正交设计

姬振豫　编著

天津科技翻译出版公司

正　交　设　计

姬振豫　编著

天津科技翻译出版公司

津新登字90(010)号

书名　正交设计

编著者　姬振豫
责任编辑　陈文美

*　*　*

天津科技翻译出版公司出版
邮政编码：300192
新华书店天津发行所发行
天津外语学院印刷厂印刷

*　*　*

开本：787×1092　1/32　印张：7.625　字数：178[千字]
1994年4月第1版　1994年4月第1次印刷
印数：1——3000册
书号：ISBN　7—5433—0626—3/TB·27
定价：6.50元

内容提要

本书系统地介绍了正交试验方案的设计,试验结果的分析,正交表的灵活应用,产品稳定性三次设计,正规正交表的构造方法及常用正交表的计算程序等。

本书兼顾理论与应用,叙述详细而具体,便于自学。第二三、四章之末附有习题,以验证和巩固学习效果。

本书可作为高等学校应用数学专业的选修课教材;数学及工科专业的教学参考书;工程师、工科研究生及科研人员学习“正交设计”用书。

前　　言

“正交试验设计”是用正交表设计多因素试验并且能以较少次的试验获得最佳生产条件的科学方法，因此又称它为多因素优选法。

正交表1944年起源美国。第二次世界大战后在日本开发了使用正交表进行试验设计的技术体系，并在全国大力普及推广应用。这对战后日本经济的飞速发展起过十分重要的作用。据日本有关专家估计：“战后日本经济发展中至少有10%的功劳归于“正交设计”，可见它的经济效益之大。因此这种技术在日本十分被重视，在日本，如果一个工程师没有试验设计这方面知识的话，只能算半个工程师。

实践证明，“正交设计”是促进生产率提高的一种很有效的工具。它已广泛地应用于科学研究，产品设计及工艺改革等技术领域以及经营、计划等管理领域。从七十年代开始，我国也推广了这种技术，并已取得了许多重大成果。有的部门称它为“摇钱树”、“聚宝盆”。

为促进国民经济的发展，把这一技术的推广和应用深入持久地进行下去，很有必要把它纳入到有关学校的教学计划中。本书是编者在对应用数学专业开设“正交设计”课的教学实践的基础上编写的，其内容以应用为主兼顾读者在理论上的要求。书中用普通的概率统计知识对正交试验统计分析中的有关理论问题以及二、三水平正规正交表的构造原理等进行了探索；介绍了产品稳定性三次设计的基本思想和方法以及正交试验的“极差分析法”。

为了解决使用部门在实际应用中计算繁杂的问题，本书第五章给出了常用的6张正交表的统计分析及计算信噪比的*BASIC*语言程序，并附有使用说明。

只考虑应用的读者，可以略去标有“*”号的章、节、段不读而无妨。

本书初稿曾蒙北京师范大学徐承彝先生审阅，在此编者表示衷心感谢。并感谢贾春福同志的帮助，他详细阅读了全稿，为本书的出版付出了辛勤的劳动。

在本书的出版过程中，编者还得到赵洪恩副教授及赵桂云同志热情的支持和帮助，谨此谢意。

由于编者水平所限，书中难免有不妥和错误之处，请读者批评指正。

编者

1993年2月于天津

目　　录

前　言……………………………………………………（1）

*第一章　予备知识………………………… … ……（1）

§1.1　多维正态变量及其二次型的分布……………（1）
§1.2　方差分析…………………………………………（5）
§1.3　同余类及其运算……………………………………（14）

第二章　正交试验方案的设计及结果的分析……………（18）

*§2.1　试验为什么要设计…………………………（18）
*§2.2　用正交拉丁方设计试验方案………………（20）
§2.3　用正交表设计试验方案………………………（27）
§2.4　试验结果的分析………………………………（37）
Ⅰ　予备知识…………………………………………（37）
Ⅱ　方差分析法………………………………………（54）
Ⅲ　直观分析法………………………………………（64）
Ⅳ　极差分析法………………………………………（68）
§2.5　多指标的试验分析……………………………（72）
*§2.6　多重比较………………………………………（77）
§2.7　随机化…………………………………………（78）
§2.8　混杂与区组……………………………………（79）
§2.9　正交表的灵活应用……………………………（82）
习题………………………………………………（88）

第三章　产品稳定性三次设计……………………………(94)

§3.1　静态特性的参数设计……………………………(96)

§3.2　动态特性的参数设计……………………………(109)

§3.3　有约束的参数设计……………………………(131)

§3.4　容差设计……………………………(147)

习题……………………………(162)

***第四章　正规正交表 $L_{m^u}(m^k)$ 的构造**……………………………(165)

§4.1　二水平正交表的构造……………………………(165)

§4.2　三水平正交表的构造……………………………(172)

§4.3　构造正交表 $L_{m^u}(m^k)$ 的一般方法……………………………(179)

习题……………………………(181)

第五章　常用正交表及信噪比的程序计算……………………………(182)

§5.1　表 $L_8(2^7)$ 的程序计算……………………………(182)

§5.2　表 $L_{12}(2^{11})$ 的程序计算……………………………(187)

§5.3　表 $L_9(3^4)$ 的程序计算……………………………(189)

§5.4　表 $L_{18}(2\times3^7)$ 的程序计算……………………………(194)

§5.5　表 $L_{16}(4^5)$ 的程序计算……………………………(197)

§5.6　表 $L_{25}(5^6)$ 的程序计算……………………………(201)

§5.7　静态特性信噪比的程序计算……………………………(204)

§5.8　动态特性信噪比及回归方程的程序计算……………………………(206)

参考资料……………………………(209)

附录……………………………(211)

编后……………………………(237)

*第一章[注]予 备 知 识

§1·1 多维正态变量及其二次型的分布

根据中心极限定理我们可知，受大量的均匀微小因素影响的随机变量为正态变量。在概率统计的理论和应用中正态变量都扮演着重要的角色，在正交试验结果的统计分析中也是这样。

一维和二维正态分布的密度和性质我们是熟悉的。二维正态分布$N(a_1,a_2,\sigma_1{}^2,\sigma_2{}^2,\rho)$的密度函数为

（1·1·1）

$$p(x_1,x_2)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\times e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x_1-a_1)^2}{\sigma_1^2}-2\rho\frac{(x_1-a_1)(x_2-a_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(x_2-a_2)^2}{\sigma_2^2}\right]}$$

其中$\sigma_1>0$，$\sigma_2>0$，

$|\rho|\leqslant 1$。若记二维正态变量

$\xi=\begin{pmatrix}\xi_1\\ \xi_2\end{pmatrix}$，$\xi$的协方差矩阵$B-\begin{pmatrix}\sigma_1^2 & \sigma_1\sigma_2\rho\\ \sigma_1\sigma_2\rho & \sigma_2^2\end{pmatrix}$，则行

列式$|B|=\sigma_1^2\ \sigma_2^2(1-\rho^2)$，从而

$B^{-1}=\frac{1}{|B|}\begin{pmatrix}\sigma_2^2 & -\sigma_1\sigma_2\rho\\ -\sigma_1\sigma_2\rho & \sigma_1^2\end{pmatrix}$，再记$X=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}$，$A-\begin{pmatrix}a_1\\ a_2\end{pmatrix}$

〔注〕只考虑应用的读者，可略去标有“*”号的章、节、段不读而无妨。

容易验证

$$(X-A)'B^{-1}(X-A)=\frac{1}{1-\rho^2}\times\left[\frac{(x_1-a_1)^2}{\sigma_1^2}-2\rho\frac{(x_1-a_1)(x_2-a_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(x_2-a_2)^2}{\sigma_2^2}\right]$$

于是密度函数(1·1·1)可写为

$$(1\cdot1\cdot2)\quad p(x_1,x_2)=\frac{1}{2\pi|B|^{\frac{1}{2}}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(x-A)'B^{-1}(x-A)}$$

有了正态密度的这种形式，就可以定义多维正态分布.

定义1·1 若$B=(b_{ij})$为n阶正定对称方阵，其逆为B^{-1}，$A=(a_1,\ \cdots,\ a_n)'$，则由密度函数

$$(1\cdot1\cdot3)\quad p(x_1,\cdots,x_n)=\frac{1}{(2\pi)^{n/2}|B|^{\frac{1}{2}}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(x-A)'B^{-1}(x-A)}$$

确定的分布称为n维正态分布，记作$N(A,B)$.

设随机向量$\xi=(\xi_1,\ \cdots,\ \xi_n)'\sim N(A,B)$，可以证明$A$与$B$分别为$\xi$的数学期望与协方差矩阵，即

$$a_i=E\xi_i=\mu_i \qquad 1\leqslant i\leqslant n$$

$$b_{ik}=E(\xi_i-a_i)(\xi_k-a_k)=\sigma_{ik} \qquad 1\leqslant i,\ k\leqslant n$$

从而n维正态向量$\xi=(\xi_1,\ \cdots,\ \xi_n)'$的密度函数可以写为

$$(1\cdot1\cdot4)\quad p(x_1,\cdots,x_n)=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}|\Sigma|^{\frac{1}{2}}}\times\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(x-\mu)'\Sigma^{-1}(x-\mu)}$$

其中μ，Σ分别为向量ξ的数学期望与协方差矩阵且$|\Sigma|\neq 0$

当$|\Sigma|=0$时，是退化正态分布，其定义要用到特征函数

的知识，这里从略。以下谈到n元正态分布时均包含这种分布。

下面介绍n维正态向量的一些性质：

定理1·1·1 若$\xi=(\xi_1,\cdots,\xi_n)'\sim N(\mu,\Sigma)$，$B$为$m\times n$矩阵，则$\eta=B\xi\sim N(B\mu,B\Sigma B')$.

此定理表明n维正态向量在线性变换下仍为正态向量。

定理1·1·2 若$\xi=\begin{pmatrix}\xi_1\\ \xi_2\end{pmatrix}$服从正态分布，其协矩阵为

$$\Sigma=\begin{pmatrix}\Sigma_{11}, & \Sigma_{12}\\ \Sigma_{21}, & \Sigma_{22}\end{pmatrix} \tag{1·1·5}$$

其中ξ_1，ξ_2为ξ的子向量，Σ_{11}，Σ_{22}分别为这两子向量的协方差矩阵，Σ_{12}为由ξ_1与ξ_2的相应分量的协方差构成的相互协方差矩阵，$\Sigma_{21}=\Sigma'_{12}$。则ξ_1与ξ_2独立的充分必要条件是$\Sigma_{12}=0$.

更一般地，若$\xi=(\xi'_1\vdots,\cdots,\vdots\ \xi'_K)'$服从多元正态分布，其中$\xi_i$ $i=1,\cdots,K$也为向量，则$\xi_1,\cdots,\xi_K$相互独立的充分必要条件是$\Sigma_{ij}=0$，$i\neq j$，其中Σ_{ij}的意义同Σ_{12}.

特别，若$\xi=(\xi_1,\cdots,\xi_n)'$服从$n$元正态分布，则$\xi_1$，$\cdots$，$\xi_n$相互独立的充分必要条件是它们两两独立.

定理1·1·3 若n维随机向量$\xi=(\xi_1,\cdots,\xi_n)'\sim N(\mu,I_n\sigma^2)$，$C$为$n$阶正交方阵，令$\eta=C\xi$，则$\eta=(\eta_1,\cdots,\eta_n)'\sim N(cu,I_n\sigma^2)$.

证明 因为$\xi=(\xi_1,\cdots,\xi_n)'\sim N(\mu,I_n\sigma^2)$，$\eta=C\xi$，由定理1·1·1可知$\eta\sim N(C\mu,CI_n\sigma^2C')$，因为$CC'=I_n$，所以$CI_n\sigma^2C'=I_n\sigma^2$，即$\eta\sim N(C\mu,I_n\sigma^2)$.

由此可知，若$\xi=(\xi_1,\cdots,\xi_n)'$的分量为独立同分布的正态变量，向量$\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)'$，$\beta=(\beta_1,\cdots,\beta n)'$，且$\alpha'\beta=0$，

则$\alpha'\xi$与$\beta'\xi$独立。

与多维正态变量密切相关的一个变量是x^2变量，其密度函数为

$$p(x)=\begin{cases}0 & x\leqslant 0\\ \dfrac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma(\frac{n}{2})}x^{\frac{n}{2}-1}e^{-\frac{x}{2}} & x>0\end{cases}$$

称此分布为自由度是n的x^2－分布，记作$x^2(n)$，它具有以下性质：

定理1·1·4 1°若ξ_1，…，ξ_n独立同分布，分布为$N(0,1)$

则二次型 $\xi_1^2+\cdots+\xi_n^2\sim x^{2(n)}$.

2°若η_1，…，η_k是相互独立的x^2变量，自由度分别为n_1…，n_k，则$\eta_1+\cdots+\eta_k\sim x^2(n_1+\cdots+\eta_k)$.

3°设向量$\xi=(\xi_1,\cdots,\xi_n)'\sim N(O,I_n)$，$A$为实对称方阵，则二次型$\xi'A\xi$为自由度为$n_i$的$\chi^2$变量的充分必要条件是$A$是秩为$n_i$的幂等方阵.

4°设$\xi_i\sim N(0,1)$，$i=1$，…，n相互立独，记

$$\xi=(\xi_1,\cdots,\xi_n)',$$

$\xi'A_i\xi$，$i=1$，…，K是秩为n_i的非负二次型。我们有以下结果：

（1）若

(1·1·6) $\quad\xi'\xi=\xi'A_1\xi+\cdots+\xi'A_K\xi,$

则

(1·1·7) $\quad\xi'A_i\xi\sim x^2(n_i)$，$i=1$，…，$K$，相互独立的充分必要条件为

(1·1·8) $\quad n=n_1+\cdots+n_k.$

（2）若（1·1·7）及（1·1·8）成立，则（1·1·6）成立.

综合结果（1）与（2）可知，在以上所述的假设下（1·1·6），（1·1·7），（1·1·8）三个命题中任意两个成立时，另一个必然成立.

结果（1）即著名的柯赫伦（*Cochran*）定理，它在概率统计的一般教科书中都有证明，现在证明结果（2）.

因为$\xi' A_i \xi \sim x^2(n_i)$，$i=1$，…，$K$相互独立，由3°知，秩$R(A_i)=n_i$且$A_i$为幂等方阵，由$x^2$－分布的可加性知，$\xi' A_1 \xi + \cdots + \xi' A_k \xi \sim x^2(n_1+\cdots+\eta_k)$。因为$n=n_1+\cdots+n_k$，所以$\xi' A_1 \xi + \cdots + \xi' A_k \xi \sim x^2(n)$，由3°知$A_1+\cdots+A_k$为秩为$n$的幂等方阵，由于幂等方阵的特征根仅为0或1，所以

$$A_1+\cdots+A_n=I_n$$

从而

$$\xi'\xi=\xi' A_1 \xi+\cdots+\xi' A_k \xi$$

于是结果（2）获证.

§1·2　方差分析

在工农业生产中，某种产品的质量（或产量）往往要受各种条件的影响。这种影响产品质量（或产量）的条件叫做因素〔注〕并用大写拉丁字母A、B、C…表示。各因素在试验中所取的不同状态称为水平，有一类因素在生产中可以人为地加以调节，叫做可控因素。否则称为不可控因素即偶然因素。各种因素以及各因素之间的联合对产品指标的影响在生产过程中是交织在一起的，我们的任务就是要从各种因素之间这种错综复杂的关联中整理出秩序来，抓住主要矛盾，找出影响产品指标的主

〔注〕 在试验中取不同状态的因素也叫做因子。本书中二者通用。

要因素，从而获得对生产过程的某些规律性的认识，去能动地指导生产，以达到降低成本，提高产品的质量和产量的目的。这就需要合理地安排试验，并对试验结果进行科学地分析。方差分析即处理这类问题的科学方法。但它是建立在数据总体服从正态分布的基础之上的.

I　单因子试验的方差分析

例1·2　一批用同种原料织成的布，用不同的染整工艺处理后进行缩水率试验，考察不同的工艺对布的缩水率是否有显著影响。这里采用五种不同的染整工艺，每种工艺处理四块布记A为染整工艺这一因素，它的五个水平记为A_1，A_2,… A_5。试验结果如下表：

表 1·2·1

布样号 \ 染整工艺	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
1	4.3	6.1	6.5	9.3	9.5
2	7.8	7.3	8.3	8.7	8.8
3	3.2	4.2	8.6	7.2	11.4
4	6.5	4.1	8.2	10.1	7.8

我们用以下三个步骤来分析不同染整工艺对布的缩水率是否有显著影响.

一、建立统计假设

我们认为每一种染整工艺处理的布是一个总体，在方差分析中总假定各总体独立地服从同方差正态分布，即第i种染整

工艺处理的布块的缩水率是一个随机变量y_i，它服从分布$N(\mu_i, \sigma^2)$，$i=1,2,3,4,5$，试验的目的就是要检验假设

(1·2·1) $$Ho: \mu_1=\mu_2=\mu_3=\mu_4=\mu_5$$

是否成立。若拒绝假设Ho，就认为这五种染整工艺处理的布块的缩水率有显著差异，否则认为各种染整工艺处理的布块的缩水率的不同是由偶然因素引起的.

一般地，设在某试验中因素A有r个水平$A_1,\cdots, A_r$，在A水平下的试验结果$y_i \sim N(\mu_i,\sigma^2)$，$i=1,2,\cdots,r$。在$A_i$水平下做$t$次试验，结果为$y_{il}$，$j=1,2,\cdots,t$，可以看作来自$y_i$容量为$t$的样本，则$y_{il} \sim N(\mu_i,\sigma^2)$，$j=1,2,\cdots,t$。令$\varepsilon_{il}=y_{il}-\mu_i$，则

(1·2·2) $y_{il}=\mu_i+\varepsilon_{il}$，$i=1,2\cdots,r$，$j=1,2,\cdots t$。其中$\varepsilon_{il}$独立同分布，分布为$N(o,\sigma^2)$，要检验的假设为

(1·2·3) Ho: $\mu_1=\mu_2=\cdots=\mu_r$,

再改变一下参数的形式，记

$$\mu=\frac{1}{r}\sum_{i=1}^{r}\mu_i$$

令

$$\alpha_i=\mu_i-\mu, \quad i=1, 2, \cdots, r$$

称μ为一般平均，α_i为因素A第i水平的效应，易知r个效应α_1，$\cdots$，α_r满足

(1·2·4) $$\sum_{i=1}^{r}\alpha_i=0$$

这样(1·2·2)可改写为

$$(1\cdot2\cdot5)\begin{cases} y_{ij}=\mu+\alpha_i+\varepsilon_{ij}, i=1,2,\cdots,r; j=1,2,\cdots,t. \\ \sum\limits_{i=1}^{r}\alpha_i=0 \quad \varepsilon_{ij}\sim N(o,\sigma^2)，独立. \end{cases}$$

要检验的假设（$1\cdot2\cdot3$）可以写为

$$(1\cdot2\cdot6) \quad Ho: \alpha_1=\alpha_2=\cdots=\alpha_r=0$$

二、离差平方和的分解

为了导出检验假设$(1\cdot2\cdot6)$的统计量，我们对表示数据y_{ij}的波动性的离差平方和进行分解，分解为由偶然因素及因素A的不同水平引起的离差平方和之和．令

$$(1\cdot2\cdot7) \quad S_T=\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{t}(y_{ij}-\overline{y})^2$$

其中$\overline{y}=\frac{1}{rt}\sum\limits_{i=1}^{r}\sum\limits_{j=1}^{t}y_{ij}$，称$S_T$为总离差平方和，若令

$$(1\cdot2\cdot8) \quad R_{i.}=\sum_{j=1}^{t}y_{ij}, \overline{y_{i.}}=\frac{1}{t}y_{i.}$$

则

$$\begin{aligned} S_T&=\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{t}(y_{ij}-\overline{y})^2 \\ &=\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{t}(y_{ij}-\overline{y_{i.}}+\overline{y_{i.}}-\overline{y})^2 \\ &=\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{t}(y_{ij}-\overline{y_{i.}})^2+\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{t}(\overline{y_{i.}}-\overline{y})^2 \end{aligned}$$

这是因为容易验证交叉乘积项为零。
记

$$(1\cdot2\cdot9)\quad Se=\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{t}(y_{ij}-\overline{y_{i\cdot}})^2$$

$$(1\cdot2\cdot10)\quad S_A=\sum_{i=1}^{r}t(\overline{y_{i\cdot}}-\overline{y})^2$$

则

$$(1\cdot2\cdot11)\qquad S_T=Se+S_A$$

其中Se反映了由偶然因素引起的波动。在Ho不成立时S_A反映了因素A的不同水平引起的波动。

三、检验统计量及其抽样分布

因为在Ho成立时，y_{ij}，$i=1,2\cdots r$；$j=1,2,\cdots t$独立同分布，分布为$N(\mu,\sigma^2)$，所以

$$(1\cdot2\cdot12)\quad \frac{1}{\sigma^2}S_T\sim\chi^2(rt-1)$$

因为$\overline{y_i}.\sim N(\mu,\frac{\sigma^2}{t})$，$i=1,2,\cdots,r$相互独立，所以

$$(1\cdot2\cdot13)\quad \frac{1}{\sigma^2}S_A\sim X^2(r-1)$$

因为$y_{ij}\sim N(\mu,\sigma^2)$，所以$\frac{1}{\sigma^2}\sum_{j=1}^{t}(y_{ij}-\overline{y_{i\cdot}})^2\sim x^2(t-1)$，由$x^2$变量的可加性知

$$(1\cdot2\cdot14)\quad \frac{1}{\sigma^2}Se\sim x^2(rt-r)$$

因为$rt-1=(rt-r)+(r-1)$，所以由柯赫伦定理可知S_e与S_A