中等专业学校试用教材

工业性质专业适用

三　角

SANJIAO

人民教育出版社

这一套中等专业学校（工业性质专业）試用数学教材，是根据教学改革精神，結合目前初中数学逐步过渡的情况編写的，分"代数"（包括解析几何）、"三角"（包括比例綫段与相似形等），"立体几何"、"高等数学"等册。

本册"三角"以函数为綱，与"代数"紧密結合构成一有机整体。本书最后附有必要的几何知識——"比例綫段与相似形"，遇有必要时可以在"三角"以前講授。

中等專业学校試用教材

工业性質專业适用

三　角

中等專业学校数学編写組編

人民教育出版社出版 高等学校教材編輯部 北京宣武門内承恩寺7号

（北京市书刊出版业营业許可証出字第2号）

上海市印刷三厂印刷

新华书店上海发行所发行

各地新华书店經售

统一书号 13010·90　开本 850×1168 1/32　印张 5 10/16

字数 142,000　印数 450,001—650,000　定价(5) ¥ 0.50

1960年6月第1版　1960年10月上海第5次印刷

序

这一套中等专业学校(工业性质专业)試用数学教材，是根据当前教学改革的精神，結合目前阶段初中数学基础逐步过渡的具体情况而編写的。在課程的內容和体系上力求革除旧有数学教材中脫离实际、分散孤立、繁瑣重复、陈旧落后的現象，本着理論結合实际、以函数为綱、数形結合、概念与計算統一的原則作了新的安排，并力求反映当前社会主义建設大跃进形势和現代科学技术的要求。

原平面解析几何中的直綫、二次曲綫，与代数中的一次函数、二次函数以及二次方程、方程組等內容結合起来，連同冪函数、指数函数、对数函数和三角函数构成一个比較完整的初等函数体系。

在代数中，增添了諾模图、排列、組合、二項式定理、概率、行列式、极坐标等基础数学知識，以适应学习高等数学和生产实际中的需要。

由于中等专业学校某些基础技术課、专业課以及代数在教学上較早地需要三角函数的知識，因而三角仍单独印为一本，便于与代数平行講授，但仍然以函数为綱，与代数紧密配合，构成一个有机整体，在代数里学过有关函数的基本概念与正比例函数后，卽充分利用几何图形引入三角函数概念，这样为全面地研究直綫方程提供了方便。关于三角函数基本性質的研究与图象的討論安排在最后一章，以便在代数中学过对数函数之后講授，可以通过这一章的学习，系統而完整地認識基本初等函数的性質。

考虑到目前过渡阶段的具体情况，有关几何基本知識在破除欧几里德系統、删去繁瑣陈旧部分的原則下，作了如下安排："比例綫段与相似形"附列在三角教材的后面，需要講授时可在三角之前

講授;有关正多边形的边长和面积計算等問題并入解三角形中,可灵活取舍。

立体几何以繪制图形与图形性質的研究为中心，增加了繪制空間簡单几何体的直观图的基本知識,密切配合制图課的教学。如果可能,最好与制图課合并講授。

为了适应学习专业的需要和为今后进一步掌握现代科学技术所需的数学知識打好基础，在高等数学中比过去增加了一些新的内容,如級数、微分方程、二元函数微分法、重积分、綫积分等,以扩大知識的应用領域，从而达到它的工具性的目的。在叙述过程中都貫穿着既有适当的分析,又有足够的直观性,同时加强了基本概念,便于学生掌握計算方法。

为了照顾不同专业的需要,本书編写时取材的面比較广泛,因此对教材中的某些内容,以及标有 * 号的章节,講授时可根据具体情况,考虑精簡或删除。

由于时間仓促，且限于編者的認識水平和业务水平，謬誤之处,在所难免,希各地教师讀者予以指正。

中等专业学校数学編写组

1960 年 6 月

目　录

第一章　角与弧及其度量

§1.1 任意大小的角与弧

以前我們把从一点引出的两条射綫所組成的图形叫做角。这个定义，在很多实际和理論問題上都感到不便，需要用一个新的定义来代替它。

我們来观察旋轉的輪子上的某一輻条。当輪子靜止时，假定这一輻条的位置是 OA (图 1-1)；輪子轉动时，在某一时刻，这一輻条的位置是 OB，这时 $\angle AOB$ 虽然仍旧可以看作是由具有共同端点的两条射綫 OA 和 OB 所組成的图形，但 OA 和 OB 却分別被看作旋轉射綫的开始位置和終止位置，即把角看作是射綫繞端点旋轉而形成的。而且这一射綫可以繞端点 O 作任何旋轉，从开始位置 OA 到任何一个时刻的終止位置 OB，都可組成不同的角。因此，今后我們将把角看成是一条射綫在平面內环繞着它的端点旋轉所形成的。旋轉射綫的开始位置叫做角的始边，旋轉射綫的終止位置叫做角的終边。

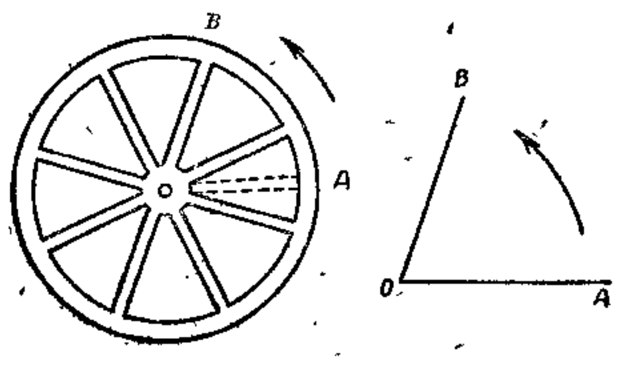


图 1-1

虽然，始边和終边构成了角的几何图形，但考虑角的大小时，不能只根据几何图形，还必須知道角是怎样形成的，即必須知道射綫繞端点旋轉的方向和周数。不难从图 1-2 中看出：角可以大于一个平角或一个周角；也可大于或等于几个周角；或者是零（即射綫沒有作任何旋轉，仍留在开始的位置）；同时，由于射綫可以从不同的方向以不同的周数繞端点旋轉，可見具有相同几何图形的角却可以不相等。

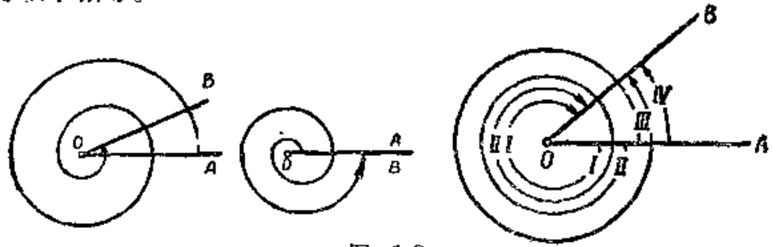


图 1-2

我們規定：当角是由射綫繞着端点按反时針方向旋轉而形成的时候，就說这角是正的；反过来，角就是負的。例如：相互銜接的两个具有同样半徑的齿輪，彼此旋轉的方向是相反的（图 1-3）；在旋轉时，其中一个旋轉某一个角，另一个也旋轉同样的角，但一个为正而另一个为負。

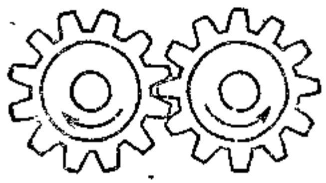


图 1-3

因此，正角的大小就用正数表示，負角的大小就用負数表示。由于射綫繞端点旋轉时，可以組成任意大小的角（正的、負的、零和含有任意周数的），所以**角可以用任意的实数来表示**①。

与角 α 具有共同始边和終边的角，它們可以有正的或負的方向和任意的周数，因此这样的角有无穷多个。这无穷多个角可以

① 在几何上我們已知道角可以用以度（分，秒）为单位的十进小数表示。例如：$42°36'18''=42°.605=2556'.3$。

用下式表示：

$$\alpha+k\cdot360^\circ$$

"$k\cdot360^\circ$"中 k 为任意整数，当 k 为正时，射綫从角 α 的終边开始按反时針方向旋轉 k 周；当 k 为負时，射綫从角 α 的終边开始按順时針方向旋轉 $|k|$ 周。即：具有相同始边和終边的角，它們可能相差 360° 的整倍数。

以前我們把圓周上两点間的部分叫做弧。并且指出圓心角和它所对的弧的量数相同而与半徑的大小无关。根据上述角的定义，我們来研究弧的新的定义。

我們仍旧来观察旋轉的輪子，选取某一輻条上的某一点 M，当輪子旋轉时，M 随着这一輻条划出一段弧 $\overset{\frown}{MM'}$（图 1-4）。在旋轉过程中的任何一个时刻，对应着輻条所組成的角就有一定的弧 $\overset{\frown}{MM'}$。因此，我們把弧看作是射綫上的一点 M（不与端点重合），随着射綫旋轉所經历的路徑（軌迹）。显然，对应于每个不同終边位置的角，都有确定的弧 $\overset{\frown}{MM'}$。

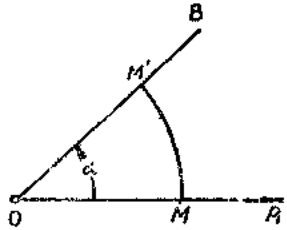


图 1-4

我們同样规定：当 M 点按反时針方向旋轉时，M 点所划出的弧为正；反过来，M 点所划出的弧为負。这样，对应于正角或負角的弧与角具有相同的符号。因此，弧也可以用与所对应的圓心角的相同的量数表示。

§1.2 角与弧的度量方法——弧度法

我們知道，对任何的"量"，都可以根据量的特性和我們的需要与应用上的方便，选擇一定的同类量作为度量单位来量它的大小，并且用数来表示度量的結果。因此在度量角与弧时，也可以有各种不同的度量单位。

我們已經学过角与弧的一种度量单位，就是取等于一个整圓

周的 $\frac{1}{360}$ 的弧叫做一度的弧，它所对的圆心角叫做一度的角，把它們作为度量单位去度量其他的弧与角。有时为了更精确的度量，还可以把一度的 $\frac{1}{60}$ 叫做一分，或再把一分的 $\frac{1}{60}$ 叫做一秒，去度量弧与角，"分"和"秒"是更精确的度量单位。

在工程技术中，常常取一周作为弧和角的度量单位，例如：齿輪，发电机的轉子，飞机的螺旋桨等旋轉，通常是用周数来量的。

在炮术里，取一整圆周的 $\frac{1}{60}$ 的弧所对的圆心角叫做一大密位的角，作为角的度量单位（一大密位的 $\frac{1}{100}$ 叫一小密位）。

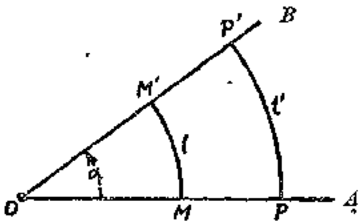


图 1-5

在高等数学和許多科学研究与应用中，常采用角和弧的另一种度量单位，下面我們来介紹这种新的单位。

作任意一个正角 α（图 1-5），在角 α 的始边 OA 上任取一点 M，并設 $OM=R$；作角 α 时，点 M 运动而形成弧 $\overset{\frown}{MM'}$，設 $\overset{\frown}{MM'}$ 的长度（与 R 的单位相同）为 l，当点 M 在 OA 上取不同位置时，对于比值 $\frac{l}{R}$ 有下面的定理。

定理 角所对弧长与半徑之比，仅决定于角 α 的大小，与半徑的长短无关。

証明 在 OA 上任意取另一点 P，并設 $OP=R'$，作角 α 时，点 P 运动而形成弧 $\overset{\frown}{PP'}$，并設 $\overset{\frown}{PP'}$ 长为 l'。

因为对应于同一个圆心角的两个圆弧长之比等于它們的半徑之比①。即：

$$\frac{l}{l'}=\frac{R}{R'},$$

① 扇形 OMM' 和扇形 OPP' 相似。

所以 $$\frac{l}{R}=\frac{l'}{R'}。$$

这定理說明了，角 α 一定时，不管角 α 所对圓弧的长度是多少，弧长与半徑之比总是一个常量，当角的大小改变时，这个比也改变。因此，我們可以用圓心角所对弧长与半徑之比的比值来表示角的大小，用这个比来表示角的大小的方法叫做弧度法。

弧的长度等于半徑时，这一比值为1，我們便把与半徑等长的弧叫做一弧度的弧，作为弧的度量单位，把与半徑等长的弧（即一弧度的弧）所对的圓心角，叫做一弧度的角（图 1-6），作为角的度量单位。一弧度簡称一弳。

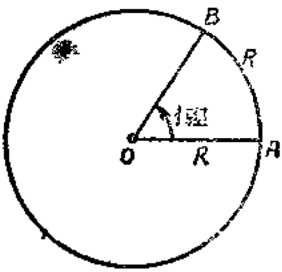


图 1-6

一个角所对弧长 l 中所含半徑 R 的倍数，是这弧的弳数，同时也就是用一弳的角去度量这个角时，所得的角的弳数。因此求一个角或弧的弳数时，可以通过下面的式子計算出来：

$$\boxed{\alpha(\text{弳})=\frac{l}{R}}. \tag{I}$$

§1.3 角或弧的度与弳的換算

同一个角或弧，用不同的度量单位"度"和"弳"去度量时，所得的量数是不相同的。有时，須要把已知角的度数（或弳数）換算为此角的弳数（或度数）；因此，必須掌握它們之間換算的一般法則。

我們很容易找出某些特殊角的度数与弳数之間的关系：因为一个周角是 $360°$，而一个周角的弳数是 $\frac{2\pi R}{R}=2\pi$，所以

$$360°=2\pi\ \text{弳}。$$

随之就可以得出下列的表：

n°	30	45	60	90	120	135	150	180	210	225	240	270	…
α 弳	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	…

利用上面特殊角的度数与弳数的关系，可以导出一般的换算法则。

因为

$$180^\circ=\pi \text{ 弳。}$$

所以 $$1^\circ=\frac{\pi}{180}\text{ 弳}\approx 0.0174533\text{ 弳；}$$

$$1\text{ 弳}=\frac{180^\circ}{\pi}\approx 57.^\circ295764\approx 57^\circ 17'44.''8\text{。}$$

实用上，常把 1 弳的度数以 ρ 表示。卽：

$$1\text{ 弳}=\rho^\circ=57.^\circ295764\text{。}$$

由此，得出换算的一般法则如下①：

(1) 把已知度数为 n° 的角化为用弳来表示，只須把 n 乘上 $\frac{\pi}{180}$ 弳（或 0.0174533 弳）。

(2) 把已知弳数为 A 的角化为用度来表示，只須把 A 乘上 $\frac{180^\circ}{\pi}$（或 ρ°）。

为了使用方便，我們規定：用弳表示角的大小时，可以略去“弳”字。也就是說，遇到一个角沒有附上单位时，那末它就是以

---

① 在某些特殊工作中（例如測量工作），須要将很小的角度进行单位换算，可得：

$$1'=\frac{1^\circ}{60}\approx 0.000290882\text{ 弳}$$

$$1''=\frac{1'}{60}\approx 0.00000484813\text{ 弳}$$

$$1\text{ 弳}=\frac{180}{\pi}\times 60'=\rho'\approx 3437.'74677$$

$$1\text{ 弳}=\frac{180}{\pi}\times 60\times 60''=\rho''\approx 206264.''806$$

"弳"为单位。

下面用例子説明这些法则和规定的应用。

例 1. 把 $67°30'$ 化为弳。

$$67°30'=67.°5=\frac{\pi}{180}\times 67\frac{1}{2}=\frac{135\pi}{360}=\frac{3\pi}{8}。$$

例 2. 化 2 弳为度(准确到 $0.1°$)。

$$2\approx 2\times 57.°3\approx 114.°6(准确到\ 0.1°)。$$

在实际应用中,我們可以从布拉基斯四位数学用表 (表 XVI) 直接查出换算的結果而不須进行繁瑣的計算。表中列出每隔 $1'$ 的角所对应的弳数,它們都准确到 0.00005,同样,也可由表中所列的弳数查出它所对应的度数和分数,它們准确到 $1'$(以后,如沒有指出結果准确度的要求时,就是按四位表的准确度),它的查法与平方表等的查法类似。

例 3. 化 $223°16'$ 为弳。

$$223°16'=2\times 90°+43°16'$$

查表

A	0′	6′	12′	18′		1′	2′	3′
43°				0.7557			6	
90°	1.5708							

得 $$223°16'=2\times 1.5708+(0.7557-0.0006)$$
$$=3.8967。$$

例 4. 化 2.9534 为度。

$$2.9534=1.5708+1.3826$$

A	0′	6′	12′	18′		1′	2′	3′
79°			1.3823			3		

查表得 $\quad 2.9534=90°+(79°12'+1')=169°13'$。

在§1.1中得出的与角α具有共同始边和終边的角，当角α用弳为单位时，可以用下式表示：

$$\alpha+2k\pi \ (k\text{ 为任何整数})。$$

为了能熟練地使用角的弳制，今后，将多用弳为单位来表示角。但由于实际需要和查表的方便，度制单位仍然要采用，讀者必须熟悉这两种不同单位的关系。

§1.4 圓弧长

知道圓的半徑R和一段弧（或所对圓心角）的弳数α，可以計算这段弧的长l。因为

由§1.2公式(I) $\qquad \alpha=\dfrac{l}{R}$，

可得： 一弧度为一弳 $\boxed{l=R\cdot\alpha}$ $\qquad$ (II)

即：圓弧长等于它的弳数与半徑的乘积。

若弧或所对圓心角为$n°$，则

$$n°=\frac{\pi}{180}\times n(\text{弳})，$$

得： $\boxed{l=\dfrac{n\pi R}{180}}$ $\qquad$ (III)

一段圓弧和通过它的端点的两个半徑所圍成的图形叫做扇形（图1-7）。我們可以計算扇形的周界和面积。

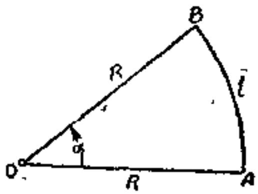


图 1-7

如果扇形AOB的周界用$P_{\text{扇形}AOB}$表示，那末

$$P_{\text{扇形}AOB}=2R+R\alpha。$$

关于扇形AOB的面积$S_{\text{扇形}AOB}$，可利

用下面方法推出：

$$\frac{S_{\text{扇形}AOB}}{S_{\text{圆}}}=\frac{\alpha}{2\pi},$$

这里 $S_{\text{圆}}$ 是对应圆的面积。所以

$$S_{\text{扇形}AOB}=\frac{\alpha}{2\pi}\times\pi R^2,$$

即：

$$\boxed{S_{\text{扇形}}=\frac{1}{2}R^2\alpha} \qquad \text{(IV)}$$

或

$$S_{\text{扇形}AOB}=\frac{1}{2}R^2\alpha=\frac{1}{2}R\cdot R\alpha,$$

即：

$$\boxed{S_{\text{扇形}}=\frac{1}{2}Rl} \qquad \text{(V)}$$

所以，扇形的面积等于扇形的弧长与半径乘积的一半。

例 1. 有一种活塞銷的鎖环如图 1-8 所示，直徑为 26 毫米，环成 340° 的角，問制造时需用多长的鋼絲(准确到 1 毫米)。

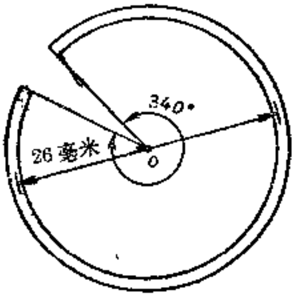


图 1-8

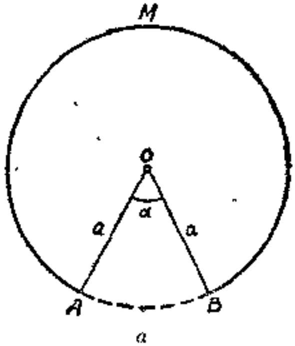
解 $l=R\alpha=13\times\frac{\pi}{180}\times340$。粗略估計 $10<l<100$，故取 $\pi\approx3.14$，即

$$l=13\times\frac{3.14}{180}\times340\approx77 \text{ 毫米。}$$

例 2. 在化学实驗中用的过滤器是由一張圓形的滤紙作成，將圓形中扇形 AOB (图 1-9, a) 折迭起来使組成圓錐形状(图 1-9, b)。若圓錐的底半徑 x 等于 $\frac{\sqrt{6}}{3}a$ 时 (a 为圓形滤紙半徑)，所成圓錐的体积为最大(即一次能装的液体最多)；求这时所折迭起来的扇形的圓心角 α。

解 由題意可得

$$\overset{\frown}{AMB}=2\pi x,$$



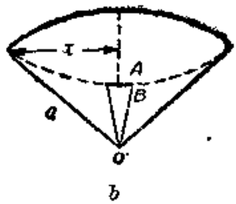


图 1-9

$$\widehat{AB}=2\pi a-\widehat{AMB}=2\pi a-2\pi x,$$

所以 $$\alpha=\frac{\widehat{AB}}{a}=\frac{2\pi a-2\pi x}{a}=2\pi-2\pi\frac{x}{a}。$$

以 $x=\frac{\sqrt{6}}{3}a$ 即 $\frac{x}{a}=\frac{\sqrt{6}}{3}$ 代入得

$$\alpha=2\pi\left(1-\frac{\sqrt{6}}{3}\right)=0.3674\pi,$$

所以 $$\alpha\approx1.1531\approx66°4'。$$

§1.5 匀速圆周运动

旋轉的飞輪或在車床上加工的物体上的任何一个質点是沿着圓周而运动的。假如对每一个質点来說，在任何相等的时間間隔里所經历的弧長相等，那末这种运动就叫做匀速圓周运动。由于引入了角的弧度法和圓弧长的公式，我們可以导出匀速圓周运动的綫速度和角速度以及路程对时間的函数关系式。

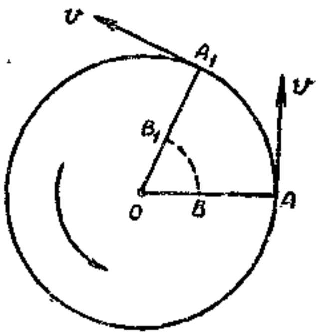


图 1-10

匀速圆周运动中，質点 A（图 1-10）在单位时間内所經历的弧长，叫做点 A 的綫速度 v，它是一个常量，它的方向是这点的切綫方向。綫速度 v 可以用下面的公式来表示：

$$v=\frac{2\pi R}{T} \quad 或 \quad v=2\pi Rf,$$

式中 R—点 A 至軸心 O 的距离，卽作圆周运动时的半徑的长。

T—点 A 旋轉一整周所需的时間，叫做周期。匀速圆周运动的周期是一个常量。

f—点 A 在单位时間内旋轉的周数，叫做频率。匀速圆周运动的频率也是一个常量，显然

$$T=\frac{1}{f} \quad 或 \quad f=\frac{1}{T}。$$

根据 § 1.2 公式（I），$\frac{v}{R}$ 就是点 A 所經历的弧长（每单位时間内）与半徑之比，它应該是点 A 所經历的弧或弧所对的圆心角（每单位时間内）的弳数，叫做弧速度或角速度。通常以 ω 表示之。卽

$$\omega=\frac{v}{R} \quad 或 \quad v=R\omega。$$

把 $v=\frac{2\pi R}{T}$ 代入，便得

$$\omega=\frac{2\pi R}{T}\times\frac{1}{R},$$

卽：

$$\boxed{\omega=\frac{2\pi}{T}} \tag{VI}$$

事实上，点 A 在 T 时間内旋轉一周，它所經历的弧（或角）的弳数是 2π，所以 $\frac{2\pi}{T}$ 就是点 A 在单位时間内所經历的弧（或角）的弳数。显然弧速度（或角速度）也是一个常量。

用弧（角）速度来研究匀速圆周运动非常方便。从图 1-10 可