中学教师参考读物

$$A+A=A$$

$$A+AB=A$$

$$A+\overline{A}=1$$

$$A+1=1$$

逻辑代数ABC

甘肃人民出版社

逻辑代数ABC

高冠群

甘肃人民出版社

逻辑代数ABC

高 冠 群

甘肃人民出版社出版

（兰州庆阳路230号）

甘肃省新华书店发行　　天水新华印刷厂印刷

开本787×1092 1/32　印张 4.875　字数98,000

1980年12月第1版　　1980年12月第1次印刷

印数1——4,100

书号：13096·63　　定价：0.42元

前　言

以命题为研究对象的逻辑代数，以电路的通断、电平（信号电压）的高低或信号的有无为研究对象的开关代数，以及以集合为研究对象的集合代数等，尽管它们从表面来看似乎是风马牛不相及的，但事实上它们都遵循着某些共同的基本规律，且具有某些相同的基本性质．布尔代数就是逻辑代数、开关代数和集合代数的概括和抽象，从而更广泛、更深刻地反映了它们的本质．本书以布尔代数自对偶公理系统为基础，建立了全部定理和理论．

由于电子数字计算机、数字电路的兴起和发展，开关代数显示了它的重大作用．本书也正是以开关代数为主要对象而讲述的．但是从数学的角度来看，开关代数只不过是以特定命题为研究对象的逻辑代数而已，所以对开关代数的叫法，在习惯上仍沿用逻辑代数一词．

只对逻辑电路感兴趣的读者，可以略去有关集合代数部分；对于只对数学有兴趣的读者来说，第 7 部分—“在逻辑电路设计中的某些应用”可不必涉及．

本书以初学者为对象，尽可能写得通俗易懂．但又考虑到数学本身的特点，在初学者容易理解的前提下，写得相对的谨严一些．

有关卡诺图的结构，最小项和函数的最小项表达式性质的问题，阐述得较为详尽，即使对逻辑电路从业人员来说，

也可能会有某些参考价值。除最后一部分外，每部分之后都配有练习题，答案附在最后。对于较繁或较难的练习题，不仅给出了答案，而且还指出解题步骤或表明了中间过程。本书所采用的例题和习题，凡在题号右上角标有“*”号者，均表示该题选自全日制十年制学校高中课本《数学》第三册，从而为中学数学有关逻辑代数部分的教学，提供了具体的帮助。

为了便于阅读，兹将本书所用数字编码规则表明如下：

1.一位数码

字型较大者表示“章”数；字型大小正常的表示属于同一“章、节”的一些问题的序号。如果这些问题还需要细分，则仍用一位数码编其序号，但加以括号，表示属于次一级。

2.二位数码

第一数码表示“章”数，第二位数码表示“节”数。

3.三位数码

表示图、表或式子。第一位数码表示它所在“章”数，第二位数码表示所属“节”数，第三个数码则为其本身序号。第二个数码为“0”者，表示这个式子、图或表是属于相应于第一数码的“章”所属习题的。

由于笔者才疏学浅，欠妥或错误之处在所难免，望广大读者不吝赐教。

编　者

1980年5月于兰州大学

目　录

1.记 数 制

为了叙述的方便和理论的展开；为了扩大理论与实践的联系面，从而使读者易于看到理论指导实践的积极作用，我们先介绍记数制。

11 十进记数制

十进记数制是人人都很熟悉的一种记数制度，它在科研、生产、劳动以及日常生活中均有广泛的应用。一个十进制数，不论它是大是小或等于多少，要来表示它，只需用0、1、…、9这十个数码就够了。同一个数码，处在不同的位置上便表示不同的意义。比如，2298.34，在小数点（“.”）左侧第一位上的数字“8”表示$8\times10^0=8\times1=8$；但其左侧第二位上的数字“9”所表示的并不是9，而是$9\times10^1=90$；同一数码“2”，在小数点左侧第三位上的表示$2\times10^2=200$，但在最高位即最左侧位上的“2”，却表示$2\times10^3=2000$。至于小数点右侧的数码“3”和“4”，则依次表示$3\times10^{-1}=0.3$和$4\times10^{-2}=0.04$。因此，符号2298.34所表示的就是这样一个数：

$$
\begin{aligned}
2298.34 &= 2\times10^3+2\times10^2+9\times10^1+8\times10^0\\
&\quad+3\times10^{-1}+4\times10^{-2}\\
&=2000+200+90+8+0.3+0.04
\end{aligned}
$$

不难看出，这个表达式是按10的降幂排列的一个多项式。“10”叫做该记数制的基或基底，10^3、10^2、10^1、10^0、10^{-1}、10^{-2}依次分别是数码2、2、9、8、3、4所在位的“权”。

一般地讲，对于任意一个十进制数S（不失一般性，可设S≥0）来说，总可以表示成：

$$S=\sum_{i=m}^{n} a_i .\ 10^i$$

$$=a_n\cdot 10^n+a_{n-1}\cdot 10^{n-1}+\cdots+a_0\cdot 10^0+a_{-1}\cdot 10^{-1}+\cdots+a_{-m}\cdot 10^{-m}$$

其中数码a_i的下标“i”，不论取从$-m$到n的任何整数值，它所对应的数码a_i总不外乎是0、1、…、9这十个中的某一个。10^i叫做该数码a_i所在位的“权”，至于10则叫作基底。

以上分析表明，十进记数制遵从下述规律：

1.十进记数制共有十个数码。

2.从小数点向高位方向，数码所在位的“权”，依次是10^0、10^1、10^2、…；从小数点向低位方向，数码所在位的“权”依次是10^{-1}、10^{-2}、10^{-3}、…。

3.逢十进1。

4.若把小数点位置向右移n位，则每一个数码所在位的“权”扩大成10^n倍，从而小数点位置移动后的这个数，成了原来那个数的10^n倍。至于小数点位置向左移动的情况，可作为n取负值的情况对待。

5.在考虑到加法、乘法都遵从交换律的前提下，我们需要加法口诀和乘法口诀各55句，因为：

0与0到9这10个数对应的口诀　10句；
1与1到9这9个数对应的口诀　9句；
2与2到9这8个数对应的口诀　8句；
……
8与8到9这2个数对应的口诀　2句；
9与9这1个数对应的口诀　1句。

∴　口诀总数 = 10 + 9 + … + 2 + 1

$$= \frac{1}{2} \times 10 \times (10 + 1)$$

$$= 55.$$

12　一般记数制

任意自然数 $J \geqslant 2$ 可选作记数制的基底。以J作基底的记数制叫作J进位记数制。读者请自行考虑，为什么把 $J = 1$ 排除在外，不取它作基底呢？

J进位记数制有如下特点：

1. 有从0到 $J-1$ 的共J个数码。
2. 一个J进位数 S_J 总可以表示成

$$S_J = \sum_{i=-m}^{n} a_i J^i$$

$$= a_n J^n + a_{n-1} \cdot J^{n-1} + \cdots + a_1 J + a_0 + a_{-1} J^{-1} + \cdots + a_{-m} J^{-m} \text{。}$$

J^i 叫做数码 a_i 所在位的"权"。

3. 逢J进1。
4. 小数点右移n位后，扩大成原数的 J^n 倍，小数点左

移 n 位后扩大成原数的 10^{-n} 倍。

5.在考虑到加法、乘法遵从交换律的条件下，我们有加法口诀、乘法口诀各

$$\frac{1}{2}J\cdot(J+1)$$

句。

13 二进记数制

J = 2 的记数制，就是二进记数制。把二进制特别提出来加以讨论，是因为它有许多独特的优点，在电子计算机方面得到了广泛的应用。由于二进制记数规则已完全包括在上面所讲的 J 进位记数制中了，所以这里只谈一下它的一些明显的特点。

1.用二进制记数时，只需 0 、1 这两个数码就够了，所以使得显示一个二进制数码或一个二进制数变得十分容易。从原则上讲，任何一个具有两种状态的事物，都可用来表示一个二进制数码。比如，电灯的亮与灭；开关的通与断；晶体管的导通与截止；电压的高与低；脉冲的有与无等。

2.口诀少，只有 $\frac{1}{2}\cdot2\ (2+1)=3$ 句，它们是：

$$0+0=0,\qquad 0\cdot0=0,$$
$$0+1=1,\qquad 0\cdot1=0,$$
$$1+1=10,\qquad 1\cdot1=1.$$

如此简单的运算法则，有利于借助逻辑电路来实现计算，从而为电子计算机运算器的创造、发展与使用创造了有利

条件。

3.上面说的是二进制优点，然而它也有重大甚至不可弥补的缺点，这就是同一个数，用二进制记它时，所用数码的个数，比用其它任何基底记这个数时所用的数码个数都多一些，使得用二进制记的数难读难写。与十进制相比较，它所用的数码个数，大约是用十进制时所用数码个数的$\log_2 10 \doteq 3$倍。因为十进制数，n 位所能表示的最大数等于10^n-1，而二进制数 m 位所能表示的最大数为2^m-1，若它们表示的是同一个数，则

$$10^n-1=2^m-1$$

$$\therefore \quad m=\log_2 10^n=n\log_2 10 \doteq 3n$$

例1 求二进制数11011与110的和、差、积、商。

【解】

$$\begin{array}{r} 11011 \\ +\quad 110 \\ \hline 100001 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 11011 \\ -\quad 110 \\ \hline 10101 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 11011 \\ \times\quad 110 \\ \hline 00000 \\ 11011 \\ 11011 \\ \hline 10100010 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} & 100.1 \\ \cline{2-2} 110 & 11011 \\ & 110 \\ \cline{2-2} & 110 \end{array}$$

例2 求101.111与110.011的和、差、积、商。

【解】

$$\begin{array}{r} 101.111 \\ +\quad 110.011 \\ \hline 1100.010 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 110.011 \\ -\quad 101.111 \\ \hline 0.100 \end{array}$$

$$
\begin{array}{r}
101.111 \\
\times \quad 110.011 \\
\hline
101\ 111 \\
1011\ 11 \\
101111 \\
101111 \\
\hline
100101.011101
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r|r}
 & 0.11101 \\
\cline{2-2}
110.011 & 101.111 \\
 & 11\ 0011 \\
\cline{2-2}
 & 10\ 1011 \\
 & 1\ 10011 \\
\cline{2-2}
 & 1\ 00011 \\
 & 110011 \\
\cline{2-2}
 & 10011 \\
 & 110011 \\
\cline{2-2}
 & 11001
\end{array}
$$

14 二进制数和十进制数的互化

1.二进制数化成十进制数

为此，提供三种方法如下：

（1）按基底为 2 的幂将此数展开；

（2）按“权”将该数展开；

（3）把它分成两个数的和，分别把每一个数转换成十进制的数，然后再求其和.

例1 把11010111_2化成十进制数．这儿下标“2”表示该数是二进制的．

【解1】 按幂展开．

$11010111_2=2^7+2^6+2^4+2^2+2^1+2^0=215$

【解2】 按权展开．

$11010111_2=128+64+16+4+2+1=215$

【解3】 分解成二数之和处理．

$11010111_2=11010000_2+111_2$.

$\because \quad 1101_2=13, \qquad \therefore \quad 11010000_2=13\times16=208,$

又因　$111_2=7$

$\therefore\quad 11010111_2=208+7=215$。

例2　把二进制数 0.1011 化成十进制数。

【解1】　按基底的幂展开。

$$0.1011_2=\frac{1}{2}+(\frac{1}{2})^3+(\frac{1}{2})^4=0.6875$$

【解2】　按权展开。

$$0.1011_2=\frac{1}{2}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}=0.6875.$$

【解3】　移动小数点位置，使成整数。

$$0.1011_2=1011_2\times 2^{-4}=11\times\frac{1}{16}=0.6875.$$

例3　把 11010111.1011_2 化成十进制数。

【解】　按基底 2 的幂展开，或按每个数码所在位的权展开都是可行的。但把它分成整数部分和小数部分，然后分别化成十进制数，最后求其和的办法也许更方便一些。

$$\begin{aligned}11010111.1011_2&=11010111_2+0.1011_2\\&=215+0.6875=215.6875.\end{aligned}$$

2.十进制数化为二进制数

任意一个十进制数，总可以分解成整数与小数两个部分的和。因此，我们只要分别讨论，如何把十进制整数和十进制纯小数化为二进制数的问题就够了。

（1）十进制整数化为二进制整数

设S为一个十进制整数，其二进制表示为

$$S=a_na_{n-1}\cdots a_1a_0,$$

于是　$$\begin{aligned}S&=a_n\cdot 2^n+a_{n-1}\cdot 2^{n-1}+\cdots+a_1\cdot 2^1+a_0\cdot 2^0\\&=2(a_n\cdot 2^{n-1}+a_{n-1}\cdot 2^{n-2}+\cdots+a_1)+a_0,\end{aligned}$$

所以，用 2 除S得到的余数正好是数码a_0，而商为

$$q_0=a_n\cdot 2^{n-1}+a_{n-1}\cdot 2^{n-2}+\cdots+a_2\cdot 2^1+a_1,$$

再用 2 去除q_0，得到的余数，正就是所要求的数码a_1，而商则为

$$q_1=a_n\cdot 2^{n-2}+a_{n-1}\cdot 2^{n-3}+\cdots+a_3\cdot 2^1+a_2.$$

用同样的方法，可依次求得a_2，q_2；a_3，q_3；…直到最后求得a_n，$q_n=0$为止。

例4 把215化成二进制数。

【解】 215除以 2，得商$q_0=107$，余$a_0=1$；

q_0除以 2，得商 $q_1=53$， 余$a_1=1$；

q_1除以 2，得商 $q_2=26$， 余$a_2=1$；

q_2除以 2，得商 $q_3=13$， 余$a_3=0$；

q_3除以 2，得商 $q_4=6$， 余$a_4=1$；

q_4除以 2，得到 $q_5=3$， 余$a_5=0$；

q_5除以 2，得商 $q_6=1$， 余$a_6=1$；

q_6除以 2，得商 $q_7=0$， 余$a_7=1$。

$\therefore$ $215=a_7a_6a_5a_4a_3a_2a_1a_{0\,2}=11010111_2$

在实际工作中，计算用如下的一个竖式子表达较为方便。

$2\,\lvert\,\underline{215}$	
$2\,\lvert\,\underline{107}=q_0$	$a_0=1$
$2\,\lvert\,\underline{53}=q_1$	$a_1=1$
$2\,\lvert\,\underline{26}=q_2$	$a_2=1$
$2\,\lvert\,\underline{13}=q_3$	$a_3=0$
$2\,\lvert\,\underline{6}=q_4$	$a_4=1$
$2\,\lvert\,\underline{3}=q_5$	$a_5=0$
$2\,\lvert\,\underline{1}=q_6$	$a_6=1$
$0=q_7$	$a_7=1$

【又解】　二进制各数位的权如下：

$2^0=1$，　$2^1=2$，　$2^2=4$，　$2^3=8$，

$2^4=16$，　$2^5=32$，　$2^6=64$，　$2^7=128$，

$2^8=256$，　$2^9=512$，　$2^{10}=1024$，　$2^{11}=2048$.

$$215-128=87,$$

$$215-128-64=23,$$

$$215-128-64-16=7,$$

$$215-128-64-16-4=3,$$

$$215-128-64-16-4-2=1.$$

$\therefore$　$215=1\cdot128+1\cdot64+0\cdot32+1\cdot16+0\cdot8+1\cdot4+1\cdot2+1$

$$=11010111_2$$

（2）　十进制纯小数化为二进制小数

设十进制纯小数S的二进制表示为

$$S=0.a_{-1}a_{-2}a_{-3}\cdots a_{-m2},$$

用2乘S表达式两端．注意，二进制数的小数点位置向右移一位，就等于用2乘了这个数的这一事实，便有

$$2S=a_{-1}.a_{-2}a_{-3}\cdots a_{-m2}$$
$$=a_{-1}+0.a_{-2}a_{-3}\cdots a-m_2$$
$$=a_{-1}+S_1$$

同样，　$2S_1=a_{-2}+0.a_{-3}a_{-4}\cdots a_{-m2}$
$$=a_{-2}+S_2.$$

依此类推，可求得往后的数码　a_{-3}、$a_{-4}\cdots$直到a_{-m}为止。

上列式子表明，把所予十进制纯小数S乘以2，则其积的整数部分记作a_{-1}，就是所求二进制数的第一位数码，把其小数部分记作S_1．然后再用2乘S_1，其积的整数部分记