

数学基础知识丛书

整 式

吉 星 杨佩祥

江苏教育出版社

221

2

整 式

吉 星 杨佩祥



江苏教育出版社

内 容 提 要

这套《丛书》共二十四册，系统介绍数学基础知识和基本技能，供中学数学教师、中学生以及知识青年、青年工人阅读。

《丛书》根据现行全日制十年制学校《中学数学教学大纲》（试行草案）精神编写，内容上作了拓宽、加深和提高。《丛书》阐述的数学概念、规律，力求符合唯物辩证法，渗透现代的数学观点和方法，以适应四个现代化的需要。为了便于读者阅读，文字叙述比较详细，内容由浅入深，由易到难，循序渐进，习题、总复习题附有答案或必要的提示。

本书分整式的意义和性质、整式的因式分解两个部分，共十二节。第一部分，主要讲整式的概念、性质及其运算；第二部分，主要讲作为整式恒等变形的因式分解的各种类型和方法。

本书初稿的第一部分某些内容由单增同志编写。

本书原由江苏人民出版社出版，这次重印改为江苏教育出版社出版。

整 式

吉 星

杨佩祥

江苏教育出版社出版

江苏省新华书店发行 镇江前进印刷厂印刷

开本787×1092毫米 1/32 印张5.25 字数115,000

1979年6月第1版 1984年4月第8次印刷

印数161,001—186,800册

书号：13351·002 定价：0.40 元

责任编辑 何震邦

目 录

一、整式的意义和性质	1
§1 代数式	1
§2 整式及有关概念	6
§3 整式的加减法	13
1. 单项式的加减法	13
2. 去括号和添括号	13
3. 多项式的加减法	15
§4 整式的乘法	18
1. 指数法则	18
2. 单项式与单项式相乘	19
3. 多项式与单项式相乘	20
4. 多项式与多项式相乘	21
5. 乘法公式	26
§5 整式的除法	38
1. 指数法则	38
2. 单项式与单项式相除	40
3. 多项式除以单项式	41
4. 多项式除以多项式	41
§6 多项式恒等定理	46
1. 多项式的恒等定理	46
2. 待定系数法	48
§7 多项式的整除性	52
1. 多项式的整除性	52
2. 带余式除法	54

3. 余数定理	53
4. 综合除法	59
§8 最高公因式与最低公倍式	66
1. 最高公因式	66
2. 最高公因式的求法	69
3. 两个多项式最高公因式的定理	71
4. 最低公倍式	72
5. 最低公倍式的求法	73
6. 多项式因式分解的唯一性定理	74
二、整式的因式分解	79
§9 常用的几种因式分解方法	80
1. 提取公因式法	80
2. 分组分解法	81
3. 公式法	84
4. 十字相乘法	92
5. 配方法	97
6. 几种因式分解方法的综合应用	103
§10 用待定系数法分解因式	114
§11 用综合除法分解因式	121
§12 轮换对称式的因式分解	132
1. 对称式	132
2. 轮换对称式	137
3. 轮换对称式的因式分解	139
附录 习题、总复习题答案与提示	149

一、整式的意义和性质

§1 代 数 式

初等代数是研究数量的运算规律的，这些运算规律是现实世界数量关系的反映。在实际问题中的数量关系，常用含字母的数学式子表示。怎样化简这些式子？这是实际提出的要求，也是初等代数要讨论的基本问题之一。

为什么要用字母表示数呢？我们先从一个简单的例子谈起。

一个长方形的房间，长是5米，宽是3米，那么它的面积就是

$$5 \times 3 = 15 \text{ (平方米)} .$$

一块长方形的地，长是40丈，宽是20丈，那么这块地的面积就是

$$40 \times 20 = 800 \text{ (平方丈)} .$$

计算其它长方形的面积，也都是用长和宽相乘，这种数量关系可以写成

$$\text{长方形的面积} = \text{长} \times \text{宽} \quad (1)$$

如果用字母 s 表示长方形的面积， a 表示长方形的长， b 表示长方形的宽，那么公式(1)可以记为

$$s = a \times b, \quad (2)$$

$$\text{或 } s = ab. \quad (2')$$

在字母和字母相乘时，通常把“ $\times$ ”号记作“ $\cdot$ ”或者省略不写。如 $a \times b$ 就写成 $a \cdot b$ 或 ab ；字母和数相乘时，

也可以用这种省略号记,如 $2 \times a$ 可写成 $2 \cdot a$ 或 $2a$. 但 $a \times 2$ 应把数字写在字母前面,即写成 $2a$,不能写成 $a2$.

公式(2)或(2')简单明白,它从计算个别的特殊的长方形面积中,概括出一般的规律,表示了长方形的面积和边长之间的数量关系.

同样地,用 c 表示圆的周长, r 表示圆的半径,那么就有公式

$$c = 2\pi r. \quad (3)$$

由具体的2头牛、3只羊等抽象出2、3等数,再用字母表示数,又进一步抽象化了,这种抽象是从实践来的.

各种运算定律或法则也可以用字母简单明白地表示出来,如:

$$\text{加法交换律} \quad a + b = b + a \quad (4)$$

$$\text{加法结合律} \quad (a + b) + c = a + (b + c) \quad (5)$$

$$\text{乘法交换律} \quad ab = ba \quad (6)$$

$$\text{乘法结合律} \quad (ab)c = a(bc) \quad (7)$$

$$\text{乘法对加法的分配律} \quad a(b + c) = ab + ac \quad (8)$$

这里字母 a 、 b 、 c 都表示数.

通过上述一些例子可以看出,用字母表示数,能简单明白地表达出某些普遍性的规律或数量间的一般关系.

通过今后的学习,还可以进一步了解用字母表示数的作用,

字母与字母或数字与字母之间并不是完全孤立的、毫无联系的;从上面举的一些例子可以看出,数学式子都是用运算符号把代表数的字母或数字连接起来而成的.只含加、减、乘、除、乘方、开方这六种运算的数学式子叫做代数式,简称为式,这六种运算叫做代数运算,例如 $a + b$, ab , $2\pi r$ 等

都是代数式。

单独的一个数或者表示数的字母，例如 a 、40、 $-1\frac{1}{3}$ 、 π 等也可以看作是代数式。

在解决实际问题时，常常需要把问题中的语言叙述用代数式来表示。这一工作可以比成“翻译”，这种“翻译”工作很重要，是学习初等代数的一个基本功。

例 1 用 a 表示去年的产量，如果今年产量比去年产量的 2 倍多 100 斤，今年产量如何表示？

解

语 言 叙 述	代数式 (单位: 斤)
去年产量	a
去年产量的 2 倍	$2a$
去年产量的 2 倍多 100 斤	$2a + 100$

$\therefore$ 今年产量是 $(2a + 100)$ 斤。

表达熟练以后，就不需要这样一步步地去做。

例 2 字母 a 表示甲数， b 表示乙数。用代数式表示：

(1) 甲数的 $\frac{2}{3}$ 与乙数的 $\frac{1}{4}$ 的差；

(2) 甲、乙二数的和的平方；

(3) 甲、乙二数的平方和。

解 (1) $\frac{2}{3}a - \frac{1}{4}b$;

(2) $(a + b)^2$;

(3) $a^2 + b^2$ 。

注意(2)、(3)是不同的。

反过来，也应当会用语言把一个代数式正确地叙述出来。

例 3 用语言叙述下列代数式：

- (1) $x-y$; (2) $3(a+b)$; (3) $a+3b$;
(4) a^3+b^3 ; (5) $2x^2-y^2$; (6) $5x^2y^3$.

- 解** (1) x 与 y 的差;
(2) a 与 b 的和的 3 倍;
(3) a 与 b 的 3 倍的和;
(4) a 、 b 的立方和;
(5) x 的平方的 2 倍与 y 平方的差;
(6) x 平方与 y 立方的积的 5 倍。

用数值代替代数式里的字母，算出的结果叫做代数式的值。

由具体数字发展到用字母组成的代数式，是一个由特殊到一般的过程；反之，用数值代替代数式中的字母进行计算，并求出代数式的值的这一过程，就是由一般到特殊的过程。

例 4 x 取以下各值时，代数式 $2x+3$ 的值各是多少？

- (1) $x = \frac{3}{2}$; (2) $x = 0$; (3) $x = -5$.

- 解** (1) 当 $x = \frac{3}{2}$ 时， $2x+3 = 2 \times \frac{3}{2} + 3 = 6$;
(2) 当 $x = 0$ 时， $2x+3 = 2 \times 0 + 3 = 3$;
(3) 当 $x = -5$ 时， $2x+3 = 2 \times (-5) + 3 = -7$.

由例 4 可以看出，代数式的值是由代数式里字母所取的值确定的（图 1）。

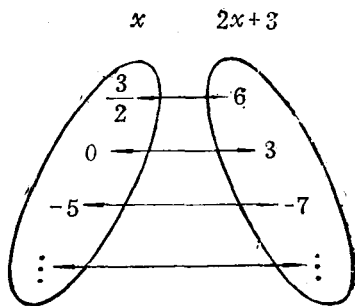


图 1

例 5 一段圩堤的横断面是梯形 (图 2)，这段圩堤的长是 l (单位米)，求这段圩堤的土方数 V 。

如果 $a = 3.0$ ， $h = 4.0$ ， $l = 50$ ， V 的值是多少？

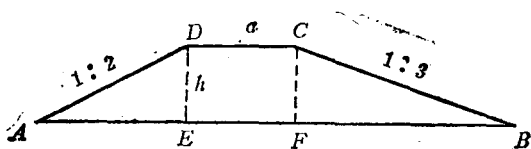


图 2

坡度 $1:2$ 即 $AE = 2DE$
 $1:3$ 即 $BF = 3CF$

$$\text{解 } V = \frac{1}{2} [a + (a + 2h + 3h)] hl$$

$$= \frac{1}{2} (2a + 5h) hl.$$

当 $a = 3.0$ ， $h = 4.0$ ， $l = 50$ 时，

$$V = \frac{1}{2} (2 \times 3.0 + 5 \times 4.0) \times 4.0 \times 50$$

$$= 2.6 \times 10^3 \text{ (米}^3\text{)}.$$

为简便起见，常用符号 $f(x)$ ， $\varphi(x)$ ， $\psi(x)$ 等表示含 x

的代数式。当 $x = a$ 时, $f(x)$ 的数值记为 $f(a)$ 。如例 4,
 $f(x) = 2x + 3$, 所求的值是 $f\left(\frac{3}{2}\right) = 6$, $f(0) = 3$, $f(-5)$
 $= -7$ 。

例 6 已知 $\varphi(x) = x^2 - 3$, 求 $\varphi(2)$, $\varphi(-1)$ 。

解 $\varphi(2) = 2^2 - 3 = 4 - 3 = 1$,

$$\varphi(-1) = (-1)^2 - 3 = 1 - 3 = -2.$$

含有两个字母 x, y 的代数式可记为 $f(x, y)$, $\varphi(x, y)$ 等, 当 $x = a$, $y = b$ 时, $f(x, y)$ 的值记为 $f(a, b)$ 。其它类推。

例 7 已知 $f(x, y) = \frac{x+1}{y-2}$, 求 $f(4, -3)$ 。

$$\text{解 } f(4, -3) = \frac{4+1}{-3-2} = \frac{5}{-5} = -1.$$

由于代数式中的字母是表示数的, 因此数的运算定律如交换律、结合律、乘法对加法的分配律在式的运算中仍然成立, 但是式的运算也有它自己的特点, 我们将在后面加以研究。

§ 2 整式及有关概念

只含字母的加、减、乘、除、乘方五种运算的代数式叫做有理式。

有理式又分为两类:

不含除法运算或者虽有除法运算, 但在除式中不含字母的有理式, 叫做整式。

除式中含有字母的有理式, 叫做分式。

如 $2x$, $-\frac{2}{3}a^2$, $0.25ab^2$, $\frac{3x^2y}{4}$, $x+1$, $ay+b+c$,

$x^3 - 3x^2 + 5x - 4$, $\frac{x-1}{5}$ 都是整式;

$\frac{2}{a}$, $\frac{1}{x+1}$, $\frac{x-3}{x+2}$, $\frac{\sqrt{3}}{x-2}$ 都是分式.

不含加减法运算的整式叫做单项式, 上面所举的 $2x$, $-\frac{2}{3}a^2$, $0.25ab^2$, $\frac{3x^2y}{4}$ 都是单项式.

单独的一个字母或数, 如 x , a , -2 也是单项式.

在一个单项式里, 数字因数叫做字母因数 (或单项式) 的数字系数, 简称系数.

如 $2x$ 中 2 是 x 的系数, $-\frac{2}{3}a^2$ 中 $-\frac{2}{3}$ 是 a^2 的系数. 这里要注意, 系数是带有符号的, 如 $-4x^2$, x^2 的系数是 -4 而不是 4 .

如果一个单项式只含有字母因数, 它的系数就是 1 或者 -1 . 例如 b 就是 $1 \cdot b$, 系数是 1 ; $-x^2y$ 就是 $(-1) \cdot x^2y$, 系数是 -1 .

有时由于需要, 将字母区别为主要的和非主要的, 主要字母外的因数的乘积就称为系数, 这时系数就不仅限制为数字系数.

例如, 圆柱的高为 h , 底圆半径为 R , 圆柱的体积就可以用代数式 $\pi R^2 h$ 来表示.

(1) 如果高 h 是定量, 那么圆柱体积就是由底圆半径 R 来确定的, 我们就可以把 R 当成主要字母, πh 就是 R^2 的系数,

(2) 如果 R 是定量, 那么, 圆柱的体积就是由圆柱的高 h 来确定的, 我们就可以把 h 当成主要字母, πR^2 就是 h 的系数;

(3) 如果 R 和 h 都不是定量, 那么圆柱的体积就是由 R 和 h 来确定的, 我们就可以把 R 和 h 都当作主要字母, π 就是 $R^2 h$ 的系数。

一般地说: 把单项式中的因数分成两部分, 一部分 (包括数字因数) 就是另一部分的系数。

未经特别说明, 代数式中所有的字母一般都看成是主要字母。

一个单项式中, 所有字母指数的和叫做这个单项式的次数, 如 $5a^2$ 的次数是 2; $-3a^2bx^2y^3$ 的次数是 8; 如果只把 x 、 y 当作主要字母, 那么 $-3a^2bx^2y^3$ 的次数就是 5。

不含字母因数且不等于零的单项式叫零次单项式。如 -5 就可以看做是零次单项式。

把零看成单项式时, 叫做零单项式。这是由于, 当单项式的系数等于零时总有

$0 = 0 \cdot x^n$, $0 = 0 \cdot x^k \cdot y^l \cdot z^s$, $\dots\dots$ (n 、 k 、 l 、 s 为任意正整数) 都成立, 所以不给零单项式的次数。

几个单项式的代数和叫做多项式, 其中每一个单项式叫做多项式的项。含有两个项的多项式叫做二项式, 含有三个项的多项式叫做三项式, 依此类推。

如 $x+1$, $ax + \sqrt{2}by + c$, $0.5x^2 - x + 2$, $x^3 - 3x^2 + 5x - 4$ 都是多项式。

$x+1$ 是二项式, x , $+1$ 是它的项。

$x^3 - 3x^2 + 5x - 4$ 是四项式, x^3 、 $-3x^2$ 、 $+5x$ 、 -4 是它的项。

如果多项式各项的系数都是整数, 这个多项式就叫整系数多项式。

如 $x+1$, $x^3 - 3x^2 + 5x - 4$ 都是整系数多项式。

按照加法交换律，多项式的各项顺序可以交换，但要注意这里说的项是连同符号的。

多项式里不含字母的项叫做**常数项**。如 $x^3 - 3x^2 + 5x - 4$ 里 -4 是常数项。不等于零的常数项也称做 x 的**零次项**。

如果多项式里的某些项，所含的字母相同，并且各个字母的指数也分别相同，那么这些项就叫做**同类项**。几个常数项也是同类项。

例如 $4xy^2 + 2x^4 - 6x^2y - 5xy^2 + 9 + 5x^4 - 10$ 里第一项 $4xy^2$ 和第四项 $-5xy^2$ ，第二项 $2x^4$ 和第六项 $5x^4$ 是同类项， 9 与 -10 也是同类项。

根据乘法对加法的分配律，可以把同类项合并成一项，叫做**合并同类项**。例如

$$4xy^2 - 5xy^2 = (4 - 5)xy^2 = -xy^2,$$

$$2x^4 + 5x^4 = (2 + 5)x^4 = 7x^4.$$

所以合并同类项只要合并它们的系数。这样，多项式 $4xy^2 + 2x^4 - 6x^2y - 5xy^2 + 9 + 5x^4 - 10$ 可以简化为 $7x^4 - 6x^2y - xy^2 - 1$

每一个多项式经过合并同类项，总可以表示成互不同类的单项式的代数和。合并同类项后的多项式，其中次数最高的项的次数，称为这个**多项式的次数**。一个多项式的次数是几，就叫做几次多项式。单独一个不等于零的数可以看作是**零次多项式**。把零看成多项式时，叫做**零多项式**。（见§6）

如 $x + 1$ 是一次二项式，

$x^3 - 3x^2 + 5x - 4$ 是三次四项式。

各项的次数都相同的多项式，叫做**齐次多项式**，也常叫做**齐次式**。如 $x^2 - 2xy + 3y^2$ 是二次齐次式。

合并同类项后的多项式，我们通常把它按某一字母的次

数逐渐减小(或增大)排列起来,叫做按这个字母的降幂(或升幂)排列。

如 $x^3 - 3x^2 + 5x - 4$ 是按 x 的降幂排列,

$-4 + 5x - 3x^2 + x^3$ 是按 x 的升幂排列。

习 题 一

1. (1) $+a$ 一定大于 $-a$ 吗? $3a$ 一定大于 $2a$ 吗? $a+b$ 一定大于 $a-b$ 吗?

(2) a 是正数还是负数? $-a$ 呢? $|a|$ 呢? $|-a|$ 呢? $-|a|$ 呢? 举例说明。

2. $a \neq 0$, $b \neq 0$, 能不能断定 $a+b \neq 0$? $a \cdot b \neq 0$? $\frac{a}{b} \neq 0$?

3. 如果 $ab > 0$, 试讨论 a 、 b 的符号? 如果 $ab < 0$ 呢?

4. 当 a 为何值时: (1) $2a > a$; (2) $2a = a$; (3) $2a < a$;

(4) $|a| = a$.

5. 两个数的和是 a , 其中一个数是 x , 另一个数是什么?

6. 用代数式表示:

(1) a 、 b 两数的积与 c 的和;

(2) x 的 2 倍与 y 的差的平方;

(3) a 与 b 的和的绝对值;

(4) x 的倒数与 y 的差。

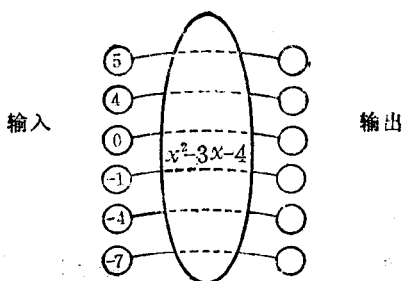
7. 用语言叙述下列代数式:

(1) $|a| - |b|$;

(2) $(a+b+c)^2$.

8. 已知 $f(x) = x^2 - 3x - 4$, 求 $f(5)$ 、 $f(4)$ 、 $f(0)$ 、 $f(-1)$ 、 $f(-4)$ 、 $f(-7)$ 。

(如图, 用 x 表示输入数, 求下列输出数)



(第 8 题)

9. 当 $a = 2$, $b = -3$, $c = 1$ 时, 求下列各代数式的值:

(1) $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$,

(2) $\left(\frac{b-c}{a} + \frac{c-a}{b} + \frac{a-b}{c}\right)\left(\frac{a}{b-c} + \frac{b}{c-a} + \frac{c}{a-b}\right)$.

10. 当 $x = -3\frac{1}{2}$, $y = \frac{2}{3}$ 时, 求下列各代数式的值:

(1) $\frac{x+y}{x-y}$;

(2) $\frac{x^2 - y^2}{xy - 1}$.

11. 当 $x_1 = -1$, $x_2 = 2$, $x_3 = \frac{1}{3}$ 时, 计算:

(1) $x_1 + x_2 + x_3$;

(2) $x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1$;

(3) $x_1x_2x_3$;

(4) $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3}$.

12. 下列代数式, 哪些是整式? 哪些是分式? 把它们分别填在整式集合和分式集合里. 每个集合里各有几个元素?

$-4x^2$, $a-b$, $\frac{bc}{a}$, $\frac{xy}{a+b}$, $\frac{a+b}{3}$, $a^2 - 2ab + b^2$,

$\frac{5}{2x+3}$, $\sqrt{2}x+1$, $\frac{\sqrt{2}}{3-x}$, 0 , $5+\frac{b}{a}$, -8 .



整式集合



分式集合

(第12题)

(具有一定共同特征的一类事物的全体叫做集合。
组成集合的每一个个体叫做这个集合的元素。)

13. (1) 三个连续整数, 中间一个是 n , 写出其它两个;
(2) 三个连续奇数, 中间一个是 n , 写出其它两个.
14. 一个两位数, 个位数字是 a , 十位数字是 b , 写出这个两位数,
试将这个问题推广到三位数、四位数等等.
15. 有煤 m 吨, 每天用 x 吨, 用代数式表示:
(1) 可以用多少天?
(2) 如果每天节约用煤 a 吨, 那么可以用多少天?
(3) 节约用煤后, 可以多用多少天?
16. 某工人每天制造零件 a 个:
(1) b 天制造了多少零件?
(2) 如果每天比原来多制造 2 个零件, b 天制造多少个零件?
比原来多多少?
17. 多项式 $8t - 7 + \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{3}t^3$ 有几项? 各项的系数与次数各是多少? 多项式的次数是多少? 将这个多项式按照 t 的降幂排列起来.
18. 合并同类项:
(1) $15x - 4x + 10x$; (2) $-6ab - ab + 8ab$;
(3) $m + m + m - n^2 - n^2$; (4) $\frac{2}{3}x^2 + \frac{5}{6}x^2 - \frac{1}{2}x^2$.