高等学校数学系列教材

线性代数

（修订版）

主编 王 锋 陈林珠

哈尔滨工程大学出版社

线性代数

（修订版）

主　审　唐向浦
主　编　王　锋　陈林珠
副主编　卜长江　沈　艳

哈尔滨工程大学出版社

内 容 简 介

全书共分五章：n 阶行列式、矩阵、线性方程组、向量组的线性相关性、相似矩阵和二次型，并附有习题参考答案或提示。本书内容结构严谨，逻辑清晰，例题和习题较多，便于教学。

本书可作为工科院校各专业的教材，也可供有关科技人员参考。

线性代数

（修订版）

主编　王锋　陈林珠

责任编辑　程小东

*

哈尔滨工程大学出版社出版发行

哈尔滨市南通街145号　哈工程大学11号楼

发行部电话(0451)82519328　邮编:150001

新华书店经销

肇东粮食印刷厂印刷

*

开本　850mm×1 168mm　1/32　印张 6.25　字数 170 千字

2004年1月第4版　　2004年1月第1次印刷

印数:21 001—25 000册

ISBN 7-81007-871-2

0·60　　定价:9.00元

前　　言

本书是根据国家教委审定的高等工业学校《线性代数课程教学基本要求》编写的。编写过程中，我们总结了多年的教学经验，认真听取了数学教研室广大教师提出的宝贵意见，从教学角度出发进行仔细推敲，使内容安排更加合理，逻辑清晰，通俗浅显，简明流畅，并配置了大量的例题和习题，便于教与学。

本书由哈尔滨工程大学数力系代数学专家唐向浦教授主审，在此我们表示衷心感谢！

由于我们水平有限，书中难免有不妥之处，恳请广大读者批评指正。

编者

1998 年 6 月

第四版前言

本版是在第三版的基础上修改而成。这次修改广泛吸取了使用本书的教师所提出的意见,从教学角度出发进行仔细推敲,改写了一些重要概念的论述,更换了部分例题和习题,对书中一些不妥之处和错误,作了改正,使内容和系统更加完整,便于教学。

本书第一章和第二章由王锋修改,第三章和第四章由卜长江修改,第五章由沈艳修改。

本次修改得到哈尔滨工程大学应用数学系全体同志的帮助,在此我们表示衷心地感谢。

2003 年 12 月

目　　录

第一章 n 阶行列式

本章主要讨论以下三个问题:

1. n 阶行列式的概念;
2. 行列式的性质及计算方法;
3. 克莱姆(Cramer)法则.

基本要求:掌握以上三个方面的基本概念;熟练地掌握行列式的计算方法和 Cramer 法则.

§1.1 二、三阶行列式

一、二阶行列式

引例 解二元线性方程组

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 & (1) \\ a_2x + b_2y = c_2 & (2) \end{cases}$$

解 $(1)\times b_2-(2)\times b_1$ 得 $(a_1b_2-a_2b_1)x=c_1b_2-c_2b_1$;

$(1)\times a_2-(2)\times a_1$ 得 $(a_1b_2-a_2b_1)y=c_2a_1-c_1a_2$.

把式中 x 或 y 的系数 $a_1b_2-a_2b_1$ 叫二阶行列式,记为

$$D=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}=a_1b_2-a_2b_1$$

同理

$$D_1=\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}=c_1b_2-c_2b_1$$

$$D_2=\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}=a_1c_2-a_2c_1$$

若 $D \neq 0$,可得到

$$x = \frac{D_1}{D}, \quad y = \frac{D_2}{D} \tag{3}$$

把(3)式的 x、y 代入方程组,可以验证它是满足方程组的,这就是二元线性方程组的唯一的一组解.

定义 二阶行列式 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ 定义为 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

其中 $a_{ij}(i,j=1,2)$ 为二阶行列式的第 i 行第 j 列的元素.

例 1 解方程组

$$\begin{cases} 2x + 4y = 1 \\ x + 3y = 2 \end{cases}$$

解

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 2 \times 3 - 4 \times 1 = 2$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -5, \qquad D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3$$

所以

$$x = \frac{D_1}{D} = -\frac{5}{2}, \quad y = \frac{D_2}{D} = \frac{3}{2}$$

二、三阶行列式

引例 解三元线性方程组

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = k_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = k_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = k_3 \end{cases}$$

解 如前面的方法,先从第一、第二两个方程中消去 z,再从

第一、第三两个方程中消去 z，最后从所得的两个方程中消去 y，就得到

$$
\begin{aligned}
&(a_1b_2c_3 - a_1b_3c_2 + a_2b_3c_1 - a_2b_1c_3 + a_3b_1c_2 - a_3b_2c_1)x \\
&= k_1b_2c_3 - k_1b_3c_2 + k_2b_3c_1 - k_2b_1c_3 + k_3b_1c_2 - k_3b_2c_1 \qquad (4)
\end{aligned}
$$

把 x 的系数叫三阶行列式，记为

$$
\begin{aligned}
D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \\
= a_1b_2c_3 - a_1b_3c_2 + a_2b_3c_1 - a_2b_1c_3 + a_3b_1c_2 - a_3b_2c_1
\end{aligned}
$$

显然(4)式右边是 D 中的 a_1, a_2, a_3 分别换成 k_1, k_2, k_3 而得到的结果，所以右边是

$$
D_1 = \begin{vmatrix} k_1 & b_1 & c_1 \\ k_2 & b_2 & c_2 \\ k_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}
$$

(4)式可以写成 $Dx = D_1$. 同理可以得到 $Dy = D_2$, $Dz = D_3$, 这里 D_2 是 D 中的 b_1, b_2, b_3 分别换成 k_1, k_2, k_3 所得到的行列式，D_3 是 D 中的 c_1, c_2, c_3 分别换成 k_1, k_2, k_3 所得到的行列式.

若 $D \neq 0$，则可得到

$$
x = \frac{D_1}{D}, \quad y = \frac{D_2}{D}, \quad z = \frac{D_3}{D} \qquad (5)
$$

把(5)式代入方程组可以验证它们是方程组的解，所以(5)式是三元线性方程组的唯一的一组解.

定义 三阶行列式

$$
\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1b_2c_3 + b_1c_2a_3 + c_1a_2b_3 - c_1b_2a_3 - b_1a_2c_3 - a_1b_3c_2
$$

为了便于记忆,可以依下列方法计算三阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

取在实线上的三个元素作乘积,冠以"+"号,则得三项

$$+ a_1 b_2 c_3, \ + b_1 c_2 a_3, \ + c_1 a_2 b_3$$

又取在虚线上的三个元素作乘积,冠以"-"号,则得三项

$$- c_1 b_2 a_3, \ - b_1 a_2 c_3, \ - a_1 b_3 c_2$$

于是行列式

$$\begin{aligned} D = & a_1 b_2 c_3 + b_1 c_2 a_3 + c_1 a_2 b_3 \\ & - c_1 b_2 a_3 - b_1 a_2 c_3 - a_1 b_3 c_2 \end{aligned}$$

这种作法叫**对角线法则**.

例 2 计算三阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

解 由对角线法则得

$$\begin{aligned} D = & 1 \times 2 \times 2 + (-2) \times 1 \times 3 + 3 \times 2 \times 0 \\ & - 3 \times 2 \times 3 - (-2) \times 2 \times 2 - 1 \times 0 \times 1 \\ = & 4 - 6 + 0 - 18 + 8 - 0 \\ = & -12 \end{aligned}$$

例 3 解方程组

$$\begin{cases} 2x - 4y + z = 1 \\ x - 5y + 3z = 2 \\ x - y + z = -1 \end{cases}$$

解

$$D = \begin{vmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 1 & -5 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -8 \neq 0$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 1 & -4 & 1 \\ 2 & -5 & 3 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 11$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 9$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 1 & -5 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 6$$

所以方程组的解为

$$x = \frac{D_1}{D} = -\frac{11}{8}, \quad y = \frac{D_2}{D} = -\frac{9}{8}, \quad z = \frac{D_3}{D} = -\frac{3}{4}$$

习题 1.1

1. 计算下列行列式:

(1) $\begin{vmatrix} a+b & a-b \\ a-b & a+b \end{vmatrix}$ (2) $\begin{vmatrix} x-1 & 1 \\ x^3 & x^2+x+1 \end{vmatrix}$

(3) $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{vmatrix}$ (4) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & -5 \end{vmatrix}$

(5) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$ (6) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ 2a & 2b & 2c \\ m & n & e \end{vmatrix}$

2. 利用行列式解下列方程组:

(1) $\begin{cases} 5x + 2y = 3 \\ 4x + 2y = 1 \end{cases}$ (2) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 1 \\ 4x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 4 \\ 2x_1 + 2x_3 = 6 \end{cases}$

3. 验证下列等式成立：

(1) $$\begin{vmatrix} ka_1 & kb_1 & kc_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

(2) $$\begin{vmatrix} a+a_1 & b \\ c+c_1 & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & b \\ c_1 & d \end{vmatrix}$$

(3) $$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

(4) $$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_1 & b_1 & c_1 \end{vmatrix} = 0$$

(5) $$\begin{vmatrix} a_1 & b_1+ka_1 & c_1 \\ a_2 & b_2+ka_2 & c_2 \\ a_3 & b_3+ka_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

(6) $$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1\begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$$

§1.2 排　列

一、全排列及其逆序数

n 元排列：由自然数 $1,2,\cdots,n$ 构成的不重复的全排列称为 n 元排列，排列中的每个数称为排列中的元素，一切 n 元排列的集合记为 A_n，A_n 中含有 $n!$ 个排列.

例如自然数 1,2,3 的一切全排列为 123、132、231、312、213、321，所以 $A_3=\{123,132,213,231,312,321\}$，$A_3$ 中含有 $3!$ 个排列.

在 n 元排列中规定 $123\cdots(n-1)n$ 为标准排列,即按递增的顺序排列起来的.在 A_n 的其它排列中,当某两个元素的先后次序与标准次序不同时,就说有一个逆序.一个排列中所有逆序的总数叫做这个**排列的逆序数**,逆序数为奇数的排列叫**奇排列**,逆序数为偶数的排列叫**偶排列**.

逆序数的求法:设 $p_1p_2\cdots p_n$ 为一个 n 元排列,考察数 $p_i(i=1,2,\cdots,n)$,如果比 p_i 大的且排在 p_i 前面的数有 t_i 个,说 p_i 这个数的逆序数是 t_i,则排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 的逆序数

$$t(p_1p_2\cdots p_n) = t_1 + t_2 + \cdots + t_n = \sum_{i=1}^{n} t_i$$

例 1 求排列 451326 的逆序数.

解 在排列 451326 中,

4 排在首位,逆序数 $t_1=0$;

5 的前面比 5 大的数没有,其逆序数 $t_2=0$;

1 的前面比 1 大的数有 4 和 5,其逆序数 $t_3=2$;

3 的前面比 3 大的数有 4 和 5,其逆序数 $t_4=2$;

2 的前面比 2 大的数有 4,5,3,其逆序数 $t_5=3$;

6 是最大的数,逆序数 $t_6=0$.

于是此排列的逆序数 $t(451326)=0+0+2+2+3+0=7$.此排列为奇排列.

例 2 求排列 $n(n-1)\cdots21$ 的逆序数.

解 元素 $n,n-1,\cdots2,1$ 的逆序数依次为 $t_1=0,t_2=1,t_3=2,\cdots,t_{n-1}=n-2,t_n=n-1$.所以 $t[n(n-1)\cdots21]=0+1+2+3+\cdots+(n-2)+(n-1)=\dfrac{n(n-1)}{2}$.

二、对换

对换:把一个排列中某两个数的位置互换,而其余的数不动,这种产生新排列的变换叫做**对换**.将相邻两个元素对换,叫**相邻对换**.

定理 1 对换改变排列的奇偶性.

证 先证相邻对换的情形.

设排列为 $a_1\cdots a_l abb_1\cdots b_m$,对换 a 与 b,变为

$$a_1\cdots a_l bab_1\cdots b_m$$

显然,$a_1,\cdots,a_l;b_1,\cdots,b_m$ 这些元素的逆序数经过对换并不改变,而 a、b 两元素的逆序数改变为:当 $a>b$ 时,经对换后 a 的逆序数不变而 b 的逆序数减少 1;当 $a<b$ 时,经对换 a 的逆序数增加 1 而 b 的逆序数不变。所以排列 $a_1\cdots a_l bab_1\cdots b_m$ 与排列 $a_1\cdots a_l a bb_1\cdots b_m$ 的奇偶性不同.

再证一般对换的情形.

设排列为 $a_1\cdots a_l ab_1\cdots b_m bc_1\cdots c_n$,把它作 m 次相邻对换,调成 $a_1\cdots a_l abb_1\cdots b_m c_1\cdots c_n$,再作 $m+1$ 次相邻对换,调成

$$a_1\cdots a_l bb_1\cdots b_m ac_1\cdots c_n$$

综上,经 $2m+1$ 次相邻对换,排列 $a_1\cdots a_l ab_1\cdots b_m bc_1\cdots c_n$ 调成排列 $a_1\cdots a_l bb_1\cdots b_m ac_1\cdots c_n$,所以这两个排列的奇偶性相反.

推论 奇排列调成标准排列的对换次数为奇数,偶排列调成标准排列的对换次数为偶数.

证 由定理 1 知对换的次数就是排列奇偶性的变化次数,而标准排列是偶排列(逆序数为 0),因此知推论成立.

习题 1.2

1. 求下列排列的逆序数,从而决定其奇偶性:

(1) 53124　　(2) 13572468

(3) 987654321　　(4) $246\cdots(2n)135\cdots(2n-1)$

2. 选择 i 和 j 使

(1) $1274i56j9$ 为奇排列;

(2) $1i25j4897$ 为偶排列.

§1.3　n 阶行列式

一、n 阶行列式的定义

由三阶行列式的定义

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} \quad (1)$$

看出:

1.(1)式右边的每一项都恰是三个元素的乘积,这三个元素位于不同的行、不同的列.因此(1)式右端的任意项除正负号外,可以写成 $a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3}$.这里第一个下标(称行标)排成标准排列 123,而第二个下标(称列标)排成 $p_1p_2p_3$,它是 1,2,3 三个数的某个全排列.这样的排列共有 6 种,对应(1)式右端共含 6 项.

2. 各项的正负号与列标的排列对照:

带正号的三项列标排列是:123,231,312;

带负号的三项列标排列是:132,213,321.

计算知前三个排列都是偶排列,而后三个排列都是奇排列.因此各项所带的正负号可以表示为$(-1)^t$,其中 t 为列标排列的逆序数.

综上,三阶行列式可以写成

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum_{p_1p_2p_3 \in A_3} (-1)^{t(p_1p_2p_3)} a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3}$$

其中 $t(p_1p_2p_3)$是列标排列 $p_1p_2p_3$ 的逆序数,$\sum$表示对 1,2,3 三个数的所有排列 $p_1p_2p_3$ 取和.

仿此,可以把三阶行列式推广到 n 阶行列式.

定义　n 阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{p_1p_2\cdots p_n \in A_n} (-1)^{t(p_1p_2\cdots p_n)} a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{np_n}$$

n 阶行列式简记为$\Delta(a_{ij})$,数 a_{ij}称为行列式$\Delta(a_{ij})$的第 i 行第j 列的元素.

按此定义的二阶、三阶行列式,与用对角线法则定义的二阶、三阶行列式是一致的.当 $n=1$ 时,$|a|=a$,不要与绝对值记号相混淆.

定义表明,为了计算 n 阶行列式,首先作所有取自不同行不同列的 n 个元素的乘积;把构成这些乘积的元素按行标排成自然顺序,然后由列标所成的排列的奇偶性来决定这一项的符号;一共有 $n!$ 项.

例 1　证明对角行列式(对角线上的元素是 λ_i,未写出的元素都是0).

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{vmatrix} = \lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n;$$

$$\begin{vmatrix} & & & \lambda_1 \\ & & \lambda_2 & \\ & \iddots & & \\ \lambda_n & & & \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$$

证　n 阶行列式的一般项为$(-1)^{t(p_1p_2\cdots p_n)} a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{np_n}$,由于行列式中出现很多的零,所以不等于零的项数就大大减少了,先看看哪些项不为零,然后再来决定它们的符号.显然若 $p_1 \neq 1$,则 $a_{1p_1}=0$,从而相应项就等于零,因此只须考虑 $p_1=1$ 的那些项;同理,只须考虑 $p_2=2, p_3=3, \cdots, p_n=n$ 这些列标的项,即行列式不