的比例逐年提高.那些少量含有经济术语的题目(2005—2006 年完全没有此类题目)不会成为答卷障碍,如最大利润问题与最小成本问题等不过是一般理工科数学教学中的普通例题而已.如果考生有较好的理工科数学基础,应答试卷三、四将不会遇到任何困难,2004—2006 年的数学试卷更是进一步说明了这一特点.

清华大学出版社与北京水木艾迪教育培训学校为本教材的出版做了大量有效的工作,清华大学数学科学系李津教授,以及许多老师对本教材的编写工作给予真诚的鼓励与支持,编者在此向他们真诚致谢.

限于作者水平和时间仓促,对书内的疏漏与不当之处,敬请读者批评指正,以便重印和再版时予以改正.

编　者

2006 年 2 月于清华大学

作者简介

刘坤林教授

清华大学责任教授，从事基础数学与应用数学的教学与研究工作，获国家精品课程奖二等奖与国家教学成果奖二等奖，两次获清华大学教学优秀奖. 研究方向：控制理论，系统辨识与随机系统建模及预测，并行计算. 1994—1995 年在美国 Texas A&M University 与 Duke University 任访问研究教授并讲学. 发表学术论文 30 多篇，著有教材《工程数学》，《系统与系统辨识》，《微积分》，主编《大学数学——概念方法与技巧》，《大学数学清华考研经典备考教程》，《高等数学典型题题典——考研数学应试能力进阶》等书籍. 先后 7 次获国家及省市部级科学技术进步奖. 长期担任水木艾迪考研辅导班主讲，清华大学 MPA 考前培训班主讲. 对全国硕士研究生入学统一考试大纲与教学要求有深入的研究. 讲课特点：深入浅出，富有启发性，教学中的选题对考研具有极强的跟踪性，对概念的阐述精辟准确，形象生动，了解学生，针对性强，普遍受到同学欢迎.

历任中国工业与应用数学学会常务理事，副秘书长. 系统与控制专业委员会委员，《控制理论及其应用》特邀审稿专家. 国家人事部编《中国专家大辞典》(卷一)收录专家.

谭泽光教授

清华大学责任教授，清华大学分析系列课程负责人. 长期在清华大学从事数学基础课程教学和应用数学及运筹学方面的科研工作，曾在奥地利 Graz University 任访问教授. 获国家精品课程奖二等奖与国家教学成果奖二等奖. 长期担任水木艾迪考研辅导班数学主讲. 对全国硕士研究生入学统一考试大纲与教学要求有深入的研究，讲课风格热情幽默，重点突出，技巧性强，深入浅出，富有启发性，生动精辟，深受同学欢迎. 学员评价听谭老师的课“是一种享受，收获很大”. 曾任北京地区考研数学阅卷组组长. 曾负责多项科研项目，发表学术论文 20 多篇，并编著《微积分》、《大学数学——概念方法与技巧》、《大学数学清华考研经典备考教程》、《数学规划》等图书. 先后获省部级以上奖励 4 次，1992 年获国家科技进步二等奖.

任《高校应用数学学报》编委. 1997 年开始担任国家工科基础课程教学(清华数学)基地负责人，投入较多精力从事数学教改研究工作，2001 年获国家教学改革成果二等奖.

俞正光教授

清华大学责任教授，清华大学代数系列课程负责人. 从事组合图论的研究，发表学术论文10多篇. 曾在加拿大 Calgary University 任访问教授. 任《清华大学学报》编委. 主编《线性代数与解析几何》、《理工科代数基础》、《大学数学——概念方法与技巧》等图书. 长期担任水木艾迪考研辅导班数学主讲和 MBA 入学辅导数学主讲. 对全国硕士研究生入学考试大纲与教学要求有深入的研究，讲课风格深入浅出，条理规范，重点突出准确，受到同学一致欢迎. 1997 年开始担任国家工科基础课程教学(清华数学)基地负责人，从事数学教改研究工作.

曾参加编写由全国工商管理硕士研究生入学考试研究中心组织的《MBA 联考考前辅导教材》，主编《全国工程硕士研究生入学考试数学考试大纲及考前辅导教材》等各类考研数学辅导教材.

葛余博教授

清华大学数学科学系教授，在随机过程及其应用方面的科研工作多次获奖，长期担任概率统计、随机过程等课程的主讲教学工作，在教学研究和实践中积累了大量宝贵经验. 水木艾迪考研辅导班概率统计主讲，对全国硕士研究生入学考试大纲与教学要求有深入的研究，讲课风格：擅长抓住概念实质、融会贯通，启发式教学，利于熟练掌握并灵活运用知识，条理规范，重点突出，编写《随机数学方法》等教材. 近几年的辅导教学多次命中考研真题，受到同学一致欢迎.

前 言

线性代数是全国硕士研究生入学统一考试数学科目的一个重要组成部分，在数学一和数学二中约占数学考试科目的20%，在数学三和数学四中约占数学考试科目的25%. 题型一般是一个填空，两个选择和两个解答题，或两个填空，一个选择和两个解答题. 根据历年考题的分析，试题内容覆盖面较广，基本覆盖了考试大纲中规定的大部分考试内容，试题一般都比较综合，每个题都含有二三个知识点，着重考察对基本概念的理解以及综合运用知识解决问题的能力. 这几年更有一些线性代数与解析几何、微积分结合的综合试题，以及线性代数应用问题的试题出现. 因此系统地理解线性代数的基本概念和基本理论，掌握线性代数的基本方法，提高抽象思维能力、逻辑推理能力、空间想象能力、符号运算能力，提高综合运用所学的知识分析问题和解决问题的能力，是成功应考的保证.

线性代数是一门逻辑性很强的课程. 在线性代数中要研究许多新的对象，它们都有自己的运算规则，这些运算规则有的和过去习惯的数的运算很相似，有的又极不相同，因此在复习时要善于比较，通过比较澄清概念，总结规律. 线性代数的概念很多很抽象，概念和概念之间联系非常紧密. 要学会从不同的角度、不同的观点来认识和理解各个概念，并运用这些知识去解决问题. 线性代数的解题方法往往不是惟一的，解题的思路和技巧也往往是多种多样的，只有掌握好基本概念，做到融会贯通，才能达到举一反三.

本书通过提问的方式，帮助读者复习和整理基本概念，总结解题的方法和技巧. 有的问题用不止一种解法来启发读者的解题思路，提高分析问题和解决问题的能力. 线性代数的内容由于前后联系紧密，纵横交错，尤其作为考研试题综合性都很强，因此本书在编写上与一般教材不同，不拘泥于传统的体系，而是采取立体式的结构，例如，在写行列式时就会涉及矩阵、向量、线性方程组、特征值甚至二次型，而在后面章节中，也会和行列式联系. 为便于读者复习，在相关部分通过“相关链接”一栏引导读者进行有关内容的复习.

由于时间紧促，考虑不周造成的疏漏与不妥之处实属难免，敬请读者批评指正.

作 者

2006 年 3 月

目　录

第1讲　行　列　式

知识综述与应试导引

行列式是线性代数的基础，是研究线性代数主要问题的一种有力工具. 例如，在讨论矩阵的可逆性、矩阵的秩、向量组的线性相关性、线性方程组、矩阵的特征值与特征向量以及判别二次型的正定性等问题中都要用到行列式. 它的主要内容有行列式的概念和基本性质，行列式按行展开定理等. 这一讲的要求是了解行列式的概念，掌握行列式的性质，会应用行列式的性质和行列式按行展开定理计算行列式. 近几年，行列式也有和微积分结合的综合考题，但万变不离其宗，解决这类问题的关键仍然是行列式的基本概念、性质和计算方法.

1.1　行列式的概念

n 阶行列式是一个数，是由 n^2 个数排成 n 行 n 列的方阵

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

所决定的.

例如，二阶行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1\times 4 - 2\times 3 = -2.$$

二阶行列式的一般计算公式是

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}\times a_{22} - a_{12}\times a_{21}.$$

这个数是由两项的和构成的，每一项又是由取自不同行不同列的两个数的乘积组成的，且其中一项为正，一项为负.

三阶行列式的计算公式是

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\times \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\times \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\times \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

在这个式子中，如果把二阶行列式展开，就得到 6 项，每一项由取自不同行不同列的 3 个数的乘积组成，其中 3 项为正，3 项为负.

在 n 阶行列式中，去掉元素 a_{ij} 所在的第 i 行和第 j 列，剩下的是一个 $n-1$ 阶行列式，叫做 a_{ij} 的**余子式**，记作 M_{ij}. 那么三阶行列式就可写作：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}M_{11} - a_{12}M_{12} + a_{13}M_{13}.$$

再进一步，称

$$A_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}$$

为 a_{ij} 的**代数余子式**，则三阶行列式就可写作：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}.$$

同样，n 阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \cdots + a_{1n}A_{1n}.$$

将其中的代数余子式全部展开，得到的是一个数，它是 $n!$ 项的代数和，其中每一项都是由取自不同行不同列的 n 个数的乘积组成，其中一半是正项，一半是负项.

显然，如果在一个行列式中有的元素是字母 x，那么行列式就是关于 x 的一个多项式.

例 1.1 $\begin{vmatrix} x & 1 & 0 \\ 0 & x & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = x\begin{vmatrix} x & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = x(x-1) = x^2 - x.$

由 n 阶行列式的定义，容易计算以下例子.

例 1.2 $\begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & n \end{vmatrix} = 1\times\begin{vmatrix} 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & n \end{vmatrix} = \cdots = n!.$

例 1.3 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \cdots = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$

形如例 1.2 的行列式叫对角行列式，形如例 1.3 的行列式叫上三角行列式，这两个例子可以当公式用. 与例 1.3 类似的有下三角行列式：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

1.2 行列式的性质

行列式最基本的性质有以下4个.为书写方便,下面的结果用三阶行列式给出,实际上对n阶行列式成立.

性质1 行列式中行列互换,其值不变.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

这个性质说明,对于行成立的性质,对于列也同样成立,所以,以下的性质将“行”改成“列”也成立.

性质2 行列式中两行(列)对换,其值变号.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

性质3 行列式中如果某行(列)元素有公因子,可以将公因子提到行列式外.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ ka_{21} & ka_{22} & ka_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

性质4 行列式中如果有一行(列)的每个元素都由两个数之和组成,行列式可以拆成两个行列式的和.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & a_{23}+b_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

由以上4条基本性质,还能推出下面几条性质:

性质5 行列式中如果有两行(列)元素对应相等,则行列式的值为0.

性质6 行列式中如果有两行(列)元素对应成比例,则行列式的值为0.

性质7 行列式中如果有一行(列)元素全为0,则行列式的值为0.

性质8 行列式中某行(列)元素的k倍加到另一行(列),其值不变.

行列式主要依靠这些性质来简化计算,所以这8个性质不但要熟记,还要熟练应用.

例1.4 计算$\begin{vmatrix} & & & 1 \\ & & 2 & \\ & \iddots & & \\ n & & & \end{vmatrix}$.

[**分析**] 这个行列式不是对角行列式,但是可以通过换列化作对角行列式.这里要注意阶数n的奇偶性.当n是偶数时,一共要对换$\frac{n}{2}$次;当n是奇数时,一共要对换$\frac{n-1}{2}$次.

[解] $\begin{vmatrix} & & & 1 \\ & & 2 & \\ & \iddots & & \\ n & & & \end{vmatrix} = \begin{cases} (-1)^{\frac{n}{2}} n!, & n \text{ 是偶数}; \\ (-1)^{\frac{n-1}{2}} n!, & n \text{ 是奇数}. \end{cases}$ [解毕]

1.3 行列式的其他常用公式

(1) 范德蒙德(van der Monde)行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leqslant j < i \leqslant n} (a_i - a_j).$$

(2) $\begin{vmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{B} \end{vmatrix} = |\boldsymbol{A}|\,|\boldsymbol{B}|$,其中 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 都是方阵.

(3) $\begin{vmatrix} \boldsymbol{0} & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{0} \end{vmatrix} = (-1)^{mn}\ |\boldsymbol{A}|\,|\boldsymbol{B}|$,其中 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶方阵,$\boldsymbol{B}$ 是 m 阶方阵.

上面两个公式还可以推广为

(4) $\begin{vmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{B} \end{vmatrix} = |\boldsymbol{A}|\,|\boldsymbol{B}|$,其中 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶方阵,$\boldsymbol{B}$ 是 m 阶方阵,$\boldsymbol{C}$ 是 $m \times n$ 的矩阵.

或 $\begin{vmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{C} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{B} \end{vmatrix} = |\boldsymbol{A}|\,|\boldsymbol{B}|$,其中 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶方阵,$\boldsymbol{B}$ 是 m 阶方阵,$\boldsymbol{C}$ 是 $n \times m$ 的矩阵.

(5) $\begin{vmatrix} \boldsymbol{C} & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{0} \end{vmatrix} = (-1)^{mn}\ |\boldsymbol{A}|\,|\boldsymbol{B}|$,其中 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶方阵,$\boldsymbol{B}$ 是 m 阶方阵,$\boldsymbol{C}$ 是 $n \times m$ 的矩阵.

或 $\begin{vmatrix} \boldsymbol{0} & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{C} \end{vmatrix} = (-1)^{mn}\ |\boldsymbol{A}|\,|\boldsymbol{B}|$,其中 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶方阵,$\boldsymbol{B}$ 是 m 阶方阵,$\boldsymbol{C}$ 是 $m \times n$ 的矩阵.

例 1.5 计算 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 4 & 9 \\ 1 & -1 & 8 & 27 \end{vmatrix}$.

[解] 这是一个典型的范德蒙德行列式,直接套用公式,得到

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 4 & 9 \\ 1 & -1 & 8 & 27 \end{vmatrix} &= (-1-1)(2-1)(3-1)[2-(-1)][3-(-1)](3-2) \\ &= -2 \times 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 1 \\ &= -48. \end{aligned}$$

[解毕]

例 1.6　计算 $\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & \iddots & \vdots & \vdots \\ n-1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & n \end{vmatrix}$.

［**解**］　这是形如 $\begin{vmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{B} \end{vmatrix}$ 的行列式，可以套用公式：

$$\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & \iddots & \vdots & \vdots \\ n-1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \iddots & \vdots \\ n-1 & \cdots & 0 \end{vmatrix} \times n$$

$$= \begin{cases} (-1)^{\frac{n-1}{2}} n!, & n \text{ 是奇数；} \\ (-1)^{\frac{n-2}{2}} n!, & n \text{ 是偶数.} \end{cases}$$

［解毕］

例 1.7　计算 $\begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & a_2 & b_2 & 0 \\ 0 & b_3 & a_3 & 0 \\ b_4 & 0 & 0 & a_4 \end{vmatrix}$.

［**分析**］　表面上看，该行列式和前面提到的几个行列式不同，但是可以通过换行换列化作形如 $\begin{vmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{B} \end{vmatrix}$ 的行列式. 先换第 2 列和第 4 列，再换第 2 行和第 4 行.

［**解**］

$$\begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & a_2 & b_2 & 0 \\ 0 & b_3 & a_3 & 0 \\ b_4 & 0 & 0 & a_4 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_2 & a_2 \\ 0 & 0 & a_3 & b_3 \\ b_4 & a_4 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 0 & 0 \\ b_4 & a_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & b_3 \\ 0 & 0 & b_2 & a_2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ b_4 & a_4 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ b_2 & a_2 \end{vmatrix} = (a_1 a_4 - b_1 b_4)(a_2 a_3 - b_2 b_3).$$

［解毕］

1.4　行列式的计算

行列式计算的主要思路是利用行列式的性质和展开定理，化繁为简，化未知为已知，化高阶为低阶. 所谓化繁为简，就是利用性质将非零的元素消成零，行列式中 0 越多就越容易计算. 从前面看到，行列式中有几个很特殊的行列式，例如，对角行列式、三角行列式、范德蒙德行列式等. 它们的结果是已知的，可以拿来当公式用. 所谓化未知为已知，就是把行列式化成这些特殊的行列式. 一般来说，低阶的行列式总是比高阶的行列式容易计算，所以利用性质将行列式中的一行或一列中除一个元素外其余元素全化为 0，利用展开定理就可以化作低一阶的行列式，达到简化的目的.

例 1.8 计算 $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & x-1 \\ 1 & -1 & x+1 & -1 \\ 1 & x-1 & 1 & -1 \\ x+1 & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$.

［**分析**］ 在这个行列式中，每一列各元素的常数项都相同，利用性质可以消出很多0，然后求解.

［**解法Ⅰ**］

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & x-1 \\ 1 & -1 & x+1 & -1 \\ 1 & x-1 & 1 & -1 \\ x+1 & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & x \\ 1 & 0 & x & 0 \\ 1 & x & 0 & 0 \\ x+1 & x & -x & x \end{vmatrix}$$

$$= x^3 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ x+1 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= x^3 \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ x & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= x^4.$$

［解毕］

［**解法Ⅱ**］

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & x-1 \\ 1 & -1 & x+1 & -1 \\ 1 & x-1 & 1 & -1 \\ x+1 & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & x \\ 1 & 0 & x+1 & x \\ 1 & x & 1 & 0 \\ x+1 & x & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= x^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & x+1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ x+1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= x^2 \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & x+1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ x+1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= x^2(-1)^{2\times 2} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x+1 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x+1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= x^2(1-x-1)^2$$

$$= x^4.$$

［解毕］