

解析几何解疑

章士藻 左铨如 编



北京师范大学出版社

解 析 几 何 解 疑

章士藻 左铨如 编

*

北京师范大学出版社出版发行

全国新华书店经销

人民交通出版社印刷厂印刷

开本: 787×1092 1/32 印张: 11.25 字数: 244千

1988年10月第1版

1988年10月第1次印刷

印数: 1—6 000

ISBN7-303-00315-0/O·80

定价: 3.00元

内 容 简 介

本书采用答疑的形式，就学习解析几何时经常遇到的78个问题，作了较为深入细致的探讨，其中绝大多数是中学生应该掌握的基本思想、基本概念、基本公式、基本方法、基本技能技巧的阐述，也有一些是属于教师必须搞清楚的问题。目的在于帮助读者掌握解析几何的理论与方法，培养提出问题，分析、解决问题的能力；同时也为从事这门课程教学与研究的同志提供一份丰富的参考资料。

本书可作为高中生和大学低年级学生的学习参考书，也可供数学教师教学研究参考。

前 言

解析几何，这是产生于17世纪初，运用代数方法研究几何对象的一个重要的数学分科。

16、17世纪，西方资本主义兴起，生产实践向自然科学提出了许多新的研究课题，迫切需要力学、天文学等基础科学来研究解决，从而，也就要求数学相应地提出新的概念与方法。在这样的历史条件下，法国哲学、数学、物理学家René Descartes(1596-1650)在前人研究的基础上，认识到几何学具有过多地依赖于图形，而代数又完全受公式、法则所约束等缺陷，提出建立坐标系，通过平面上点与实数对 (x, y) 之间的对应关系，将几何与代数两者结合起来，互相取长补短，以此为基本思想，从而创建了解析几何学。

创建了解析几何，建立变量数学也才有了可能。至今解析几何与微积分不仅是学习高等数学的基础，而且是一切理工学科的基本工具。它不仅在工程技术和物理学以及现代医学、经济学、教育统计学、实验心理学等方面有广泛应用；而且它的基本思想与方法几乎渗透了大多数学研究领域，成为初等数学进入高等数学的转折点。

为有助于读者系统地学习研究这门课程，本书遵照原教育部颁发的教学大纲精神，兼顾大中学校师生的需要，结合我们从实际教学的经验体会，分十个部分，提炼出78个问题，以问答形式进行编写，每题独立成篇，长短不拘统一，力求文字生动活泼，内容明白易懂，富有先进性、针对

性、启发性。目的在于激发读者的学习兴趣，帮助读者进一步加深对解析几何基本思想、基本概念、基本公式、基本方法、基本技能技巧的理解与掌握，进一步培养提出问题，分析问题与解决问题的能力。同时，由于本书中有一定数量的问题属于深入钻研教材后的体会或理论联系实际的实例，这也将为从事这门课程教学与研究的同志提供一分丰富的参考资料。

当然，在编写本书时，我们也尽可能注意学习、吸取诸同行近几年来的一些研究成果，在此，特向对所引用有关书籍、期刊的作者表示感谢。也曾考虑到解析几何教学的改革方向，但在这方面做得尚不够，还有待今后进一步探讨、提高。

以上数端，只是我们一片愿望。鉴于我们的实际水平和认识能力所限，加之时间仓促，书中难免有不足、欠妥之处。成书以后，我们热忱希望能听到专家、老师和同学们的批评意见，以便再版时修订、补充。

编 者

1987年8月

目 录

第一章 总论	1
1. 何谓解析几何, 它是怎样产生的?	1
2. 解析几何的方法、内容和发展概况如何, 学习解析几何有什么意义?	4
3. 解析几何教材有哪些基本处理手法和安排体系?	6
4. 在解析几何教学中应着重注意哪些问题?	8
5. 在解析几何解题中应注意掌握哪些技能技巧?	10
第二章 关于点的坐标与常用公式	22
6. 有向线段与向量有无区别, 有向线段、有向线段的数量与有向线段的长度三者之间有什么关系?	22
7. 怎样证明沙尔定理, 它在解析几何中有什么作用?	23
8. 平面直角坐标系有哪些要素, 原点是否一定要取在两轴的交点处, 两轴上的单位长能否不一致?	25
9. 什么叫平面斜坐标系, 平面直角坐标与斜坐标的互换公式是怎样的?	27
10. 数学中为什么要引进坐标的概念, 构成坐标的通则是什么?	29
11. 平面解析几何中有哪些基本公式, 它们之间有何内在的联系?	32
12. 如何计算平面简单多边形的面积? 如何用分点公式求重心	38
第三章 曲线与方程	45
13. 如何深刻理解曲线与方程的概念?	45
14. 求曲线的方程有哪些主要步骤, 并需要注意些什么问题?	47

15. 在求曲线的方程时, 究竟要不要进行证明?	52
16. 由方程画曲线一般有哪些主要步骤?	57
第四章 关于直线	60
17. 二元一次不等式的几何意义是什么, 如何确定二元一次不等式组所表示的平面区域?	60
18. 如何推导点到直线的距离公式, 在应用此公式时, 又 如何去掉绝对值的符号?	64
19. 什么叫直线系方程, 研究直线系方程有何意义?	68
20. 什么叫解析法证题, 它与解析几何的方法证题、代数 法证题各有什么区别?	73
21. 解析法证题有哪些主要步骤, 实施中应注意掌握哪些 技能技巧?	76
22. 什么叫直线型经验公式, 建立直线型经验公式有哪些 常用的方法, 各有何优缺点?	80
第五章 关于圆锥曲线	87
23. 圆的方程有哪些形式, 它有何特征, 为什么说由三个 条件才能确定一个圆?	87
24. 何谓共轴圆系, 它有什么性质和应用?	89
25. 为什么将椭圆、双曲线和抛物线统称为圆锥曲线, 它 们的统一定义与方程是怎样得到的?	91
26. 如何用解析法证明平面与圆锥面相截, 所得的截线是 椭圆、双曲线或抛物线?	97
27. 建立椭圆、双曲线的标准方程时, 应如何论证方程的 同解性?	100
28. 为什么说离心率相等的两个圆锥曲线是相似的?	103
29. 椭圆和双曲线各有哪些常见的几何画法?	105
30. 椭圆有哪几种四心画法, 为什么说由四段圆弧所连成 的是两两吻接的?	110
第六章 关于二次曲线的一般理论	116

31. 直线与二次曲线至多有几个交点, 为什么?	116
32. 为什么说圆锥曲线的直径都可认为是直线, 研究圆锥 曲线的直径与共轭直径有何意义?	118
33. 如何求二次曲线的对称轴, 二次曲线共有多少条对称 轴?	122
34. 如何求二次曲线的渐近线?	126
35. 如何求经过定点或给定斜率的二次曲线的切线方程, 又如何判判定点在二次曲线的内域还是外域?	130
36. 两曲线相切的充要条件是什么, 解有关这类习题时应 注意什么?	135
37. 何谓二次曲线的极点与极线, 引进这两个概念有何意 义?	139
38. 坐标变换与点变换之间有何联系与区别?	141
39. 在移轴变换下二次方程有何变化规律, 利用移轴变换 能否消去方程中的 xy 项?	146
40. 在转轴变换下二次方程有何变化规律, 利用转轴变换 能否消去方程中的 y^2 (或 x^2) 项?	148
41. 如果选择双曲线的一条渐近线为坐标轴, 那么它的方 程成为什么形式?	153
42. 何谓二次曲线方程的不变量, 研究其不变量有何意义, 如何用不变量表示离心率、焦参数等几何量?	155
43. 如何判别二次曲线的类型, 如何确定二次曲线的位置 以及抛物线的开口方向?	158
44. 怎样化简一般二元二次方程最简捷?	163
45. 研究二次曲线族有何意义, 有哪些常见的二次曲线族 方程?	173
第七章 关于二次曲线的应用	177
46. 如何具体鉴别一段圆锥曲线弧, 如何简便地画抛物线 弧?	177

47. 求两条二次曲线的交点有何简便的计算方法, 应用这种方法又如何解一元四次方程?	182
48. 如何运用伸缩变换来研究椭圆的性质?	186
49. 如何计算椭圆的周长?	190
50. 何谓双曲线时差定位图, 其绘制原理与使用方法是怎样的?	194
第八章 关于参数方程	197
51. 化参数方程为普通方程有何作用, 有哪些基本的方法, 并应注意些什么问题?	197
52. 化曲线的普通方程为参数方程有何作用, 选择参数的原则与方法各是怎样的?	202
53. 如何选取参数建立轨迹的方程, 又如何利用参数与变换解轨迹题?	207
54. 如何讨论参数方程的曲线?	216
第九章 关于极坐标	221
55. 为什么要引进广义极坐标与曲线极坐标方程通式、特式的概念, 在广义极坐标系中如何正确理解曲线与方程的对应关系?	221
56. 何谓曲线的周期, 它与曲线 $\rho = f(\theta)$ 的特式以及函数 $f(\theta)$ 的周期有什么关系?	225
57. 研究直角坐标方程与极坐标方程的互化有何作用, 在互化中各应注意什么问题?	228
58. 如何求曲线的极坐标方程, 在求曲线极坐标方程时应注意些什么问题?	234
59. 如何讨论极坐标方程的曲线?	239
60. 如何求极坐标系中两曲线的交点?	244
61. 如何简便地推导旋轮线和圆内外旋轮线的统一方程, 又如何正确地对它们进行分类?	249
62. 为什么说椭圆、帕斯卡蜗线和玫瑰线都是圆内外旋轮	

线的特例?	258
63. 尖旋轮线为何又称为最速降线和摆线, 摆线的等时性 是怎么一回事?	264
64. 何谓圆的广义渐伸线, 为什么说它是圆外旋轮线的极 限情形, 而圆的渐伸线、阿基米德螺线又都是它的特 例?	269
65. 如何推导天体运行的轨道方程 $\rho = \frac{p}{1 + e \cos(\theta - \theta_0)}$ 与人造地球卫星的周期 $T = \frac{2\pi R^{3/2}}{\sqrt{GM}} \left(1 + \frac{h_{\text{近}} + h_{\text{远}}}{2R} \right)^{3/2}$?	273
66. 三种宇宙速度是如何推得的, 它与天体的运行轨道有 何关系?	278
第十章 有关空间解析几何中的一些问题	283
67. 向量是怎样产生的, 在解析几何的研究中引入向量有何 意义?	283
68. 为什么应用向量解决几何问题往往会简便些?	284
69. 如何推导空间绕定直线的旋转变换公式? 若知旋转变 换, 又如何确定旋转轴和旋转的角度?	289
70. 如何计算空间简单多边形的面积?	293
71. 如何计算空间四面体的体积?	299
72. 如何求关于定点、定平面对称的曲面与曲线的方 程?	303
73. 如何画二次曲面的直观图?	306
74. 求动曲线的轨迹方程时, 如何消去参数?	311
75. 如何求二次曲面的对称平面和二次曲面的基本不变量 及半不变量?	319
76. 化简二次曲面的方程有何简捷的方法, 又如何判别二 次曲面的类型?	328

77. 如何确定二次曲面的位置, 又如何确定抛物柱面和抛 物面的开口方向?	335
78. 二次直纹面有哪些重要的应用?	343
参考书目	348

第一章 总 论

1. 何谓解析几何，它是怎样产生的？

解析几何，又叫坐标几何。它是用代数方法来研究几何图形和变换的一门科学，是17世纪初期产生出来的一个数学分科。

我们知道，几何学的产生源远流长，远在5000多年前，埃及、巴比伦、中国、印度等文明古国的人民，在从事农牧业的生产中，测量土地，疏通河道，制造工具以及日常生活用品等，积累了大量有关几何图形的知识，得出了计算面积、容积，测量距离的方法等。

据《史记》记载，我国古代夏禹治水（公元前1889年）时，就用到“准绳”和“规矩”。在公元前1世纪左右成书的《周髀算经》中载有“径一而周三”，意思是说圆周率 $\pi=3$ 。还载有“故折矩，以为句广三，股修四，径隅五”，意思是说“如果将一根直尺折成一个直角，较短的一边（称为勾，又为句）长为3，较长的一边（称为股）长为4，那么原有尺两端的距离（称为径）一定为5”。因此，至今还有人用“勾三股四弦五”来代表勾股定理。魏晋时刘徽（公元3世纪）创立了“割圆术”，南北朝时祖冲之（429-500年）研究断定 π 的约率为 $\frac{22}{7}$ ， π 的密率为 $\frac{355}{113}$ ，且 π 在3.1415926与3.1415927之间，而这一结果直到1000多年后才被德国人奥托和荷兰人安托尼兹所发现。但中国长期处于封

建统治之下，生产力发展缓慢，科学得不到重视，对几何学的研究也就停滞不前了。

公元前7世纪，几何学从埃及传到希腊，许多希腊学者作出了卓越的贡献。他们注意阐明几何事实之间的相互关系，并逐步演变为几何原理之间的逻辑推理。欧几里德（公元前3世纪）系统地总结了前人的研究成果，写成《几何原本》一书，将几何上升为系统的数学理论；创立了古典公理法（又称综合法）。尽管后来阿基米德（公元前287-212年）、阿波罗尼斯（公元前260-200年）等人在面积、体积和圆锥截线等方面作了深入的研究，但以后两千多年来的几何教科书与几何原本并没有什么本质上的差异。这与欧洲整个中古时期陷入了动乱和宗教迷信的黑暗年代不无关系。

15、16世纪，欧洲由封建社会向资本主义过渡，进入文艺复兴时期。特别是从17世纪起，资本主义生产开始发展起来，天文、航海、机械、造船以及军事工业等，都有了飞速发展。生产实践向自然科学提出了许多新的研究课题，迫切需要力学，天文学等基础科学来解决。也就相应地要求数学提出新的概念与方法，于是产生解析几何的条件便成熟了。

必须指出：解析几何的产生是与法国哲学家、数学家笛卡尔（Descartes 1596-1650年）的名字联系在一起的。1637年他发表了著作《方法论》，其中有一个著名的附录：《几何》，概括了他的关于坐标几何和代数的思想，主张将代数和几何中一切好的东西互相取长补短。他在分析传统、静止的数学后指出：以前认为直线是静止的，如今应将它看作是由一个变动的点产生出来的，这就是轨迹的观念。过去对圆锥曲线的研究只重视了几何学方面，而忽视了代数学方

面，东方高度发展的代数学，又有忽视几何学的倾向。他努力寻求把两者结合起来的途径，终于建立了平面坐标系，找到了点与数对之间的对应关系，把曲线用含有两个未知数的方程表示出来。又将几何问题通过坐标系变成了代数问题，用代数方法加以解决，再用几何语言叙述出来。他用这种思想研究了二次方程，使二次方程和圆锥曲线建立了对应关系。为此，马克思和恩格斯都曾高度地评价了笛卡尔的贡献，马克思说：“由于笛卡尔把代数应用于几何，也就是解析几何与高等几何，函数概念获得了新的发展和重要意义”。

由于笛卡尔在研究几何学方法上的创新，从而产生了解析几何学，这样不仅为研究空间形式开辟了新的途径，而且把整个几何学的研究从原来“定性的层面”，推进到能进行计算的“定量的层面”。17世纪出现的解析几何与微积分的两大创造，使数学面貌为之改观，数学从此由常量数学进入到变量数学的新时期。

顺便指出，既然解析几何是用代数方法来研究几何学的一个分科，为什么不将解析几何称为代数几何呢？除了现代的代数几何另有意义外，还有它的历史根源。

在17世纪笛卡尔创立了解析几何不久，微积分和无穷级数就出现了。当时代数和解析被当作同义词，微积分被认为是代数的扩展。而解析几何在形式上几乎一律被描写成代数在几何上的应用。因为代数和解析是同义词，所以微积分也叫无穷小量解析。这样就给我们遗留下来一个混乱的情况：Analysis（解析、分析）包括所有建立在极限过程上的数学，而Analytic geometry（解析几何）则与极限过程无关。到18世纪末，解析几何已成为标准名词。在代数学成为一个突出的数学分支后，解析几何已不仅是代数在几何上的应

用，而是研究曲线与曲面的一种基本方法，因而人们就把它与综合几何相提并论，都成了几何学的一个重要分科了。

2. 解析几何的方法、内容和发展概况如何，学习解析几何有什么意义？

我们知道，通过坐标系建立起几何图形的基本元素——点与有序实数组之间的一一对应后，这就为空间的几何结构系统地数量化、代数化，运用代数方法来研究几何图形奠定了基础。

怎样把空间的几何结构系统地数量化、代数化呢？以三维空间的情形为例，可以用有序实数组 (x, y, z) 来表示点 M 的位置（称为点 M 的坐标），记成 $M(x, y, z)$ ，用两点 $M_1(x_1, y_1, z_1)$ ， $M_2(x_2, y_2, z_2)$ 所对应的非负实数

$$d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$$

（称为点 M_1 与 M_2 间的距离），来描述两点间的位置关系。这样三维空间的结构就完全数量化了。

在空间结构数量化之后，就可把某图形看作是适合一定条件的点的轨迹，轨迹上的任一点 $M(x, y, z)$ 所适合的“一定条件”就用它的坐标 x, y, z （变量）所适合的解析式（如方程、不等式以及微分方程等）来表达。再通过对方程的研究，就能发现和证明某图形的性质。这种方法在理论上具有一般性，在方法上比较简单，易于掌握。不仅能有效地解决轨迹问题，还能采用参数方程来描述物体的运动及其规律，这对研究物理学和微分几何等都有着重要的价值。

在平面解析几何中，主要研究一次、二次方程所表示的直线和二次曲线；在空间解析几何中，主要研究平面、空间直线和二次曲面。虽然作为求轨迹方程的举例也涉及到一些特殊的曲面、曲线，如圆环面、圆柱螺线、旋轮线、圆的渐

伸线等,但对一般高次曲面、曲线的系统地研究则是代数几何的任务。

顺便指出,将二维、三维空间推广到 n 维空间直至属于泛函分析研究的无穷维空间都有着重要的实际应用,在现代物理学中占有重要的地位。

在解析几何中,为研究某些曲线、曲面方便起见,还引进了平面极坐标系、仿射坐标系和空间球面坐标系等。由于曲线、曲面的方程依赖于坐标系的选择,而它们的几何性质则不因坐标系的变化而变化。因此通过坐标变换可以化简方程,而且图形的几何性质被方程的系数完全确定了。由方程的系数所确定的某些量(称为不变量),则不因坐标系的改变而改变,这些不变量能更深刻地反映方程与图形之间的关系。因此研究变换及不变量成为解析几何的另一个重要内容。

例如,研究正交变换

$$\begin{cases} x' = x \cos \theta \mp y \sin \theta + x_0, \\ y' = x \sin \theta \pm y \cos \theta + y_0 \end{cases}$$

及其不变量(如距离、角度、面积等)就成了欧氏几何的中心内容。研究从一个平面上的点 (x, y) 到另一个平面或者到同一个平面上的点 (x', y') 的射影变换群下的不变量就成了射影几何的中心内容,其变换形式为:

$$\begin{cases} x' = \frac{a_{11}x + a_{12}y + a_{13}}{a_{31}x + a_{32}y + a_{33}}, \\ y' = \frac{a_{21}x + a_{22}y + a_{23}}{a_{31}x + a_{32}y + a_{33}}. \end{cases} \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0.$$

当 $a_{31} = a_{32} = 0$ 时,射影变换就成为仿射变换。研究仿射变

换群下的不变量（如简单比、平行性等）则成了仿射几何的中心内容。通常仿射几何也归解析几何研究，但有时又把它作为向射影几何的过渡性教材而纳入射影几何（又称高等几何）。代数几何又把代数不变量和双有理变换（如关于圆的反演变换）列入它的研究领域而研究拓扑变换（其变换和逆变换都是连续的）及其不变性质则成为拓扑学的主题。差不多与微积分同时出现的微分几何及其核心部分——黎曼几何是用微积分研究曲线、曲面以及空间本身（准确地讲称为 n 维流形）的学科。这些在解析几何以后涌现出来的与几何学有关的重要数学分支使我们看到解析几何所处的重要地位，它作为一门基础课是理所当然的了。

学习解析几何，不仅是进一步学习高等数学如微积分、高等代数，高等几何、微分几何等必不可少的基础，而且对于培养人们用运动变化的观点、辩证地研究问题有重要的意义。同时，解决有关生产实际问题，往往需要应用解析几何知识。因此，学习解析几何对解决生产实际问题，直接为社会主义建设服务，也具有重要意义。

3. 解析几何教材有哪些基本处理手法和安排体系？

各种解析几何书籍都有其自身的处理手法和安排体系，这是由编写目的，读者对象，作者所长以及所处的地理历史环境等多种因素决定的。例如，编写目的有供自学，作教科书，作教学和自学参考书之分；读者对象有中学生、大学生、青年职工等之别。同时，就教科书而言，工科、理科、师范院校等也显然有所差异。这里，不可能对所有解析几何书都作全面深入的介绍，只能就其一般性的问题作一粗浅阐述，以供教学参考。

一般说来，解析几何在处理手法上可有三种基本型和三