# 打开你的数学思路

（修订本）

刘云章 主编

江苏科学技术出版社

# 打开你的数学思路

（第二版）

刘云章　主编

江 苏 科 学 技 术 出 版 社

# 打开你的数学思路

## (第二版)

刘云章　主编


出版、发行:江 苏 科 学 技 术 出 版 社
经　　销:江 苏 省 新 华 书 店
照　　排:南京理工大学激光照排公司
印　　刷:涟 水 县 印 刷 厂

开本 787×1092 毫米　1/32　印张 13　字数 283,000
1990 年 2 月第 1 版　　1998 年 4 月第 2 版第 6 次印刷
印数 41,301—48,300 册

ISBN　7—5345—1867—9

O·107　　　　定价:10.80 元

责任编辑　高楚明

# 出版说明

数学、物理、化学是中等教育中重要的基础课程.

我们组织编写的这套《打开你的数学思路》、《打开你的物理思路》和《打开你的化学思路》,其目的在于引导中学生去追踪数学、物理、化学发展的足迹,激发他们对数理化的学习兴趣和主动的求知欲望,开阔他们的知识视野,提高他们的数理化的素养,培养他们探索真知的能力和顽强的毅力,帮助他们更好地学好数理化.

这套书均以现行中学教材为依据,选择基本概念,基本理论,基本定律、定理、公式等作为条目,对其酝酿、产生和发展进行追溯性阐述,史料翔实,简明扼要,通俗易懂.

这套书自出版以来,重印多次,受到了广大读者的欢迎.

这次再版,除保持第1版的基本内容,重写和增设部分条目外,新增加了"方法篇",对中学数学、物理和化学的解题方法进行阐述,并通过对典型例题的分析、说明,帮助读者对解题方法的理解,从而提高解题能力.

我们希望这套书对中学广大师生的教与学能有所帮助.

江苏科学技术出版社

1994年5月

# 前　言

中学数学里大量的概念、定理及公式是从哪里来的?数学解题的灵感是怎样产生的?向往着发明、创造的中学生总是喜欢追根溯源,而优秀的数学教师应该讲清它们的来龙去脉,阐明其中的奥秘.当代杰出的美国数学家、教育家G.波里亚曾说过,学习数学只有当"看到数学的产生、按照数学发展的历史顺序或亲自从事数学发现时,才能最好地理解数学."所以他希望学生学习数学时看到的是数学建造过程中的施工架,而不是只看到简化了的现成品.我们撰写本书的目的,就是紧扣中学数学教学大纲,追根溯源,介绍有关的数学发展史以及数学解题的思想方法,试图激发学生学习兴趣,提高数学素养,培养他们探索问题的能力,并为中学数学教师搞好教学、科研提供适宜的资料.

本书分为上、下两篇,上篇为"中学数学溯源",对中学数学的概念、定理及公式的产生和发展进行历史追溯;下篇为"中学数学解题方法",介绍解决数学问题特别是综合题的思想方法.这样做是为了适应各方面选拔人才的需要.

潘慰高撰写了本书上篇几何部分,童郇撰写了下篇一~八部分,其余均由刘云章撰写.全书由刘云章统稿.

考证历史不容易,提供数学解题的"灵丹妙方"就更困难.本书难免有不妥之处,恳请读者批评指正.

主编

1994年5月

# 目　　录

## 上篇　　中学数学溯源

### 代　　数

# 几　何

## 三　角



## 解析几何

## 微 积 分



## 计 算 机



# 下篇 中学数学解题方法

# 汉语拼音索引

# 上篇　中学数学溯源

“历史使人明智”.

莱布尼茨曾说过:“没有什么比看到发明的源泉更重要了,就我看来,它比发明本身更有趣.”在本篇中,我们针对中学数学教育的需要,把最富有价值的历史材料挖掘、整理出来,奉献给读者,试图让读者看到中学数学概念、思想、方法的“源头”.

## 代　　数

**负数**　如果两种量具有相反意义,则其中一种规定为正的,另一种规定为负的.带有正号的数叫做正数,带有负号的数叫做负数.

负数的应用以我国为最早,约在西汉(公元前2世纪),就已经使用赤筹表示正数,用黑筹表示负数(或者用三角截面的算筹表示正数,用矩形的算筹表示负数).后来又改为用正放的算筹表示正数,用斜置的算筹表示负数.《九章算术》中,已经用正负数表示相反意义的量.如以卖物的钱数(收入)为正,以买物的钱数(支出)为负;余数钱为正,不足钱为负;进入的

粮谷（“益实”）为正，运出的粮谷（“损实”）为负，等等．进而，给出了正负数的概念的一般定义：“两算得失相反，要令正负以名之．”这是数学史上关于正负数的第一个广泛而概括的定义．

《九章算术》的方程一章中，在考查减法运算且当减数大于被减数时，采用负数来扩充减法的应用，并给出了世界上最早的正负数加减法法则，名为“正负术”．

到元朝朱世杰著《算学启蒙》（1299 年），又给出了正负数的乘除法法则．

负数也早为古希腊人所知．在印度，最早提到负数是公元 7 世纪的事，他们用上方加“·”的数码表示负数．

在 15 世纪和 16 世纪，大多数欧洲数学家还不承认负数是数，或者即使承认了，也并不同意它作为方程的根．意大利数学家卡丹把方程的负根称为“虚有的”，法国数学家韦达在解方程时把负根舍弃，另一位法国数学家帕斯卡则认为从 0 减去 4 纯粹是胡说．还有一位法国数学家安东尼·阿纳卡德提出一种有趣的说法来反对承认负数，他说他怀疑 $(-1):1=1:(-1)$，因为 $-1$ 小于 $+1$，那么较小的数与较大的数的比，怎么能等于较大的数与较小的数的比呢？这个问题引起了许多人的争论．

第一个承认方程的负数根的是印度数学家拜斯迦罗（12 世纪）．他首先提出，一元二次方程 $x^2-45x=250$ 的根是由 $x=50$、$x=-5$ 给出的．不过拜斯迦罗对于负根的有效性也表示怀疑．直到 17 世纪，法国数学家笛卡儿引进坐标系后，负数获得了几何解释，才逐渐被人们公认，负数在方程中也取得了合理的地位．

**无理数**　无限不循环小数叫做无理数．

在毕达哥拉斯（古希腊数学家）时代，人们对有理数的认识还不是很清楚的，对于无理数的概念更是一无所知.毕达哥拉斯学派所说的数，原来是指整数，他们不把分数看成一种数，而仅看作两个整数之比.他们错误地认为，宇宙间的一切现象都能归结为整数或整数之比.但是该学派的成员希伯索斯（古希腊人）根据勾股定理通过逻辑推理发现，边长为1的正方形的对角线长度既不是整数，也不是整数的比所能表示.这个发现被人们看成是“荒谬”和违反常识的事.它不仅严重触犯了毕氏学派的信条，同时也冲击了当时希腊人的传统见解，使古希腊的数学家们感到惊奇不安.因为，对于只有整数和分数概念的他们来说，这意味着边长为1的正方形的对角线长度竟然不能用任何“数”表示出来！所以这一事件在数学史上称为第一次数学危机.

希伯索斯的发现没有被毕达哥拉斯学派的信徒所接受，相传毕氏学派就因这一发现而把希伯索斯投入海中处死.

后人用反证法证明了这一发现是正确的，证明如下：

设边长为1的正方形的对角线长度可表示为$\frac{m}{n}$，其中$m$，$n$为既约的正整数.

则根据勾股定理可得

$$\left(\frac{m}{n}\right)^2=2,\quad 即\ m^2=2n^2,$$

这表示$m^2$是一个偶数，因而$m$也是偶数（否则，若$m$为奇数，设$m=2k+1$，则$m^2=4k^2+4k+1$也是奇数，矛盾）.

设$m=2p$（$p$是整数），则$(2p)^2=m^2=2n^2$，即$n^2=2p^2$是偶数，因而$n$也是偶数.

那么$m$，$n$都有公约数2，这与假设矛盾.

无理数后来被确认下来，是同开方运算有关的.对于非完

全平方数，人们发现它们的平方根既不是有限小数也不是无限循环小数，而是一种无限不循环小数，并称这种新型的数为无理数. 这一名称表现了人们对这种新数的困惑不解，但却不得不承认它是客观存在的. 相比之下，整数和分数便被合称为有理数了. 后来，把一切不是用开方法确定的其他无限不循环小数，如 $\pi$，$e$，……等，也一律称为无理数.

**第一次数学危机**　见**无理数**.

**有理数**　见**无理数**.

**虚数**　记号 $i$ 表示 $-1$ 的一个平方根，叫做虚数单位，并规定：

1. 它的平方等于 $-1$，即 $i^2=-1$；

2. 实数可以与它进行四则运算，进行四则运算时，原有的加、乘等运算律仍然成立.

形如 $a+bi(a,b\in R)$ 的数，叫做复数，当 $b=0$ 时，就是实数；当 $b\neq 0$ 时，叫做虚数，当 $a=0,b\neq 0$ 时，叫做纯虚数.

虚数最初是在解二次方程的过程中出现的. 1484 年，法国人舒开在《算术三篇》中，解二次方程

$$4+x^2=3x,$$

得根　$x=\frac{3}{2}\pm\sqrt{2\frac{1}{4}-4}$，他声明这根是不可能的.

1545 年，意大利数学家卡丹第一个认真地讨论虚数，并给出运算的方法. 在《大术》中，他解这样的问题：两数的和是 10，积是 40，求这两数.

用现代的符号，可列成方程

$$x(10-x)=40,\ x^2-10x+40=0,$$

得到两个根　$5+\sqrt{-15}$，$5-\sqrt{-15}$.

卡丹觉得奇怪，负数怎样开平方？他称负数的平方根为

“诡辩量”，并怀疑这种数的运算合法性. 他说：“不管我的良心受到多大的责备，但是，的的确确 $5+\sqrt{-15}$乘 $5-\sqrt{-15}$刚好等于 40！”

过了将近一百年，解析几何的创始人笛卡儿在《几何学》中第一次给这种“诡辩量”取了一个名字叫“虚数”（和“实数”相对）. 他认为这种根不是实在的，而是虚的.

英国大科学家牛顿也并不认为虚数根是有意义的，这很可能是由于它们缺乏物理意义.

德国数学家莱布尼茨虽在形式运算中使用虚数，但并不理解虚数的性质. 他说：“圣灵在分析的奇观中找到了超凡的显示，这就是那个理想的端兆，那个介于存在与不存在之间的两栖怪物，那个我们称为虚的 $-1$ 的平方根.”把虚数看作“两栖怪物”，添上神秘色彩.

直到 18 世纪，瑞士大数学家欧拉还是说这种数只存在于“幻想之中”. 1777 年，他在递交给彼得堡科学院的论文《微分公式》中首次使用 $i$ 表示 $\sqrt{-1}$，但很少有人注意它，直到 1801 年，德国大数学家高斯系统地使用这个符号，以后渐渐通行于全世界.

虚数的出现，为无理数解脱了困境. 因为尽管无理数与有理数相比，似乎不那么“理直气壮”，但在虚数面前，它毕竟同有理数一样，是实实在在的数了，因此人们把无理数同有理数合称为实数，以示和虚数的区别. 实数同虚数合称为复数，复数这个名词是高斯给出的. 高斯一边感到这种数有点虚无缥缈，但一边又觉得它颇有用处. 因为，如果不承认这种数，代数方程有的无解，有的有一解，有的有两解，……五花八门，毫无规律；如果承认了它，代数方程都有解，而且 $n$ 次方程不多不少恰好有 $n$ 个解.

**实数** 见虚数.

**复数** 见虚数.

**向量** 既有绝对值大小又有方向的量叫做向量.

向量概念源出于一些物理量.有些量可以用一个数值确定,例如质量、温度、密度、面积和体积等等.这一类量叫数量.还有一些量,只知道它们的数值大小是不够的,要完全表示它们,必须同时说明它们的方向,例如力、速度、加速度等等就是属于这一类.1788 年法国数学家拉格朗日的《分析力学》发表.在这书中,他把这些物理量数学化,即用数学的方法来表示这些量.例如,他用具有确定长度和方向的有向线段来表示一个力 $f$,并沿坐标轴把 $f$ 分解为三个分力 $f_x$、$f_y$、$f_z$.这些分力作为坐标轴上的有向线段,可以简单地用数来表示.这样,在力学中关于力、速度及加速度的所有方程,可以转变为联系它们的分量的、关于 $x$、$y$、$z$ 的三个方程.拉格朗日没有用"向量"这一名词.

拉格朗日之后,随着电学的发展,在数学和物理学中更广泛地研究了这种有向线段的一般理论.到了 19 世纪,德国数学家格拉斯曼引入有向线段的记号,并称之为向量.

向量理论由于在力学、物理和技术中的重要性,而构成了解析几何学中的一个重要组成部分——向量代数.这一名称是为了区别于用分析方法研究向量的理论——向量分析,后者是由美国数学家吉布斯于 1881—1884 年建立的.

**复平面** 用以表示复数的直角坐标平面叫做复平面.

17 世纪时,英国数学家瓦里士已经意识到在直线上不能找到虚数的几何表示.1797 年,挪威的测量学家维塞尔向丹麦科学院递交论文《方向的解析表示,特别应用于平面与球面多边形的测定》,首先提出把复数 $a+bi$ 用坐标平面上的点