高等代数新编

GAODENG DAISHU XINBIAN

秦松喜 编著

厦门大学出版社
XIAMEN UNIVERSITY PRESS

高等代数新编

秦松喜 编著

厦门大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等代数新编/秦松喜编著．—厦门:厦门大学出版社,2005.8
ISBN 7-5615-2415-3

Ⅰ.高…　Ⅱ.秦…　Ⅲ.高等代数-高等学校-教材　Ⅳ.015

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 068917 号

厦门大学出版社出版发行
(地址:厦门大学　邮编:361005)
http://www.xmupress.com
xmup @ public.xm.fj.cn
南平武夷美彩印中心印刷
2005 年 8 月第 1 版　2005 年 8 月第 1 次印刷
开本:850×1168　1/32　印张:11.5
字数:288 千字　印数:0001-1 000 册
定价:20.00 元

内容提要

本书是对我国新时期高等代数或线性代数进行教学改革试验的结果，作者试图在不减少教学内容，不降低教学要求的前提下，用最短的时间完成高等代数或线性代数的教学任务. 全书包括线性空间、矩阵、线性方程组、行列式、线性变换、欧氏空间、二次型、多项式理论和 λ-矩阵等本、专科各专业在高等代数或线性代数方面所要求掌握的教学内容，可以作为数学或非数学各专业的本、专科师生的教材或参考书.

前　言

教材越编越厚，课时越来越少．这是每一位从事高等代数或线性代数教学的教师在近年来所遇到的共同问题．在不增加教学时数，不减少教学内容，不降低教学要求的前提下圆满完成这门课的教学任务就成为我们共同的目标．为了探索这个问题，笔者编写了该书，希望它能在教学改革实验中起到抛砖引玉的作用．笔者力争让该书突出以下特色：

1．结构新，篇幅小．打破片面强调从简单到复杂，从特殊到一般的思想禁锢，完全按照逻辑顺序编排教学内容，让线性相关性理论成为贯穿始终而又无须拐弯的理论主线，让向量组的初等变换法成为推理和计算的基础大法，形成结构紧凑，通俗易懂，能为广大教师和读者在时间上赢得主动的教材或教学参考书．对于只要求掌握线性代数部分的各专业学生，学完前六章就绰绰有余了；对于数学专业学生，再把其余两章学完即可．

2．内容全，入门快．本书不但覆盖本科阶段高等代数的全部内容，与北京大学编的《高等代数》（第二版）相比，还增加了一些有实际意义的内容，如极大无关组的求法、多元多项式函数、用初等对称多项式表示对称多项式的待定系数法、一般 λ-矩阵的初等因子等．习题除了包括北京大学《高等代数》的大部分基本题和补充题以外，还编入了少量考研题典．对较难的习题一一作出解题分析，并写出解答过程．不论是给数学专业学生还是非数学专业学生授课，任课教师均无须补充任何内容就能按顺序完成教学任务．入

门快主要体现在：让线性空间理论打头阵可以使线性相关性理论的建立一次到位，紧接着建立起向量组的初等变换法和极大无关组的求法，进而建立矩阵的秩及线性方程组有解的判定定理和解的结构理论.有了这些理论和方法，我们就能引领学生长驱直入，迅速到达这门课的核心部位——线性变换和欧氏空间.

3. 方法巧，创新多.由于内容编排体系与传统教材不同，很多定理的证明也就得另辟蹊径，但均以简明直观为准则，让学生易读好记.全书语言表达顺畅优美，在一些要害的地方还有朗朗上口的语言作归纳.即使不当教材使用，本书也不失为一本有价值的教学参考书.

龙岩学院的院系领导对本书的出版给予了极大的关注，并作为精品课程建设进行资助。厦门大学出版社眭蔚在文字表述方面倾注了大量心血。作者在此一并表示感谢。

作　者

2005 年 7 月

目　录

第一章　线性空间

线性空间是从许许多多具体研究对象抽象出来的数学概念，具有很高的概括性. 我国传统的高等代数或线性代数教材都是先讲述一个个具体的研究对象，然后再把它们抽象归结成线性空间. 我们现在从相反的方向来组织这些内容，先从形式上给出线性空间的定义，建立起线性空间的一整套理论，然后再用这些理论去观察和分析各个具体的研究对象，形成在生产和生活中有用的代数理论体系. 这样做不但能突出线性空间理论的中心地位，而且可以免去很多共同规律的重复推证过程，收到纲举目张的效果.

§1　集合与映射

1.1　集合的概念

黄瓜、豆角、萝卜、青菜，这些看似互不相干的东西却有一个共同的属性，那就是人们经常食用的蔬菜. 在数学上，我们称具有某种属性的特定对象组成的整体为一个集合，一般用大写字母表示. 组成集合的对象称为集合的元素，一般用小写字母表示. 当 a 是集合 M 的元素时，我们记作 $a\in M$，读作 a 属于 M；否则记作 $a\notin M$，读作 a 不属于 M.

集合也可简称为集. 在本书中，如无特别说明 **N**、**Z**、**Q**、**R** 和 **C** 分别表示自然数集、整数集、有理数集、实数集和复数集. 它们分别是英语词汇中表示自然数、整数、有理数、实数和复数的第一个字母.

表达集合所含内容的方法有两种：

1. 列举法：将集合的元素一一罗列在大括号内.

例如：$A=\{a,b,c\}$，$B=\{$黄瓜，豆角，萝卜，青菜$\}$.

2. 描述法：在大括号中写出元素的通用代号，并指出它的属性.

例如：偶数集 $E=\{2a\mid a\in\mathbf{Z}\}$.

如果 A 的每个元素都是 B 的元素，则称 A 是 B 的子集，记作 $A\subset B$ 或 $B\supset A$，读作 A 含于 B 或 B 包含 A.

显然，每个集合都是它自身的子集.

如果 $A\subset B$ 且 $B\subset A$，则称 A 与 B 相等，记作 $A=B$.

A 与 B 相等，当且仅当它们的元素组成完全相同.

如果 $A\subset B$ 且 B 中至少有一个元素不属于 A，则称 A 是 B 的真子集.

不含任何元素的集合称为空集，记作 $\varnothing$. 我们约定 $\varnothing$ 为任何集合的子集. 当然它还是任何非空集合的真子集.

1.2 集合的运算

设 A、B 是两个集合，它们的并、交、差(补)及笛卡儿积定义为下列集合：

并集 $A\cup B=\{x\mid x\in A$ 或 $x\in B\}$.

交集 $A\cap B=\{x\mid x\in A$ 且 $x\in B\}$.

差集 $A-B=\{x\mid x\in A$ 且 $x\notin B\}$. 特别地，当 $A\supset B$ 时称 $A-B$ 为 B 关于 A 的补集，记作 $\complement_A B$. 这时称 A 为全集. 显然 B 与

$\complement_A B$ 互为补集，并且有：

$$B\cup\complement_A B=A,\ B\cap\complement_A B=\varnothing.$$

笛卡儿积 $A\times B=\{(a,b)\mid a\in A,b\in B\}$.

当我们要研究的问题涉及几个集合时，可以把这些集合看成是某个集合 S 的子集(事实上，只要取 S 为各个集合的并集就行了). 将 S 视为全集，这样就有了求补运算的基础.

下面这些恒等式或运算律在集合运算中是非常好用的. 我们可以像用乘法公式作代数运算那样来用这些恒等式做集合式的化简或变形.

(1) $A\cup B=B\cup A,\ A\cap B=B\cap A.$ (交换律)

(2) $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C),$

$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C).$ (结合律)

(3) $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C),$ (交对并的分配律)

$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C).$ (并对交的分配律)

(4) 若 $A\subset B$，则 $A\cup B=B,\ A\cap B=A.$ (吸收律)

(5) $A-B=A\cap\complement_S B.$ (差转交法)

(6) $A\cup B=A\cup(B-A).$ (不交化求并法)

(7) $\complement_S(A\cup B)=\complement_S A\cap\complement_S B,$

$\complement_S(A\cap B)=\complement_S A\cup\complement_S B.$ (狄莫更公式)

下面我们用集合相等的定义证明并对交的分配律：

设 $x\in A\cup(B\cap C)$，则 $x\in A$ 或 $x\in B\cap C$. 当 $x\in A$ 时，一定有 $x\in A\cup B$ 且 $x\in A\cup C$，从而 $x\in(A\cup B)\cap(A\cup C)$；当 $x\in B\cap C$ 时，$x\in B$ 且 $x\in C$，从而也有 $x\in A\cup B$ 且 $x\in A\cup C$，即 $x\in(A\cup B)\cap(A\cup C)$. 因此

$$A\cup(B\cap C)\subset(A\cup B)\cap(A\cup C).$$

同理可证反向包含关系. 故 $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$.

我们也可以用集合运算的定义来证明集合恒等式. 请看狄莫

更公式第二式的证明：

$$
\begin{aligned}
\complement_S(A\cap B)&=\{x\mid x\in S\text{ 且 }x\notin A\cap B\}\\
&=\{x\mid x\in S\text{ 且 }x\notin A\text{ 或 }x\notin B\}\\
&=\{x\mid x\in \complement_S A\text{ 或 }x\in \complement_S B\}=\complement_S A\cup \complement_S B.
\end{aligned}
$$

为了以后叙述的简便，我们引进下列符号：

“$\Rightarrow$”：表示“推出”或“必要条件是”；

“$\Leftrightarrow$”：表示“等价于”或“充要条件是”或“当且仅当”；

“$\forall$”：表示“对一切”或“任取”；

“$\exists$”：表示“存在某个”或“存在某些”；

“$\exists !$”：表示“存在唯一的”；

“$\triangleq$”：表示“记为”或“定义为”.

集合的并、交及笛卡儿积运算可以推广到 n 个集合的情况：

$\bigcup\limits_{k=1}^{n}A_k=\{x\mid \exists\, 1\leqslant k\leqslant n$ 使 $x\in A_k\}$；

$\bigcap\limits_{k=1}^{n}A_k=\{x\mid \forall\, 1\leqslant k\leqslant n$ 有 $x\in A_k\}$；

$A_1\times A_2\times\cdots\times A_n=\{(a_1,a_2,\cdots,a_n)\mid a_k\in A_k,k=1,2,\cdots,n\}$，

特别地，当 $A_1=A_2=\cdots=A_n=A$ 时，记 $A_1\times A_2\times\cdots\times A_n=A^n$.

并、交运算还可以推广到任意多个集合的情况，这里从略.

对于任意有限多个集合的情况，分配律和狄莫更公式为：

(3′) $A\cap(\bigcup\limits_{k=1}^{n}B_k)=\bigcup\limits_{k=1}^{n}(A\cap B_k)$，

$A\cup(\bigcap\limits_{k=1}^{n}B_k)=\bigcap\limits_{k=1}^{n}(A\cup B_k)$；

(7′) $\complement_S(\bigcup\limits_{k=1}^{n}A_k)=\bigcap\limits_{k=1}^{n}\complement_S A_k$，$\complement_S(\bigcap\limits_{k=1}^{n}A_k)=\bigcup\limits_{k=1}^{n}\complement_S A_k$.

例 1 证明下列恒等式：

(1) $(A-B)\cap(C-D)=(A\cap C)-(B\cup D)$；

(2) $A-(A-B)=A\cap B$.