哈尔滨市教育学院教学研究室

1985年
初中升学考试
数学复习指导

SX

黑龙江教育出版社

1985年初中升学考试

数学复习指导

哈尔滨市教育学院教学研究室 编

黑龙江教育出版社

1985年·哈尔滨

责任编辑：孙怀川
封面设计：郑　跃
插　　图：王俊侨
　　　　　吕正琴

1985年初中升学考试

数学复习指导

SHuxüó Fuxi ZHidao

哈尔滨市教育学院教学研究室 编

黑龙江教育出版社出版
（哈尔滨市道里森林街42号）
黑龙江新华印刷厂印刷　黑龙江省新华书店发行
开本787×1092毫米1/32・印张8 12/16・字数179,000
1985年8月第1版　　1985年8月第1次印刷
印数1—166,500

统一书号：7357・34　　定价：1.20元

前　　言

为了配合1985年初中升学考试，帮助应届初中毕业生复习初中数学，我们编写了《1985年初中升学考试数学复习指导》一书．

本书内容包括复习指导和综合练习题两大部分．前一部分，将全部初中数学内容分为八个单元，每个单元首先依据教学大纲和教材明确复习要求，并将知识内容做了提要。然后精选了较典型的例题，在每一组例题之后加注，说明解这一类题的关键、要领、规律，指出学生易犯的错误。接着配备了一定数量的练习题，并对部分较难的练习题作了略解或提示．后一部分，选编了综合练习题四套，供读者自我检查测验使用．书末附有黑龙江省1984届初中毕业统一考试数学试题及答案，供读者参考．

参加本书编写的有孙铁、时承权、王翠满、邵旭等同志，最后由哈尔滨市教育学院副院长王万祥同志对全书初稿进行了修改、审定．

由于我们水平有限，加之时间仓促，书中错误和缺点在所难免，敬请读者批评指正．

作　　者

1984年12月于哈尔滨

目　录

第一部分　复习指导

一、数与式

（一）复习要求及内容提要

要求理解有理数、实数的有关概念和性质，掌握实数（主要是有理数）的运算法则，并能熟练地进行计算．理解和掌握有关整式、分式、根式的概念、性质和运算法则，能够熟练地进行整式、分式、二次根式的运算和多项式的因式分解．

这部分的主要内容如下：

1． 实数

（1）实数的系统表：

$$\text{实数}\begin{cases}\text{有理数}\left.\begin{cases}\text{整数（正整数，零，负整数）}\\ \text{分数（正分数，负分数）}\end{cases}\right\}\begin{matrix}\text{有限小数或者}\\ \text{无限循环小数}\end{matrix}\\ \text{无理数（正无理数，负无理数）：无限不循环小数}\end{cases}$$

（2）数轴：数轴的概念，实数和数轴上的点一一对应，实数的相反数和绝对值，实数大小的比较．

（3）实数的运算：有理数的运算法则，特别要注意有负数参加运算时的运算法则．在实数的四则运算中，有理数的运算规律同样适用，并且运算的结果还是实数．

运算定律：

加法交换律　$a+b=b+a$；

加法结合律　$(a+b)+c=a+(b+c)$；

乘法交换律　$ab=ba$；

乘法结合律　$(ab)c=a(bc)$；

分　配　律　$a(b+c)=ab+ac$.

运算顺序：按照第三级运算（乘方、开方），第二级运算（乘、除），第一级运算（加、减）的顺序进行运算；有括号时先算括号内的，按照小括号、中括号、大括号的顺序进行运算.

2．代数式

(1) 代数式的系统表：

$$\text{代数式}\begin{cases}\text{有理式}\begin{cases}\text{整式}\begin{cases}\text{单项式}\\\text{多项式}\end{cases}\\\text{分式}\end{cases}\\\text{无理式}\end{cases}$$

(2) 整式：整式的概念和运算法则，特别是添去括号法则，合并同类项．正整指数幂的运算法则．

$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$,

$(a^m)^n = a^{mn}$,

$(ab)^n = a^n b^n$,

$a^m \div a^n = a^{m-n}$ $(a \neq 0,\ m>n)$.

（其中 m、n 都是正整数）

乘法公式和因式分解．

$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$；

$(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2$；

$(a\pm b)(a^2\mp ab+b^2)=a^3\pm b^3$.

(2) 分式：分式的概念和基本性质，通分和约分，分式

的四则运算，繁分式化简.

(3) 根式：方根的意义和性质，算术根的概念，最简二次根式，二次根式的性质和运算.

(二) 例题

例 1 设有下列各数：

$$0,\ \frac{\pi}{2},-2^{\frac{1}{2}},\ \left|-3\right|,\lg100,-\mathrm{tg}45^\circ,\ \frac{7}{2}.$$

(1) 分别指出其中哪些属于自然数集合？整数集合？有理数集合？无理数集合？实数集合？

(2) 在数轴上画出它们所对应的点.

(3) 将它们从小到大排列起来，并用符号“<”连接.

解 (1) 属于自然数集合的有：$|-3|,\lg100$.

属于整数集合的有：$0,|-3|,\lg100,-\mathrm{tg}45^\circ$.

属于有理数集合的有：$0,|-3|,\lg100,-\mathrm{tg}45^\circ,\frac{7}{2}$.

属于无理数集合的有：$\frac{\pi}{2},\ -2^{\frac{1}{2}}$.

属于实数集合的有：$0,\frac{\pi}{2},-2^{\frac{1}{2}},|-3|,\lg100,-\mathrm{tg}45^\circ,$

$$\frac{7}{2}.$$

(2)

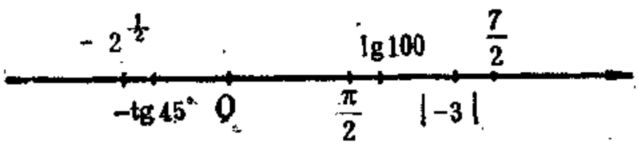

图1.1

(3) $-2^{\frac{1}{2}}<-\text{tg}45^{\circ}<0<\frac{\pi}{2}<\lg 100<|-3|<\frac{7}{2}$.

例 2 解下列各题：

(1) 写出比 $3\sqrt{3}-2$的相反数大的所有负整数；

(2) 写出与 1 的差的绝对值等于 3 的整数；

(3) 具备什么条件时，两个实数的和的绝对值等于它们绝对值的和？

解 (1) $3\sqrt{3}-2$ 的相反数是

$2-3\sqrt{3}\approx 2-3\times 1.73=-3.19$

$\therefore$大于-3.19的所有负整数是-3，-2，-1.

(2) 设所求数为 x，则有

$|x-1|=3$， $x-1=\pm 3$， $x=4$或 $x=-2$.

故所求整数为4或-2.

(3) 设a、b为所说的两个数，则有

$|a+b|=|a|+|b|$.

①当a、b都是正数时，上式成立；

②当a、b都是负数时，上式成立；

③当a、b中至少有一个为零时，上式也成立.

$\therefore$当两数同号，或至少有一个为零时，它们的和的绝对值等于它们的绝对值的和.

例 3 填空：

(1) 如果实数 x 的相反数是$\sqrt{3}$，那么$|x|=$________.

(2) 如果$x+|y|=x-|y|$，那么$y=$________.

(3) 若$a<b<0$，比较大小：$|a|$____$|b|$.

(4) 若$|x-5|=5-x$，则x的值的范围是________.

答：(1) $\sqrt{3}$；(2) 0；(3) $>$；(4) $x\leqslant5$。

例 4 计算

(1) $-8-1\frac{3}{4}+15\frac{1}{8}$；

(2) $-3^2\cdot(-2)^3-\frac{17}{0.17^2}$.

解 (1) 原式 $=-9\frac{3}{4}+15\frac{1}{8}=-9\frac{6}{8}+14\frac{9}{8}=5\frac{3}{8}$.

(2) 原式 $=-9\cdot(-8)-\frac{17}{0.0289}$

$$=72-588\frac{4}{17}$$

$$=-516\frac{4}{17}.$$

注：①有理数运算是实数运算的基础，因此要熟练掌握有理数运算的法则。

②要注意小数点后面的位数，$0.17^2\neq0.289$.

例5 计算 $1\frac{2}{3}-\left\{5\frac{3}{4}-2^2\div\left[\left(\frac{1}{2}\right)^2+3\times\left(-\frac{3}{4}\right)\right]\times\frac{1}{8}\right\}$.

解 原式 $=1\frac{2}{3}-\left[5\frac{3}{4}-4\div\left(\frac{1}{4}-\frac{9}{4}\right)\times\frac{1}{8}\right]$

$$=1\frac{2}{3}-\left(5\frac{3}{4}+4\div2\times\frac{1}{8}\right)$$

$$=1\frac{2}{3}-\left(5\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\right)$$

$$=-4\frac{1}{3}.$$

注：①注意括号的作用，$-2^2 \neq (-2)^2$；

②注意运算顺序，特别是“$4+2\times\frac{1}{8}$”等处易发生错误.

例 6 计算$\dfrac{23\frac{11}{12}+10.125+\left(-\frac{3}{4}\right)^3}{(-1)^{100}\cdot\dfrac{1}{\frac{1}{6}+\frac{1}{4}}}$.

解 原式$=\dfrac{23\frac{11}{12}-\frac{81}{8}\times\frac{64}{27}}{\dfrac{1}{\frac{5}{12}}}$

$$=\frac{23\frac{11}{12}-24}{\frac{12}{5}}=\frac{-\frac{1}{12}}{\frac{12}{5}}=-\frac{5}{144}.$$

例 7 判断下列命题是否正确，正确的在括号内画“√”，错误的画“×”.

(1) a为实数，那么$a^2>a$； ( )

(2) a为实数，那么$a>-a$； ( )

(3) 两个相反数的绝对值相等； ( )

(4) 如果$b<0$，那么$a-b>a$； ( )

(5) 两个正实数的积分别大于这两个实数； ( )

(6) 对于实数a、b，总有$|a-b|=|b-a|$. ( )

答：（1）×；（2）×；（3）√；（4）√；
（5）×；（6）√.

例 8　试用语言叙述下列各式所确定的实数 a、b之间的关系：

(1) $a-b=0$；　(2) $a+b=0$；

(3) $ab=0$；　(4) $ab\neq 0$；

(5) $ab=1$；　(6) $ab=-1$；

(7) $(a-b)^2=0$；　(8) $a^2+b^2=0$；

(9) $a^2=b^2$.

解　(1) a、b相等；(2) a、b互为相反数；

(3) a、b中至少有一个为零；(4) a、b均不为零；

(5) a、b互为倒数；(6) a、b互为负倒数；

(7) a、b相等；(8) a、b均为零；

(9) a、b的绝对值相等.

注：引用字母表示数，首先要注意字母表示的数的范围. 如果a表示实数，那么a就不一定是正数，$-a$也不一定是负数，对于a的各种可能要进行想象.

例 9　计算

(1) $-4(3a-b+2)+3\left[a+2b-\frac{2}{3}(b-4)\right]$；

(2) $(a^2-2ab)\cdot(-3a)^2-(9ab^3-12a^4b^2)\div 3ab$；

(3) $(a^2+3ab-b^2)\cdot(2a-b)$；

(4) $(-10x^2+13x^3-2+3x^4)\div(4x-3+x^2)$.

解　(1)　原式 $=-12a+4b-8+3(a+2b-\frac{2}{3}b+\frac{8}{3})$

$=-12a+4b-8+3a+6b-2b+8$

$=8b-9a$.

(2) 原式 $=(a^2-2ab)\cdot 9a^2-(9ab^3-12a^4b^2)\div 3ab$

$=9a^4-18a^3b-(3b^2-4a^3b)$

$=9a^4-18a^3b-3b^2+4a^3b$

$=9a^4-14a^3b-3b^2$.

(3) 原式 $=2a^3+6a^2b-2ab^2-a^2b-3ab^2+b^3$

$=2a^3+5a^2b-5ab^2+b^3$.

(4) 用竖式作除法：

$$
\begin{array}{r|l}
 & 3x^2+x-5 \\
\hline
x^2+4x-3 & 3x^4+13x^3-10x^2\quad -2 \\
 & 3x^4+12x^3-9x^2 \\
\hline
 & \qquad\qquad x^3-x^2 \\
 & \qquad\qquad x^3+4x^2-3x \\
\hline
 & \qquad\qquad\quad -5x^2+3x-2 \\
 & \qquad\qquad\quad -5x^2-20x+15 \\
\hline
 & \qquad\qquad\qquad\quad 23x-17
\end{array}
$$

商式 $=3x^2+x-5$，余式 $=23x-17$.

$\therefore$ 原式 $=3x^2+x-5+\dfrac{23x-17}{x^2+4x-3}$.

注：①整式加减，除了应按运算顺序进行运算以外，关键在于熟练掌握合并同类项的法则.

②整式乘除，总是以单项式相乘除为基础，而这里的关键在于正确而熟练地掌握幂的运算法则：

$a^m\cdot a^n=a^{m+n}$；$a^m\div a^n=a^{m-n}\quad(a\neq 0,\ m>n)$；

$(a^m)^n=a^{mn}$；$(ab)^n=a^nb^n$.

式中 m、n 都是正整数.

③作竖式除法时，应先将被除式与除式都按某一字母的

降幂进行排列，缺项处要空位．有余式的除法中，被除式、除式、商式、余式之间的关系是

$$被除式\div除式=商式+\frac{余式}{除式},$$

或者写成

$$被除式=商式\times除式+余式.$$

例10 计算：

(1) $(x-y)(-x-y)(x^2+y^2)$;

(2) $5(3-5a)^2-5(3a-7)(7+3a)$.

解 (1) 原式 $=-(x-y)(x+y)(x^2+y^2)$

$=-(x^2-y^2)(x^2+y^2)$

$=-(x^4-y^4)$

$=y^4-x^4$.

(2) 原式 $=5(9-30a+25a^2)-5(9a^2-49)$

$=45-150a+125a^2-45a^2+245$

$=80a^2-150a+290$.

注：(1) 中用平方差公式计算 $(x-y)(-x-y)$ 时，也可以将 $-y$ 看作公式 $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$ 中的 a，将 x 看作公式中的 b，直接用公式．

例11 把下列各式分解因式：

(1) x^3-xy^2; (2) $4a^3b-4a^2b+ab$;

(3) x^3+x-2; (4) $(a^2-2a)(a^2-2a-2)-3$.

解 (1) 原式 $=x(x^2-y^2)=x(x+y)(x-y)$.

(2) 原式 $=ab(4a^2-4a+1)=ab(2a-1)^2$.

(3) 解法一：原式 $=x^3-x^2+x^2+x-2$

$=(x^3-x^2)+(x^2+x-2)$

$$= x^2(x-1)+(x-1)(x+2)$$
$$= (x-1)(x^2+x+2).$$

解法二： 原式 $= x^3-1+x-1$
$$= (x-1)(x^2+x+1)+(x-1)$$
$$= (x-1)(x^2+x+1+1)$$
$$= (x-1)(x^2+x+2).$$

(4) 原式 $= (a^2-2a)[(a^2-2a)-2]-3$
$$= (a^2-2a)^2-2(a^2-2a)-3$$
$$= [(a^2-2a)+1][(a^2-2a)-3]$$
$$= (a^2-2a+1)(a^2-2a-3)$$
$$= (a-1)^2(a+1)(a-3).$$

注：通过(1)复习因式分解的一般步骤和要求；通过(2)，要注意多项式中某一项被当作公因式提出后，该项位置上是1；通过(3)复习“分组”、“拆项”、“补项”等方法；通过(4)复习换元法，可以设$a^2-2a=y$，引进辅助元来考虑.

例12 分别在有理数和实数范围内分解因式：

(1) $3x^2-x-1$；　(2) x^4-11x^2+18.

解 (1) 解方程 $3x^2-x-1=0$，

得 $x=\dfrac{1\pm\sqrt{13}}{6}$.

故原式在有理数范围内不能分解. 在实数范围内可分解如下：

$$原式=3\left(x-\frac{1+\sqrt{13}}{6}\right)\left(x-\frac{1-\sqrt{13}}{6}\right).$$

(2) 原式$=(x^2-2)(x^2-9)$

$=(x^2-2)(x+3)(x-3)$…(在有理数范围内)

$=(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})(x+3)(x-3)$…

(在实数范围内).

注：如果二次三项式ax^2+bx+c的两个根为x_1、x_2，那么这个二次三项式可分解为

$$a(x-x_1)(x-x_2).$$

应注意，不要把系数a遗漏.

例13 当x取什么数值时，分式$\frac{x^2-3x}{x-3}$有意义？分式的值等于零？

解 令$x-3=0$，得$x=3$.

∴当$x\neq3$时，原分式有意义.

再令分子$x^2-3x=0$，得$x=3$，$x=0$.

当$x=3$时，分母也为零，分式无意义；当$x=0$时，分母不为零，

∴当$x=0$时，原分式的值为零.

注：讨论分式有无意义，要对原分式进行讨论，不能讨论化简后的式子；只有当分子等于零而分母不等于零时，分式的值是零.

例14 计算：

$$\left[\left(\frac{x}{y}-\frac{y}{x}\right)\div(x+y)-\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right)\right]\div\left(\frac{x}{y}-1\right).$$

解 原式$=\left[\frac{x^2-y^2}{xy}\cdot\frac{1}{x+y}-\frac{y-x}{xy}\right]\div\frac{x-y}{y}$

$$=\left[\frac{x-y}{xy}-\frac{y-x}{xy}\right]\cdot\frac{y}{x-y}$$

$$=\frac{x-y-(y-x)}{xy}\cdot\frac{y}{x-y}$$

$$=\frac{2(x-y)}{x}\cdot\frac{1}{x-y}=\frac{2}{x}.$$

注：①分式中间的横线有双重意义：一是表示除法运算；二是具有括号的作用，分子、分母各作为一个整体来相除，如

$$\frac{x-y}{xy}-\frac{y-x}{xy}=\frac{x-y-(y-x)}{xy}.$$

②分式运算中，要熟练掌握通分和约分的法则．在约分时，要把分式的分子和分母都化为积时才能进行．

例15 已知 $x=\sqrt{2}-1$，求 $\dfrac{\frac{1}{x}}{1-\dfrac{1-x}{\frac{1}{x}-x}}$ 的值．

解 原式 $=\dfrac{\frac{1}{x}}{1-\dfrac{x(1-x)}{1-x^2}}=\dfrac{\frac{1}{x}}{1-\dfrac{x}{1+x}}=\dfrac{\frac{1}{x}}{\dfrac{1+x-x}{1+x}}$

$$=\frac{1+x}{(1+x-x)x}=\frac{1+x}{x}.$$

$\therefore$ 当 $x=\sqrt{2}-1$ 时，原式 $=\dfrac{1+\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}-1}=2+\sqrt{2}$.