

江苏科学技术出版社

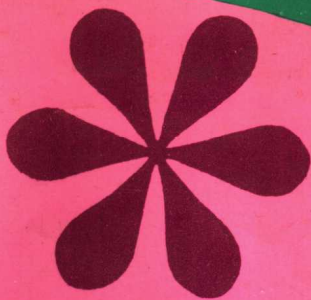
打开 你的

刘云章

主编

(修订本)

数学思路



打开你的数学思路

(第二版)

刘云章 主编

江苏科学技术出版社

打开你的数学思路
(第二版)

刘云章 主编

出版、发行:江苏科学技术出版社
经 销:江苏省新华书店
照 排:南京理工大学激光照排公司
印 刷:涟 水 县 印 刷 厂

开本 787×1092 毫米 1/32 印张 13 字数 283,000
1990 年 2 月第 1 版 1998 年 4 月第 2 版第 6 次印刷
印数 41,301—48,300 册

ISBN 7-5345-1867-9

O · 107

定价:10.80 元

责任编辑 高楚明

我社图书如有印装质量问题,可随时向承印厂调换

出版说明

数学、物理、化学是中等教育中重要的基础课程。

我们组织编写的这套《打开你的数学思路》、《打开你的物理思路》和《打开你的化学思路》，其目的在于引导中学生去追踪数学、物理、化学发展的足迹，激发他们对数理化的学习兴趣和主动的求知欲望，开阔他们的知识视野，提高他们的数理化的素养，培养他们探索真知的能力和顽强的毅力，帮助他们更好地学好数理化。

这套书均以现行中学教材为依据，选择基本概念，基本理论，基本定律、定理、公式等作为条目，对其酝酿、产生和发展进行追溯性阐述，史料翔实，简明扼要，通俗易懂。

这套书自出版以来，重印多次，受到了广大读者的欢迎。

这次再版，除保持第1版的基本内容，重写和增设部分条目外，新增加了“方法篇”，对中学数学、物理和化学的解题方法进行阐述，并通过对典型例题的分析、说明，帮助读者对解题方法的理解，从而提高解题能力。

我们希望这套书对中学广大师生的教与学能有所帮助。

江苏科学技术出版社

1994年5月

前 言

中学数学里大量的概念、定理及公式是从哪里来的?数学解题的灵感是怎样产生的?向往着发明、创造的中学生总是喜欢追根溯源,而优秀的数学教师应该讲清它们的来龙去脉,阐明其中的奥秘.当代杰出的美国数学家、教育家 G. 波里亚曾说过,学习数学只有当“看到数学的产生、按照数学发展的历史顺序或亲自从事数学发现时,才能最好地理解数学.”所以他希望学生学习数学时看到的是数学建造过程中的施工架,而不是只看到简化了的现成品.我们撰写本书的目的,就是紧扣中学数学教学大纲,追根溯源,介绍有关的数学发展史以及数学解题的思想方法,试图激发学生学习兴趣,提高数学素养,培养他们探索问题的能力,并为中学数学教师搞好教学、科研提供适宜的资料.

本书分为上、下两篇,上篇为“中学数学溯源”,对中学数学的概念、定理及公式的产生和发展进行历史追溯;下篇为“中学数学解题方法”,介绍解决数学问题特别是综合题的思想方法.这样做是为了适应各方面选拔人才的需要.

潘慰高撰写了本书上篇几何部分,童邨撰写了下篇一~八部分,其余均由刘云章撰写.全书由刘云章统稿.

考证历史不容易,提供数学解题的“灵丹妙方”就更困难.本书难免有不妥之处,恳请读者批评指正.

主编

1994 年 5 月

目 录

上篇 中学数学溯源

代 数

负数	1	刘维尔数	11
无理数	2	质数与合数	11
第一次数学危机	4	素数	13
有理数	4	麦森数	13
虚数	4	质数表	13
实数	6	爱拉托色尼筛法	13
复数	6	费马数	13
向量	6	质数公式	14
复平面	6	哥德巴赫猜想	15
复数的模	7	勾股数组	16
高斯平面	7	费马大定理	17
欧拉公式	7	费马小定理	19
四元数	9	《周易》	19
代数数与超越数	10	算筹	20

位值制	21	“大衍求一术”	46
二进制记数法	22	“百鸡”问题	46
零号(○)	23	丢番都方程	47
“算经十书”	24	平均值不等式	48
《九章算术》	24	行列式	50
代数	25	克莱姆法则	51
方程	26	矩阵	51
方程的根	27	对数	53
方程符号	27	纳皮尔对数	55
“天元术”	28	第一张对数表	55
“四元术”	29	数 e	55
“良马追及”问题	29	自然对数	56
“测井”问题	30	自然对数表	56
“盈不足术”	30	常用对数	57
“容器”问题	31	幂	58
开方	31	指数	59
根号	32	等差数列	61
配方法	33	高阶等差数列	62
二次方程求根公式	34	等比数列	63
代数基本定理	35	斐波那契数列	64
韦达定理	37	二项式定理	65
“直田长阔”问题	38	杨辉三角形	66
三次方程求根公式	38	牛顿二项式定理	66
卡丹公式	40	数学归纳法	66
四次方程求根公式	40	排列、组合	67
五次方程的代数解问题	41	概率论	68
不定方程	43	概率悖论	69
《孙子算经》	44	贝特朗奇悖论	71
中国剩余定理	45	布尔代数	71
孙子剩余定理	46	逻辑代数	73

几 何

《墨经》·····	74	正七边形问题·····	105
《几何原本》·····	75	正十七边形问题·····	106
欧氏几何·····	77	海伦-秦九韶公式·····	107
第五公设·····	77	三斜求积术·····	109
平行公设·····	78	海伦三角形·····	109
非欧几何·····	79	托勒玫定理·····	110
公理法·····	81	梅涅劳斯定理·····	112
几何·····	82	塞瓦定理·····	113
勾股定理·····	84	九点圆·····	116
毕达哥拉斯定理·····	86	欧拉圆·····	117
月形定理·····	86	欧拉线·····	117
黄金分割·····	87	西摩松线·····	118
黄金数·····	89	蝴蝶定理·····	119
中外比·····	89	中线定理·····	120
圆周率·····	89	巴布斯定理·····	122
徽率·····	91	阿波罗尼斯问题·····	122
割圆术·····	93	阿波罗尼斯定理·····	124
祖率·····	93	牟合方盖·····	124
π 值的计算方法·····	94	祖暅原理·····	125
规矩·····	96	欧拉定理·····	126
尺规作图·····	97	四色问题·····	127
立方倍积·····	99	七桥问题·····	129
三等分一角·····	100	一笔画·····	130
化圆为方·····	102	拓扑变换·····	132
尺规割圆·····	103	橡皮变形·····	133

拓扑学	133	伽利略问题	133
-----------	-----	-------------	-----

三 角

三角学	136	正弦表	145
《周髀算经》	138	正弦	146
勾股测量术	139	正切表、余切表	146
重差术	140	正切、余切	146
《海岛算经》	141	弧度制	147
1 度的角	142	三角函数	147
第一个三角函数表	143	三角函数符号	148
“分”、“秒”	145		

解析几何

解析几何学	150	象限、卦限	157
《平面和立体的轨迹引论》		极坐标	157
.....	151	圆锥曲线	158
变量	152	抛物线	159
函数	154	椭圆	159
坐标	156	双曲线	159
直角坐标系	157	二次曲线	159
横坐标	157	圆锥曲线的直径	161
纵坐标	157		

微 积 分

《庄子》	162	微积分基本公式	177
追龟说	163	牛顿-莱布尼茨公式	178
数列极限	163	不定积分	179
微积分	165	原函数	180
切线	167	第二次数学危机	180
导数	169	无穷小悖论	181
微分	170	无限集	181
微分法	172	第三次数学危机	183
拉格朗日中值定理	172	集合论悖论	183
穷竭法	174	弧长计算问题	184
定积分	175	贝努利-莱布尼茨诡论	185

计 算 机

机械计算机	188	电子计算机	190
图灵机	188	计算机科学	192

下篇 中学数学解题方法

一、观察入门	193	四、辨认回忆	213
二、抓住特征	200	五、化简曝光	223
三、联想发现	205	六、分解组合	228

七、分类讨论	235	十八、引入参数	321
八、回到定义	247	十九、变量代换	331
九、顺藤摸瓜	254	二十、辅助元素	336
十、执果索因	264	二十一、形数结合	343
十一、上下求索	269	二十二、建立坐标	351
十二、反面入手	277	二十三、构造复数	359
十三、以退求进	283	二十四、以巧为贵	366
十四、类比引路	286	二十五、直觉了望	373
十五、归纳猜想	295	二十六、跟着感觉	382
十六、对称原理	304	二十七、诱发灵感	391
十七、待定系数	310		

汉语拼音索引

上篇 中学数学溯源

“历史使人明智”。

莱布尼茨曾说过：“没有什么比看到发明的源泉更重要了，就我看来，它比发明本身更有趣。”在本篇中，我们针对中学数学教育的需要，把最富有价值的历史材料挖掘、整理出来，奉献给读者，试图让读者看到中学数学概念、思想、方法的“源头”。

代 数

负数 如果两种量具有相反意义，则其中一种规定为正的，另一种规定为负的。带有正号的数叫做正数，带有负号的数叫做负数。

负数的应用以我国为最早，约在西汉（公元前 2 世纪），就已经使用赤筹表示正数，用黑筹表示负数（或者用三角截面的算筹表示正数，用矩形的算筹表示负数）。后来又改为用正放的算筹表示正数，用斜置的算筹表示负数。《九章算术》中，已经用正负数表示相反意义的量。如以卖物的钱数（收入）为正，以买物的钱数（支出）为负；余数钱为正，不足钱为负；进入的

粮谷(“益实”)为正,运出的粮谷(“损实”)为负,等等.进而,给出了正负数的概念的一般定义:“两算得失相反,要令正负以名之.”这是数学史上关于正负数的第一个广泛而概括的定义.

《九章算术》的方程一章中,在考查减法运算且当减数大于被减数时,采用负数来扩充减法的应用,并给出了世界上最早的正负数加减法法则,名为“正负术”.

到元朝朱世杰著《算学启蒙》(1299年),又给出了正负数的乘除法法则.

负数也早为古希腊人所知.在印度,最早提到负数是公元7世纪的事,他们用上方加“·”的数码表示负数.

在15世纪和16世纪,大多数欧洲数学家还不承认负数是数,或者即使承认了,也并不同意它作为方程的根.意大利数学家卡丹把方程的负根称为“虚有的”,法国数学家韦达在解方程时把负根舍弃,另一位法国数学家帕斯卡则认为从0减去4纯粹是胡说.还有一位法国数学家安东尼·阿纳卡德提出一种有趣的说法来反对承认负数,他说他怀疑 $(-1):1=1:(-1)$,因为 -1 小于 $+1$,那么较小的数与较大的数的比,怎么能等于较大的数与较小的数的比呢?这个问题引起了许多人的争论.

第一个承认方程的负数根的是印度数学家拜斯迦罗(12世纪).他首先提出,一元二次方程 $x^2-45x=250$ 的根是由 $x=50$ 、 $x=-5$ 给出的.不过拜斯迦罗对于负根的有效性也表示怀疑.直到17世纪,法国数学家笛卡儿引进坐标系后,负数获得了几何解释,才逐渐被人们公认,负数在方程中也取得了合理的地位.

无理数 无限不循环小数叫做无理数.

在毕达哥拉斯(古希腊数学家)时代,人们对有理数的认识还不是很清楚的,对于无理数的概念更是一无所知.毕达哥拉斯学派所说的数,原来是指整数,他们不把分数看成一种数,而仅看作两个整数之比.他们错误地认为,宇宙间的一切现象都能归结为整数或整数之比.但是该学派的成员希伯索斯(古希腊人)根据勾股定理通过逻辑推理发现,边长为1的正方形的对角线长度既不是整数,也不是整数的比所能表示.这个发现被人们看成是“荒谬”和违反常识的事.它不仅严重触犯了毕氏学派的信条,同时也冲击了当时希腊人的传统见解,使古希腊的数学家们感到惊奇不安.因为,对于只有整数和分数概念的他们来说,这意味着边长为1的正方形的对角线长度竟然不能用任何“数”表示出来!所以这一事件在数学史上称为第一次数学危机.

希伯索斯的发现没有被毕达哥拉斯学派的信徒所接受,相传毕氏学派就因这一发现而把希伯索斯投入海中处死.

后人用反证法证明了这一发现是正确的,证明如下:

设边长为1的正方形的对角线长度可表示为 $\frac{m}{n}$,其中 m, n 为既约的正整数.

则根据勾股定理可得

$$\left(\frac{m}{n}\right)^2 = 2, \quad \text{即 } m^2 = 2n^2,$$

这表示 m^2 是一个偶数,因而 m 也是偶数(否则,若 m 为奇数,设 $m=2k+1$,则 $m^2=4k^2+4k+1$ 也是奇数,矛盾).

设 $m=2p$ (p 是整数),则 $(2p)^2=m^2=2n^2$,即 $n^2=2p^2$ 是偶数,因而 n 也是偶数.

那么 m, n 都有公约数2,这与假设矛盾.

无理数后来被确认下来,是同开方运算有关的.对于非完

全平方数,人们发现它们的平方根既不是有限小数也不是无限循环小数,而是一种无限不循环小数,并称这种新型的数为无理数.这一名称表现了人们对这种新数的困惑不解,但却不得不承认它是客观存在的.相比之下,整数和分数便被合称为有理数了.后来,把一切不是用开方法确定的其他无限不循环小数,如 $\pi, e, \dots$ 等,也一律称为无理数.

第一次数学危机 见无理数.

有理数 见无理数.

虚数 记号 i 表示 -1 的一个平方根,叫做虚数单位,并规定:

1. 它的平方等于 -1 ,即 $i^2 = -1$;
2. 实数可以与它进行四则运算,进行四则运算时,原有的加、乘等运算律仍然成立.

形如 $a+bi$ ($a, b \in R$)的数,叫做复数,当 $b=0$ 时,就是实数;当 $b \neq 0$ 时,叫做虚数,当 $a=0, b \neq 0$ 时,叫做纯虚数.

虚数最初是在解二次方程的过程中出现的. 1484年,法国人舒开在《算术三篇》中,解二次方程

$$4+x^2=3x,$$

得根 $x = \frac{3}{2} \pm \sqrt{2\frac{1}{4}-4}$, 他声明这根是不可能的.

1545年,意大利数学家卡丹第一个认真地讨论虚数,并给出运算的方法. 在《大术》中,他解这样的问题:两数的和是10,积是40,求这两数.

用现代的符号,可列成方程

$$x(10-x)=40, \quad x^2-10x+40=0,$$

得到两个根 $5 + \sqrt{-15}, 5 - \sqrt{-15}$.

卡丹觉得奇怪,负数怎样开平方? 他称负数的平方根为

“诡辩量”，并怀疑这种数的运算合法性。他说：“不管我的良心受到多大的责备，但是，的确确 $5 + \sqrt{-15}$ 乘 $5 - \sqrt{-15}$ 刚好等于 40！”

过了将近一百年，解析几何的创始人笛卡儿在《几何学》中第一次给这种“诡辩量”取了一个名字叫“虚数”（和“实数”相对）。他认为这种根不是实在的，而是虚的。

英国大科学家牛顿也并不认为虚数根是有意义的，这很可能是由于它们缺乏物理意义。

德国数学家莱布尼茨虽在形式运算中使用虚数，但并不理解虚数的性质。他说：“圣灵在分析的奇观中找到了超凡的显示，这就是那个理想的端兆，那个介于存在与不存在之间的两栖怪物，那个我们称为虚的 -1 的平方根。”把虚数看作“两栖怪物”，添上神秘色彩。

直到 18 世纪，瑞士大数学家欧拉还是说这种数只存在于“幻想之中”。1777 年，他在递交给彼得堡科学院的论文《微分公式》中首次使用 i 表示 $\sqrt{-1}$ ，但很少有人注意它，直到 1801 年，德国大数学家高斯系统地使用这个符号，以后渐渐通行于全世界。

虚数的出现，为无理数解脱了困境。因为尽管无理数与有理数相比，似乎不那么“理直气壮”，但在虚数面前，它毕竟同有理数一样，是实实在在的数了，因此人们把无理数同有理数合称为实数，以示和虚数的区别。实数同虚数合称为复数，复数这个名词是高斯给出的。高斯一边感到这种数有点虚无缥缈，但一边又觉得它颇有用处。因为，如果不承认这种数，代数方程有的无解，有的有一解，有的有两解，……五花八门，毫无规律；如果承认了它，代数方程都有解，而且 n 次方程不多不少恰好有 n 个解。

实数 见虚数.

复数 见虚数.

向量 既有绝对值大小又有方向的量叫做向量.

向量概念源出于一些物理量. 有些量可以用一个数值确定, 例如质量、温度、密度、面积和体积等等. 这一类量叫数量. 还有一些量, 只知道它们的数值大小是不够的, 要完全表示它们, 必须同时说明它们的方向, 例如力、速度、加速度等等就是属于这一类. 1788 年法国数学家拉格朗日的《分析力学》发表. 在这书中, 他把这些物理量数学化, 即用数学的方法来表示这些量. 例如, 他用具有确定长度和方向的有向线段来表示一个力 f , 并沿坐标轴把 f 分解为三个分力 f_x 、 f_y 、 f_z . 这些分力作为坐标轴上的有向线段, 可以简单地用数来表示. 这样, 在力学中关于力、速度及加速度的所有方程, 可以转变为联系它们的分量的、关于 x 、 y 、 z 的三个方程. 拉格朗日没有用“向量”这一名词.

拉格朗日之后, 随着电学的发展, 在数学和物理学中更广泛地研究了这种有向线段的一般理论. 到了 19 世纪, 德国数学家格拉斯曼引入有向线段的记号, 并称之为向量.

向量理论由于在力学、物理和技术中的重要性, 而构成了解析几何学中的一个重要组成部分——向量代数. 这一名称是为了区别于用分析方法研究向量的理论——向量分析, 后者是由美国数学家吉布斯于 1881—1884 年建立的.

复平面 用以表示复数的直角坐标平面叫做复平面.

17 世纪时, 英国数学家瓦里士已经意识到在直线上不能找到虚数的几何表示. 1797 年, 挪威的测量学家维塞尔向丹麦科学院递交论文《方向的解析表示, 特别应用于平面与球面多边形的测定》, 首先提出把复数 $a+bi$ 用坐标平面上的点