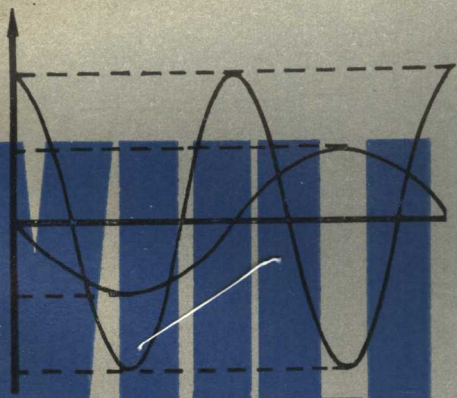


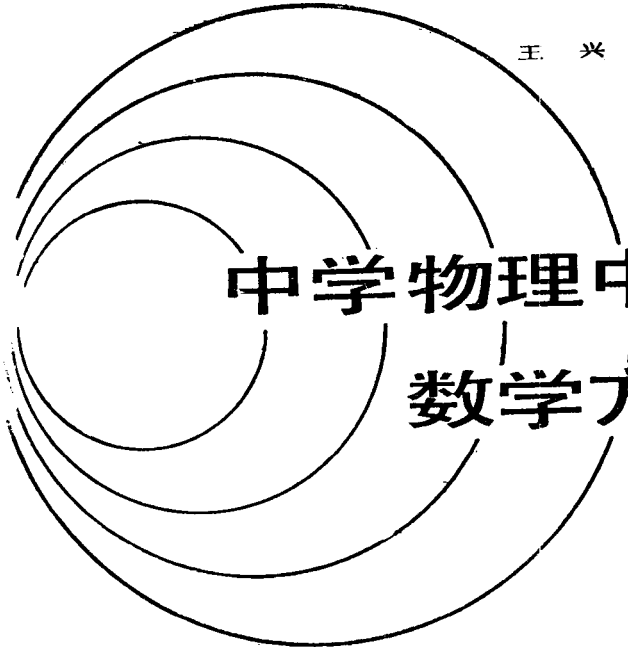
王兴桃·编著

中学物理中的 数学方法



安徽教育出版社

王 兴 桃 编 著



中学物理中的 数学方法

—— 安徽教育出版社 ——

责任编辑：王宏金

封面设计：应梦莹

中学物理中的数学方法

安徽教育出版社出版

（合肥潜山路1号）

安徽省新华书店发行 芜湖新华印刷厂印刷

开本：787×1092 1/32 印张：7.875 字数：165,000

1983年11月第1版 1983年11月第1次印刷

印数：1—16,000

统一书号：7276·93 定价：0.60元

前 言

培养学生运用数学知识解决物理问题的能力，是中学物理教学的一个重要方面。

物理概念以及物理量之间相互依赖关系的表达，要借助于数学式或图象等手段；物理理论本身的发展，定律的建立，推理论证过程也离不开数学；应用物理知识分析解决具体物理问题时，数学同样是有力的工具。总之，富有想象力的数学思想和严密的数学方法始终是研究物理问题必不可少的武器。

本书以现行中学物理教材内容为依据，对教材中涉及的各种数学知识进行考察，把数学和物理知识紧密结合起来。根据自己教学实践的经验与体会，对各类问题加以分析、归纳与总结，并提出自己的见解。旨在为中学物理教师和数学教师提供一本较为系统的综合性读物。我们相信，本书对培养运用数学知识解决物理问题的能力，提高教学质量是会有所帮助的。因此，本书也将是中学生的一本有益的课外参考书。

本书在编写过程中得到很多同志的热情鼓励和真诚帮助。孙邦久、许汉兴、戚盛强、桂起权等同志，都仔细地看过原稿，并提出了非常宝贵的修改意见，谨此表示谢意。

限于水平，错误与欠缺之处在所难免，恳请读者批评指教。

作 者

1983年1月

目 录

第一章 物理量与测量	(1)
§ 1 物理量与物理量的测量	(1)
§ 2 物理量的基本单位与单位制	(3)
§ 3 测量与有效数字	(8)
§ 4 有效数字的表示与运算	(10)
§ 5 真值与平均值	(14)
§ 6 系统误差的进一步分析	(16)
参考练习题 (一)	(21)
第二章 物理规律的数学表达	(24)
§ 1 物理规律的建立及其表达方式	(24)
§ 2 物理公式的分类	(30)
§ 3 数学形式与物理本质的关系	(38)
§ 4 在物理学中用数学进行推理与论证	(43)
§ 5 物理学中的正负号和正负数	(48)
参考练习题 (二)	(55)
第三章 物理规律的图象表示	(59)
§ 1 坐标系与图象	(59)
§ 2 图象的物理意义	(63)
§ 3 图象的应用	(73)
参考练习题 (三)	(78)
第四章 矢量及其运算方法	(81)

§ 1 矢量及其表示	(81)
§ 2 矢量和与矢量差	(83)
§ 3 矢量的分解	(90)
§ 4 正交分解法	(93)
参考练习题(四)	(101)
第五章 代数方法	(104)
§ 1 比例法	(105)
参考练习题(五)	(114)
§ 2 线性方程与线性方程组	(119)
§ 3 二次函数与二次方程组	(131)
§ 4 指数与对数在物理中的运用	(139)
§ 5 物理问题的定解	(147)
参考练习题(六)	(158)
第六章 三角函数方法	(162)
§ 1 三角函数基本知识的应用	(162)
§ 2 三角函数应用于周期变化的物理过程	(170)
§ 3 简谐振动的合成	(182)
参考练习题(七)	(188)
第七章 解析几何方法	(191)
§ 1 直角坐标与极坐标	(191)
§ 2 质点运动轨迹的方程	(198)
参考练习题(八)	(207)
第八章 物理学中的极值问题	(209)
§ 1 简单的物理极值问题	(209)
参考练习题(九)	(214)
§ 2 应用代数方法求解的极值问题	(217)

§ 3	应用三角函数性质求解的极值问题·····	(231)
§ 4	应用导数方法求解极值问题·····	(236)
参考练习题(十) ·····		(241)

第一章 物理量与测量

§1 物理量与物理量的测量

人们对物理世界的认识是从感性开始的。通过对物理世界的感觉、知觉，进而达到理性认识的高级阶段。在理性认识过程中，人们通过思维，进一步深入事物的本质，从而认识物理世界的内在规律性，并且把这种内在规律性在量的关系方面予以精确的表达。

不难想象，如果人们对自然界的认识，只是停留在笼统地知道行星绕日而行的“周而复始”性，而不进行时间与空间方面的精确测量，那就不可能发现反映行星运动规律的开普勒三定律和万有引力定律，今天的宇宙航行也就无从谈起。

可见，人们对物理世界的认识，不能停留在定性认识的水平，而必须上升到定量认识的高度。所谓定量认识，就是要认识物理概念的量的规定性，对物理过程进行量的抽象，对量进行测量，进而认识物理过程在量的方面的联系和相互依赖的关系，并且把这种确定的联系和依赖关系予以精确的表达。这就是科学规律的发现。

科学的、抽象思维的价值就在于科学规律的发现，其显著的特点就在于不仅能使我们认识没有（或不可能）直接观察过的事物，而且还能使我们正确预见事件的进程和展望行

为的结果。

所以，对物理过程中的物理量的认识，对物理量进行实际的测量就显得特别重要。在某种意义上说，它既是物理学研究的出发点，也是物理学工作的目的。

物理世界中的量，有所谓“离散量”与“连续量”的区别。

钠原子的核外电子有三层，第一层有两个电子，第二层是八个，最外层则只有一个电子，……这种可以一个一个地计数的量叫离散量。而时间、长度、质量、温度……则属于连续量（当然，我们把这些量称作连续量还是有条件的，这个条件也就是在通常所说的宏观范围之内）。

我们还把物理量分为矢量与标量。矢量不但有大小，而且有方向，且符合平行四边形运算法则。位移、速度、力、动量……都是矢量。时间、质量、温度……则属于标量，它们仅有大小而没有方向。

人们对量的认识是从比较开始的。有与无，多与少，长与短，大与小，重与轻，冷与热……都是比较的结果。比较必须是同类量的比较，否则就没有意义。我们可以比较闪电与燃烧这两个物理过程所经历的时间的长短，但我们决不会把闪电所经历的时间拿来和燃烧时的温度进行比较。

如何进行比较呢？开始时，人们是把任意两个事物或任意两个事件中的同类量拿来进行比较的。实践中，人们逐渐认识到这种比较方法有着很大的局限性。经验的不断积累，人们逐步把任意两个同类量的比较过渡到与某一个固定的量进行比较，并且把这个固定的量作为同类量的比较标准。这

就导致“单位量”（或单位）的形成。

例如，温度是表示冷热程度的物理量。这个概念的形成是从感性开始的，是比较的结果。烧开的水比缸里没有烧过的水要热，冬天从河里捞起的冰块比家中缸里的水要冷得多，……这种冷热的感觉是一种量的反映，是在比较中获得的。应该指出，这种比较有很大的局限性，因为我们仅仅能判断烧开的水比缸里的水热，缸里的水比冰块热，至于哪个“热得多一些”？“多多少”？我们就无法判断了。我们还知道单凭感觉器官来判别温度的高低并不一定可靠，这就要求建立统一的固定的比较标准。从而导致测温仪器的发明和测温标准的建立。

测量仪器的发明与测量标准（单位量）的建立，是认识的一次飞跃。

所谓测量，就是把待测的物理量拿来和相应的单位量进行比较的操作过程。而测量的结果，都得到一个抽象的数。这个抽象的数连同用作比较的单位，就是我们测得的物理量。

§2 物理量的基本单位与单位制

为了揭示自然界的物理规律，我们就得从量的方面来描述周围的物理世界，从而必须进行测量。前面说过，测量实际上是把被测的对象拿来和人们规定的单位量进行比较的操作过程。所以，关键还在于统一规定准确的、固定的单位量。

物理量很多，单位自然也就很多。研究发现，可以把某

些物理量的单位选作基本单位，而其他物理量的单位均可由基本单位导出。由基本单位表示的单位叫导出单位。基本单位与导出单位的总和，构成单位制。

基本单位的确定和单位制的形成，曾经经历了一个十分复杂的历史过程，因为它不仅与物理学本身的发展有关，而且还与测量技术的进步紧密联系在一起。

力学是物理学中研究得最早的一个门类。在力学研究中，人们建立起以长度、质量和时间为基本单位的单位制，这是我们都十分熟悉的。1875年，国际计量局在巴黎成立，并且规定了“米”和“千克”的国际原器。这是基本单位国际统一工作的开始。1948年召开了第九届国际计量大会，会上确定把电流作为第四个基本单位，并且把这种单位制叫做国际单位制（即SI制）。随着热学和光辐射学的发展，1954年第十届国际计量大会上，又把热力学温度和光强度定为基本单位。1971年第十四届国际计量大会一致决定把物质的量作为基本单位。这样便形成了目前的由七个基本单位构成的国际单位制。

国际单位制是国际上统一制定的一种通用的、适合一切计量领域的单位制。我国国务院于1977年5月颁布了《中华人民共和国计量管理条例（试行）》，规定“我国的基本计量制度是米制（即“公制”），逐步采用国际单位制”。教育部根据这个精神，发出了“关于教材采用国际单位制的通知”。

表1列出了国际单位制七个基本单位的名称和代号，表2是它的两个辅助单位。

国际单位制基本单位 表1

量的名称	单位名称	代 号	
		中 文	国 际
长 度	米	米	m
质 量	千克(公斤)	千克(公斤)	kg
时 间	秒	秒	s
电 流	安 培	安	A
热力学温度*	开 尔 文	开	K
物 质 的 量	摩 尔	摩	mol
光 强 度	坎 德 拉	坎	cd

* 除用开尔文表示的热力学温度(T)外, 还可以使用按下式定义的摄氏温度 $t = T - 273.15\text{k}$ 。单位“摄氏度”与单位“开尔文”相等, 而“摄氏度”是用来表示摄氏温度时代替“开尔文”的专门名称。

国际单位制辅助单位 表2

量的名称	单位名称	代 号	
		中 文	国 际
平 面 角	弧 度	弧 度	rad
立 体 角	球 面 度	球面度	sr

七个基本单位和两个辅助单位, 可以用来得到几乎所有的物理量的导出单位。在导出单位中, 有些比较常用的导出单位名称较长, 为方便起见, 就给它一个专用名称。例如, 力的单位是“千克米每秒平方”, 其专门名称是“牛顿”。这种具有专门名称的导出单位共有18个(见表3)。

具有专门名称的导出单位 表3

量的名称	单位专用名称	代 号	
		中 文	国 际
频 率	赫 兹	赫	Hz
力	牛 顿	牛	N
压 强	帕 斯 卡	帕	Pa
功、能量、热量	焦 耳	焦	J
功 率	瓦 特	瓦	W
电 量	库 仑	库	C
电势、电压、电动势	伏 特	伏	V
电 容	法 拉	法	F
电 阻	欧 姆	欧	Ω
电 导	西 门 子	西	S
磁 通	韦 伯	韦	Wb
磁感应强度	特 斯 拉	特	T
电 感	亨 利	亨	H
光 通 量	流 明	流	lm
光 照 度	勒 克 斯	勒	lx
(放射性)活度	贝 可 勒 尔	贝可	Bq
吸 收 剂 量	戈 瑞	戈	Gy
剂 量 当 量	希 沃 特	希	SV

这些有专门名称的导出单位，也可以用来导出其他的导出单位。如，电场强度的单位就是：牛/库 或 伏/米。

由于实际测量的量值范围很宽，每个物理量只用一个国

国际制单位, 往往显得不够或不方便, 因此国际制单位还采用16个各表示一定因数的词冠 (见表4)。把这些词冠加在国际制单位的前面, 国际制单位便可以十分方便地增大或缩小一定的倍数。例如, $1 \text{ 微米} (\mu\text{m}) = 10^{-6} \text{ 米} (\text{m})$, $1 \text{ 皮法} (\text{pF}) = 10^{-12} \text{ 法} (\text{F}) \dots\dots$

国际制单位的词冠 表4

因 数	词 冠	代 号	
		中 文	国 际
10^{18}	艾可萨 (exa)	艾	E
10^{15}	拍它 (peta)	拍	P
10^{12}	太拉 (tera)	太	T
10^9	吉咖 (giga)	吉	G
10^6	兆 (mega)	兆	M
10^3	千 (kilo)	千	K
10^2	百 (hecto)	百	h
10^1	十 (déca)	十	da
10^{-1}	分 (déci)	分	d
10^{-2}	厘 (centi)	厘	c
10^{-3}	毫 (milli)	毫	m
10^{-6}	微 (micro)	微	μ
10^{-9}	纳诺 (nano)	纳	n
10^{-12}	皮可 (pico)	皮	p
10^{-15}	飞母托 (femto)	飞	f
10^{-18}	阿托 (atto)	阿	a

§3 测量与有效数字

在物理学中遇到的数字可以分为两类，一类是准确数字，另一类是近似数字。

$$1 \text{ 分} = 60 \text{ 秒}, \quad 1 \text{ 米} = 100 \text{ 厘米}, \quad s = \frac{1}{2} at^2, \quad E_K = \frac{1}{2} mv^2,$$
$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}, \quad \dots\dots \text{这里的} 60, 100, \frac{1}{2}, 2 \text{ 都是准确数字.}$$

物理学中遇到的绝大多数数字都是近似数字。如电子的质量 $m_e = 9.11 \times 10^{-31}$ 千克，普朗克常数 $h = 6.63 \times 10^{-34}$ 焦耳·秒，标准大气压 $p_0 = 1.013 \times 10^5$ 帕斯卡，地球的质量 $M = 5.983 \times 10^{24}$ 千克……，这些数字都是通过实验测量而获得的。我们知道，实验测量中误差总是不可避免的。

从误差的来源看，误差分为系统误差与偶然误差。

测量仪器不精确，实验原理和实验方法的不完善都会造成系统误差。例如游标卡尺的零误差就是系统误差，它是仪器本身不精确造成的。在用电流表和电压表测定电池的电动势和内阻时，如不考虑电表内阻，也会引起系统误差，这是由于实验原理的不完善造成的（关于实验原理的不完善造成的系统误差，在本章的第六节，我们将作较为详细的分析）。系统误差的特点是多次重复同一测量时，所得的结果要么总是大于真值，要么总是小于真值。

偶然误差是由种种偶然因素造成的。

测量中读取数值时，需要对最末一位数字进行估计，这时我们就有可能得到种种不同的结果。例如用电流表测量电

流时，指针停在某个位置上（如图 1—1），由于指针与表面（刻度线）之间有一段距离，假使读数时我们注意让视线与表面垂直，读取的数字是 0.384 安培。

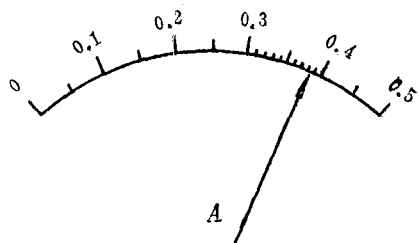


图 1—1

可是如果这个电流表在

你的右前方或者左前方，你读数时又没有注意让视线与表面垂直，那么你读取的数字就可能大于或小于 0.384 安培。

又譬如我们用游标卡尺测量一个钢球的直径，由于我们可能在不同的方位进行测量，所得的结果就会不相同。这种差异也是偶然因素造成的。

偶然误差的特点是多次测量的结果相对于真值来讲，有时偏大，有时偏小，而且偏大与偏小的机会是相同的。

在不考虑系统误差的情况下，测量的结果，只是真值的近似值。测量中读取的数值，其最末一位数字总是不可靠的，但它还是有意义的，因为它代表了一定的精确度，所以我们还要把它写出来。这种带有一位不可靠数字的近似数字，叫有效数字。例如前面提到的 0.384 安培，在这个数值中，最末一位数字“4”就不可靠。但是，它有意义。从这个数字，我们可以看出表面的最小刻度是 0.01 安培，而我们的读数是对最小刻度的十分之一进行估计的。

§ 4 有效数字的表示与运算

实际测量中读取数字时，只要求对最小刻度的十分之一进行估计，这个估计出来的数字自然是不可靠的，至于这位数字以后的数字，我们就无法读出了，否则也只是主观臆断，不负责任的乱猜。可见，企图通过估计测量仪器最小分度以下几位数的办法来提高数据的准确度是毫无意义的，这也是我们把只带有一位不可靠数字的近似数字叫做有效数字的道理。

有效数字中，从第一个不是零的数字算起，到最末一位不可靠的数字为止的所有数字，都叫有效数字。有效数字的个数，叫有效位数。例如33.9毫米，3.39厘米，0.0339米，它们都是三位有效数字。可见，有效数字的位数与小数点的位置无关。实际上，就是与单位选择无关。

有效数字的最末一位的零与测量的精确度有关，是不能任意取舍的。例如，图1—2中游标卡尺的读数应记为30.0毫米，它是三位有效数字。如果记作3厘米或30毫米，那就错了。

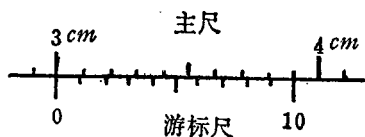


图 1—2

通常规定，有效数字均应写成 $M \times 10^n$ 的形式。这里 M 是小数点左边只有一个非零的数字，它的位数与有效位数相同。 n 是正的或负的整数。例如33.9毫米这个有效数字，按规定则应写成3.39厘米，或 3.39×10 毫米，或 3.39×10^{-2} 米，或 3.39×10^{-5} 千米。而不应写成0.0339米或0.0000339千米。