世界几何名题趣谈

SHI JIE JIHE MING TI QU TAN

陈通鑫　何怡生

出版社

世界几何名题趣谈

陈通鑫　何怡生

河北教育出版社

世界几何名题趣谈

陈[illegible]鑫　何怡生

河北教育出版社出版（石家庄市北马路45号）
河北省邮电印刷厂印刷　河北省新华书店发行

787×1092毫米　1/32　2.875印张62.000字　1989年12月第1版
1989年12月第1次印刷　印数：000001—2,003定价：0.90元
ISBN 7-5434—0492—3/G·407

说　　明

《世界几何名题趣谈》是一本普及性的读物。本书介绍了用现代数学观点解决世界几何名题的历史演变过程，其中，给出了正十七边形的作法，解决了三等分任意角等尺规作图不能的问题。本书深入浅出，通俗易懂，具有一定的趣味性，可供数学爱好者阅读。原书在美国发行以后，受到了读者的欢迎。英国和加拿大已再版。

本书作者　*Benjamin Bold*

译　者　陈通鑫　何怡生

审稿人　张鸿顺

目　　录

一、公主的难题

公主准备在一条小河上，新建一座圆形的别墅(如图1-1)要求居室建在河面的中心上，小河从居室下流过．再在河的南面与北面的围墙处各开一门，修一条笔直的道路，通过小桥，把南北两门连接起来。公主还要求从居室O到B门与从B门到C桥的路程一样远，如何确定桥的位置呢？

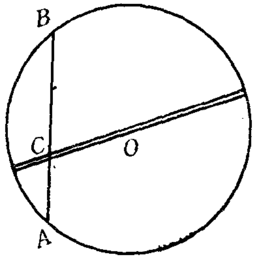

图 1-1

这个看来似乎很简单的问题，却难倒了不少学者，他们试图用“尺规作图”法找出桥的位置，尽管作出了很大的努力，但一直没有成功。

后来阿基米德用了一种方法“解决”了这个问题。

如图1—2，居室在O处，小河为过圆心O的直径EF，A，B分别为南北两门的位置，以A为圆心，AE为半径画弧交圆O于G，用一直尺ST截取$SH=OE$，将尺靠在F点，适当转动和平移，使H落在圆周上，并使S点在GO的延长线上，此延长线与圆O交于I，再以A为圆心，AO为半径画圆弧，与以O为圆心，HI为半径画的圆弧交

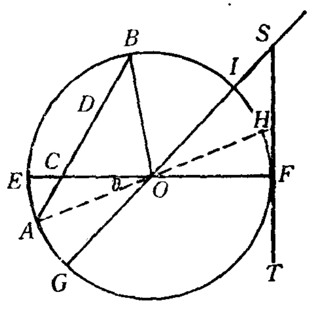

图 1-2

于D。连AD，AD与OE的交点C就是桥的位置，AD的延长线与圆O的交点B就是北门的位置。

虽然阿基米德巧妙地“解决”了这个问题，但他指出这个方法是有缺陷的，缺陷究竟在哪里？

先看看公主提的要求是个什么问题。

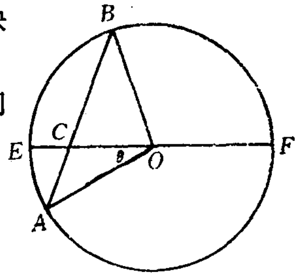

图 1-3

如图1—3，如果$BC=BO$，

那么 $\angle BCO=\angle BOC$，

又 $\angle BCO=\theta+\angle CAO$，

而 $\angle OBC=\angle CAO$，

所以在$\triangle BCO$中，三个内角的和为$(\theta+\angle CAO)+(\theta+\angle CAO)+\angle CAO=\pi$因此，$\angle CAO=\dfrac{\pi-2\theta}{3}$。

公主的要求，实质上是把一个角$(\pi-2\theta)$三等分，再看看阿基米德的方法，见图1-2，

$\angle EOG=2\angle EOA=2\theta$，

所以$\angle FOG=\pi-2\theta$。

又$SH=OE=OH$，因此，$\angle HOI=\angle HSO$。

又$\angle FOG=\pi-2\theta$，

$$\begin{aligned}\text{于是}\angle FOG&=\angle HSO+\angle HFO\\&=\angle HSO+\angle FHO\\&=\angle HSO+\angle HSO+\angle HOI\\&=3\angle HOI.\end{aligned}$$

因此，$\angle HOI=\dfrac{\pi-2\theta}{3}$，

根据作图，$\triangle OAD\cong\triangle HOI$，

所以，$\angle OAD=\angle HOI=\dfrac{\pi-2\theta}{3}$。

由此看来，阿基米德的作图，似乎挑不出什么毛病，它使 $BC=BO$。

原来，阿基米德的作图，不过是将一个角（$\angle FOG$）三等分，那么这个作图的方法，缺陷在哪里呢？先得从“尺规作图”谈起。

“尺规作图”是什么意思？从什么时候开始的，为什么对几何作图要加上这样的限制？

尺规作图，就是在几何作图中．规定只能用无刻度的直尺和圆规这两种工具来作图．尺规作图是从古希腊开始的，在几何学开始形成的时候，希腊的数学家认为为直线和圆是最基本的图形，其它的图形都能由直线和圆构成。直尺和圆规就是直线和圆的具体形象。用这两种简单工具就能作出所需要的图形。用其它的作图工具常常要受人的感觉的影响，如用有刻度的直尺量长度，就会出现误差。而尺规作图还能从理论上保证推理的严密性。到公元前三世纪时，希腊的数学家都倾向于作图只使用直尺和圆规。

希腊数学家最突出的成就是发展了公设系统，尽管欧几里得在几何理论上有缺陷和不足，但是他们的工作提供了一个模式，至今仍为人们所遵循。公元前三世纪时，欧几里得写出了数学名著《几何原本》。这本书的公设系统，从一套未加证明的论断（公设）开始，通过逻辑推理推出一些其它论断（定理）。其中，两条公设是：

1． 经过任意两个不同的已知点，能引且只能引唯一的一条直线；

2． 已知一个点和一个长度，若以此点为中心，以此长度

为半径，可以作一个圆。

这样，用直尺和圆规作图从理论上得到了确认。而用其它的作图工具都被认为是违反公设的。这两条公设构成了欧几里得作图的基础。

正是用无刻度的直尺和圆规这两种工具，希腊数学家作出了许多图形。但是他们也有许多不成功的例子。他们能平分任何一个已知角，但是不能三等分一个任意角；他们能作出一个正方形，使它的面积等于已知的正方形面积的二倍，但不能将一个立方体加倍；他们能作出一个正方形，使它的面积等于已知多边形的面积，但不能“化圆为方”，他们能作出一个边数为3、4、5、6、8和10的正多边形，但不能作出正7边形和正9边形。直到十九世纪末期，数学家们才解答了这些古老的问题。以下各章的目的就是要说明这些问题是如何最终得到解决的。

为什么希腊数学家没能解决这些问题呢？为什么人类经过约两千年的时间，才算把这些问题解决了呢？

希腊数学家的研究工作是循着几何的路径前进的。注意几何学而忽略了代数学的研究，与下面的一些情况有关：

勾股定理告诉我们，假定正方形的边长为一个单位，那么它的对角线长为$\sqrt{2}$个单位。$\sqrt{2}$是什么样的数呢？古希腊数学家无法用整数表示$\sqrt{2}$的值。直到十九世纪，才建立了令人满意的实数理论，从而证明了$\sqrt{2}$为无理数。

由于缺乏实数理论，希腊数学家曾着重作了几何方面的研究，如他们运用了以下的几何作图(图1-4)，论证了公式$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$的正确性。

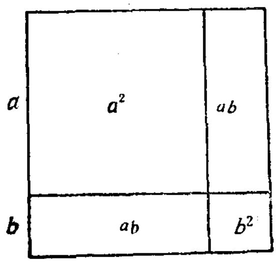

图 1-4

根据前面所述，古希腊数学家，运用几何定理，能够作出由有理数经过有限次加、减、乘、除和求算术平方根等五种运算得出的数量（以线段的长度表示这些数量）。即给出单位长和长度分别为有理数a、b的线段，可以作出$a\pm b$，ab，$\frac{a}{b}$及$\sqrt{a}$。这些也被称为古希腊数学家在数学上的伟大成就。

练　习　1

已知线段a、b，作出$a+b$与$a-b$。

练　习　2

1．已知线段a、b，作出$x=ab$。

2．应用同样的方法作出a^2；$\frac{a}{b}$；$\frac{a^2}{b}$的图形。$\sqrt{a}$的作图法如图1-5所示，以线段LM为直径作出半圆，NP垂直于LM。（P为垂线与半圆的交点），那么$x=\sqrt{a}$。

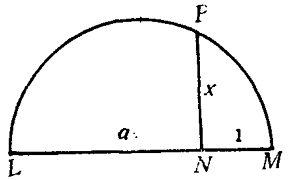

图　1-5

练　习　3

1．应用上图，证明$x=\sqrt{a}$，

2．应用同样的方法可作出$\sqrt{ab}$；$\sqrt[4]{a}$；$\sqrt[8]{a}$的图形。

3．利用勾股定理，作出以下线段，使其等于$\sqrt{2}$；$\sqrt{3}$；$\sqrt{5}$；$\sqrt{17}$。

当一次方程或二次方程的系数为已知线段的长度时，希腊数学家便能够利用上述的作图法作出方程的根的图形。

练 习 4

作出方程$ax+b=c$的根的图形。其中a、b、c为已知的线段长。

为了作出二次方程$x^2-ax+b=0$（$a^2>4b$）的根的图形。可以点$B(O, 1)$与$D(a, b)$的连线BD为圆的直径作一个圆。则点G和F的横坐标为二次方程的根（G，F为圆与x轴的两个交点）。

练 习 5

1. 为什么要限制$a^2>4b$？
2. 说明点G和F的横坐标为方程$x^2-ax+b=0$的根。

提示：圆的方程是

$$\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+\left(y-\frac{b+1}{2}\right)^2=\frac{a^2}{4}+\frac{(b-1)^2}{4}.$$

希腊人利用本节介绍的作图法，在作图问题上取得了相当大的成功。然而，他们也遗留下许多未能解决的问题，有待以后的数学家为之奋斗。下面本书将扼要地介绍许多数学家试图解决并在十九世纪最终解决了这些问题的历史。

练 习 6

已知一个单位长度，作出$x^2+x-1=0$的正数根的图形。

二、尺规作图的准则

用无刻度的直尺和圆规能够作出哪些图形呢？为了回答这个问题，有必要确立一个有关图形可作性的准则。每一个作图问题都给出某些已知元素 a，b，c，……，而要求作出其它元素x，y，z，……，根据该问题的已知条件，我们可以建立一个或多个关于x，y，z为未知数的方程，使它们的系数都用已知元素 a，b，c……来表示。这样，方程的解就能够使我们用已知元素表示未知元素。现举一个简单的例子。假定我们要作一个正方形，使其面积等于一个边长等于 a 的正方形的面积的 2 倍。我们可以用方程

$$x^2=2a^2$$

表达这个问题。

自然，其它问题还可能引出一些高次方程。

我们已经清楚地知道如何作出一次方程或二次方程的根。现在我们要研究作出次数高于 2 的方程的根的可能性，其中尤其感兴趣的是三次方程的根。

首先，我们知道，如果某一几何元素可以从已知元素通过有限次有理运算（加、减、乘、除）和求算术平方根的运算推导出来，则作出该几何元素就是可能的。现在让我们来讨论相反的过程，如果一个图形可以作出，那么所求元素与已知元素的关系如何？容易看出，只有当要求的元素能由已知元素通过有限次有理运算和求算术平方根的运算而得到时，这样的作图才是可能的。

任何作图都由一系列步骤组成，并且每一步都与下列情形有关：

1．两点之间可引一条直线；

2．已知圆心和半径可作一个圆；

3．可求出两条直线，两个圆，或一条直线与一个圆的交点。

我们假定：已知一个坐标系和单位长度，并且所有已知元素都能用有理数表示。我们知道，两个有理数的和、差、积、商（零不能作除数）还是有理数。因此说有理数对于四则运算是封闭的。如果一个数集对四则运算（零不作除数）是封闭的，那么称它为域。我们用F_0表示有理数域。

如果已知两点的坐标$p_1(x_1, y_1)$和$P_2(x_2, y_2)$，则通过P_1，P_2这两点的直线方程为：

$$(y_2-y_1)x+(x_1-x_2)y+(x_2y_1-x_1y_2)=0,$$

或 $$ax+by+c=0.$$

其中$a=y_2-y_1$；$b=x_1-x_2$；

$c=x_2y_1-x_1y_2$。

注意依照约定，x_1，x_2；y_1和y_2均为有理数，于是a, b, c也为有理数。

一个圆心为(h, k)，半径为r的圆的方程是：

$$x^2+y^2-2hx-2ky+h^2+k^2-r^2=0$$

或 $$x^2+y^2+dx+ey+f=0,$$

其中 $d=-2h$，$e=-2k$，

$f=h^2+k^2-r^2$，而且d、e、f均为有理数。求两条直线的交点的坐标仅需要对变量的系数作有理运算。而求一条直线与一个圆的交点的坐标，或两个圆的交点的坐标时，除进行有理运算外，还涉及开平方运算。总括起来，我们可以说，当且仅

当要求元素能从已知元素通过有限次有理运算和求算术平方根运算求得时，用无刻度的直尺和圆规作图才是可能的.

练 习 1

求下列交点的坐标

1. $ax+by+c=0$ 和 $a'x+b'y+c'=0$.

2. $ax+by+c=0$ 和 $x^2+y^2+dx+ey+f=0$.

3. $x^2+y^2+dx+ey+f=0$ 和 $x^2+y^2+d'x+e'y+f'=0$.

如果已知单位长度，所有的有理数，即在域 F_0 中的所有数都能作图，如果 K 是域 F_0 中的固定数，我们能作出 $\sqrt{k}$ 和 $a+b\sqrt{k}$，其中 a 和 b 为域 F_0 中的任意数. 如果 $\sqrt{k}$ 不在域 F_0 中，则我们可以证明：所有形如 $a+b\sqrt{k}$（a，b，k 在域 F_0 中）的数构成一个新域 F_1，且 F_0 是它的子域。

注：一个域的子集，如果仍为一个域，就称为该域的子域。

例如，令 $k=3$，则 $a+b\sqrt{3}$ 组成域 F_1，它包含全部有理数，即 $b=0$ 时的全部数。

为了证明所有形如 $a+b\sqrt{k}$（a，b，k 在域 F_0 中，但 $\sqrt{k}$ 不在域 F_0）的数构成一个域，我们考察：

1. $(a+b\sqrt{k})+(c+d\sqrt{k})=(a+c)+(b+d)\sqrt{k}=e+f\sqrt{k}$.

2. $(a+b\sqrt{k})-(c+d\sqrt{k})=(a-c)+(b-d)\sqrt{k}=m+n\sqrt{k}$.

3. $(a+b\sqrt{k})\times(c+d\sqrt{k})=(ac+bdk)+(ad+bc)\sqrt{k}=r+s\sqrt{k}$.

4. $\dfrac{a+b\sqrt{k}}{c+d\sqrt{k}}\cdot\dfrac{c-d\sqrt{k}}{c-d\sqrt{k}}$

$$=\frac{(ac-bdk)+(bc-ad)\sqrt{k}}{c^2-d^2k}=\frac{ac-bdk}{c^2-d^2k}+\frac{(bc-ad)\sqrt{k}}{c^2-d^2k}$$

$$=u+v\sqrt{k}.$$

由于a、b、c、d、k均为域F_0中的数，其中任何两个有理数的和、差、积、商还是有理数，因此，e、f、m、n、r、s、u、v也是有理数，这样便证明了所有形如$a+b\sqrt{k}$的数构成域F_1，并且它包含F_0作为其子域。但其中有一个细节需要说明，当$a+b\sqrt{k}$除以$c+d\sqrt{k}$时，得到$u+v\sqrt{k}$，这里

$$u=\frac{ac-bdk}{c^2-d^2k},\qquad v=\frac{bc-ad}{c^2-d^2k}.$$

因此，当且仅当$c^2-d^2k\neq 0$时，u和v为有理数。

我们已假定$\sqrt{k}$不在域F_0中，因此$k\neq 0$．同时当我们作除法时，还假定除数不等于0．因此c和d不可能同时等于0，但c或d可以为0．现在我们需要证明：$c^2-d^2k\neq 0$. 如果$c^2-d^2k=0$，则$c^2=d^2k$，$k=\frac{c^2}{d^2}$，$\sqrt{k}=\pm\frac{c}{d}$。因此$\sqrt{k}$将在域F_0中，这与假设矛盾。这就完全证明，所有形如$a+b\sqrt{k}$的数构成域F_1。

其次，我们可以作出形如$a_1+b_1\sqrt{k_1}$的数，其中a_1，b_1，为域F_1中的任意数．K_1是F_1中的一个固定的数，而$\sqrt{k_1}$不在域F_1中，如$\sqrt{5}+\sqrt{2}\sqrt[4]{3}$就是一个这样的数，其中$a_1=\sqrt{5}$，$b_1=\sqrt{2}$，$k=\sqrt{3}$，均在域$F_1$中，而$\sqrt{k_1}=\sqrt[4]{3}$不在域$F_1$中．另外一个例子如$5+2\sqrt[4]{3}$，我们可以使用类似于上面的方法再次证明：所有形如$a_1+b_1\sqrt{k_1}$的数构成域$F_2$，它以$F_1$作为它的一个子域（它包含形如$a_1+b_1\sqrt{k_1}$的数，其中$b_1=0$）。

这个过程可以无限地继续下去，直到我们得到域F_n，此处n为正整数。我们现在可以得到一个域的系列F_0，F_1，F_2……F_n，它们具有下面的特性：

1． F_0为有理数域。

F_1是一个将$\sqrt{k}$添加到F_0后所得到的域，其中k为F_0中的一个固定数，且$\sqrt{k_1}$不在域F_0中；F_1包含所有形如$a+b\sqrt{k}$的数，a，b，k在域F_0中，而$\sqrt{k}$不在F_0中。

F_2是一个将$\sqrt{k_1}$添加到F_1后所得到的域。其中k_1为F_1中的一个固定数，且$\sqrt{k_1}$不在F_1中。

F_n是一个将$\sqrt{k_{n-1}}$添加到F_{n-1}后所得到的域。其中k_{n-1}为F_{n-1}中的一个固定的数，且$\sqrt{k_{n-1}}$不在F_{n-1}中，F_n包含所有具有以下形式的数：

$a_{n-1}+b_{n-1}\sqrt{k_{n-1}}$，$a_{n-1}$，$b_{n-1}$，$k_{n-1}$在$F_{n-1}$中，但$\sqrt{k_{n-1}}$不在$F_{n-1}$中，在$F_n$中的数可能极其复杂，因为它由几个平方根的符号组成，一层套一层，如$\sqrt{2}-\sqrt{\sqrt{3+\sqrt{7+\sqrt{5}}}}$便是域$F_4$中的一个数。为了得到$\sqrt{\sqrt{3+\sqrt{7+\sqrt{5}}}}$，我们可先取$k_0=5$，然后取$k_1=7+\sqrt{k_0}$，$k_2=3+\sqrt{k_1}$，$k_3=\sqrt{k_2}$和$k_4=\sqrt{k_3}$．因此，此数在$F_4$中。

2． F_0是F_1的子域，F_1是F_2的子域，F_{n-1}是F_n的子域。

3． 在F_0，F_1，F_2……F_n中的每一个数都是可作出的，因为其中任何一个域中的数都可通过有限次有理运算和求算术平方根的运算得到。

4． 反之，任何一个可作出的数都可以在上述域F_0，F_1，…F_n的一个域中找到。由于我们已经证明：只有这样的作图才

是可能的，即要求的元素由已知元素（假定它们是由有理数表示的）通过有限次有理运算和求算术平方根的运算得出来。

我们可以总结出下面的定理：在域F_0，$F_1 \cdots F_n$中的所有数都是可以作出的，反之，任何一个可作出的数都必须在域F_0，$F_1 \cdots F_n$中的一个域里。因此，$\sqrt{3+\sqrt[8]{2}}$是可作出的，因为它在域F_4中；但$\sqrt{3+\sqrt[6]{2}}$是不可作出的，因为$\sqrt{3+\sqrt[6]{2}}$不在域F_0，$F_1 \cdots F_n$的任何一个之中。

练 习 2

1\. 通过把$\dfrac{7}{5-\sqrt{2}}$表示成$a+b\sqrt{k}$的形式，证明$\dfrac{7}{5-\sqrt{2}}$在域F_1中，其中a，b，k在域F_0中。

2\. 通过把数$\dfrac{5}{2-\sqrt[4]{2}}$表示成$a_1+b_1\sqrt{k_1}$的形式，证明$\dfrac{5}{2-\sqrt[4]{2}}$在域F_2中，其中a_1，b_1，k_1在域F_1中。

提示：为了使分母有理化，可使用等式 $s^4-t^4=(s-t)(s+t)(s^2+t^2)$，$s=2$，$t=\sqrt[4]{3}$。

通过证明下面的定理，我们就能够决定，三次方程的根在什么情况下可以作出。这个定理是：如果有理系数三次方程没有有理根，则其中没有一个根可以作出。

任何一个有理系数三次方程，如果它至少有一个有理根，我们就说，它在有理数域中是可约的，否则，我们就说，它在