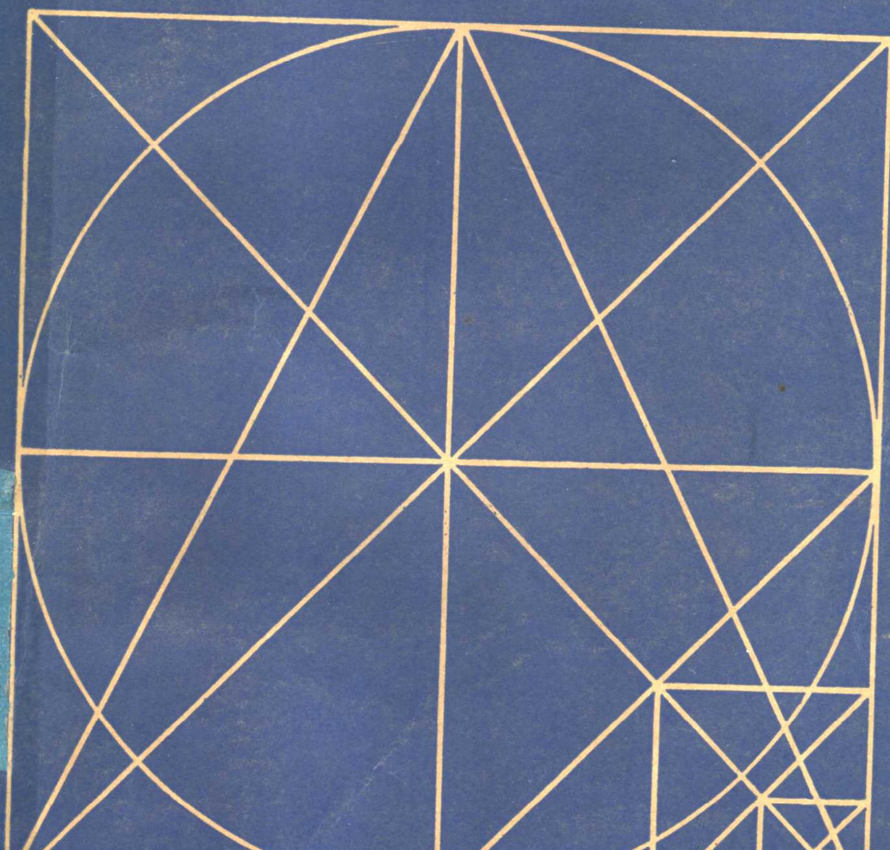
初中数学综合辅导

张硕才 陈传理



初中数学综合辅导

陈传理　张硕才

湖 北 教 育 出 版 社

初中数学综合辅导

陈传理　张硕才

著

湖北教育出版社出版　新华书店湖北发行所发行

湖北省新华印刷厂印刷

787×1092毫米 32开本　12印张　276,000字

1986年2月第1版　1986年2月第1次印刷

印数：1—20,000

统一书号：7306·295　　定价：1.55元

目　录

代　数

代　　数

第一章　有理数　实数

复习要求：

(1) 理解有关有理数、实数的一些概念，如有理数、无理数、实数，相反数、绝对值，数轴等；

(2) 掌握有理数的运算法则，能够熟练地进行有理数、实数的运算，同时又把注意力集中于应用算术运算律简化计算上.

§1.1　有理数、实数的有关概念

实数的有关概念

(1) 实数的分类

$$\text{实数}\begin{cases}\text{有理数}\begin{cases}\text{整数}\begin{cases}\text{正整数(自然数)}\\ 0\\ \text{负整数}\end{cases}\\ \text{分数(有限小数,循环小数)}\end{cases}\\ \text{无理数 (无限不循环小数)}\end{cases}$$

所谓有理数，是指能作为二整数之比的比值表示的数．例如，

$3\left(=\frac{3}{1}\right)$，$\frac{4}{3}$，$-1.23\left(=\frac{-123}{100}\right)$，$0.333\cdots\cdots\left(=\frac{1}{3}\right)$等，

都是有理数.

与此相反，无理数是指不能作为二整数之比的比值表示的数. 所以，有理数和无理数不能有相等的关系.

(2) 相反数：实数 a 和 $-a$ 叫做互为相反数；零的相反数仍旧是零.

(3) 绝对值：一个正实数的绝对值是它本身；一个负实数的绝对值是它的相反数；零的绝对值是零.

(4) 倒数：1 除以一个数的商，叫做这个数的倒数；零没有倒数.

(5) 数轴：规定了原点、正方向和单位长度的直线叫做数轴.

数轴上的所有点与全体实数是一一对应的.

说明 正确理解数学概念是掌握数学基础知识的前提，注意概念的确切意义，在复习时，对于容易混淆的数学概念，要用对比的方法认识它们之间的区别和联系.

例如对“无理数”，学生中的典型错误是，完全根据表面现象来判定一个数是有理数或无理数，并且容易认为一个含有无理数的式子组合就更加是一个无理数. 然而并非总是如此.

例如数

$$\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}-2\sqrt{6}$$

就不是一个无理数. 简单的计算表明，它等于 5.

在多数情况下，学生能说出给定实数的绝对值. 但要说出一个实数的绝对值定义时，我们常常听到这样一些不确切的话：“一个数的绝对值是无符号的数”. 或者“它是带有加号的数”. 或者“它是该数的正值”. 这个重要概念的明确定义无论何时都是必需的. 实数 a 的绝对值(记为 $|a|$) 也可以从下式定义：

$$|a|=\begin{cases}a, & 若\ a>0,\\ 0, & 若\ a=0,\\ -a, & 若\ a<0.\end{cases}$$

利用这个定义，可以算出任何实数的绝对值．根据给出的数是正，是负还是零，我们只需选用这定义中的第一，第三或第二行即可．

例如，若问数 -3 的绝对值是什么？完满的回答是：因为 $-3<0$，按定义负数的绝对值是它的相反数，所以数 -3 的绝对值是 $-(-3)=3$，即 $|-3|=3$.

注意，当 $a=0$ 时，等式 $|a|=a$ 是正确的．那么上式又可简写为：

$$|a|=\begin{cases}a, & 若\ a\geqslant 0,\\ -a, & 若\ a<0.\end{cases}$$

从绝对值的定义推出，对于任何 a，有 $|a|\geqslant 0$．即"$|a|$ 总是正数或者零"，要记住这个事实．

容易明白，$|a|$ 在几何上表示距离，即数轴上从点 a 到原点O的一段线段的长(正数或零)．通过考察各种情况，可以证明 $|b-a|$ 是点 a 和点 b 之间的距离．这种几何表示在解题中是很有用的．

例 1 (实数的概念) 分别指出下列各数的相反数，倒数，绝对值：

$$0.125,\ -7,\ 1\frac{1}{4},\ \sqrt{(-2)^2},\ \sqrt[3]{(-2)^3},\ \frac{\pi}{4}.$$

解：

原数	0.125	-7	$1\frac{1}{4}$	$\sqrt{(-2)^2}$	$\sqrt[3]{(-2)^3}$	$\frac{\pi}{4}$
相反数	-0.125	7	$-1\frac{1}{4}$	-2	2	$-\frac{\pi}{4}$

倒数	8	$-\frac{1}{7}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{4}{\pi}$
绝对值	0.125	7	$1\frac{1}{4}$	2	2	$\frac{\pi}{4}$

例 2 回答下列各题

(1) a 一定是正数吗？ $-a$一定是负数吗？

(2) $|a|$一定是正数吗？

(3) 若 a 是正数，$a+|a|=?$ $a-|a|=?$

(4) 若 a 是负数，$a+|a|=?$ $a-|a|=?$

解： (1) a 不一定是正数，$-a$ 也不一定是负数．因为 a 本身可能是正数，也可能是负数或 0；

(2) 不对．因为当 $a=0$ 时，$|a|=0$，所以$|a|$是非负数．(一般有 $|a|\geqslant 0$)

(3) 当 $a>0$ 时，$a+|a|=a+a=2a$，

$$a-|a|=a-a=0;$$

(4) 当 $a<0$ 时，$a+|a|=a-a=0$，

$$a-|a|=a-(-a)=a+a=2a.$$

例 3 解下列各题：

(1) 写出比$\sqrt[3]{3}-2$ 的相反数大的所有负整数；

(2) 写出与 2 的差的绝对值等于 3 的数；

(3) 具有什么条件的两个数，它们的和的绝对值，等于它们的绝对值的和．

解： (1) $\sqrt[3]{3}-2$ 的相反数是

$$-(3\sqrt{3}-2)=2-3\sqrt{3}\approx 2-3\times 1.732$$

$$=-3.196$$

∴ 大于 $3\sqrt{3}-2$ 的相反数的所有负整数是 -3，-2，-1．

(2) 绝对值等于3的数是3和-3，与2的差等于3的数是5，而与2的差等于-3的数是-1.

∴ 与2的差的绝对值等于3的数是5和-1.

(3) 设a、b为所求的两个数.

则 $|a+b|=|a|+|b|$.

① 当a，b都是正数时，上式成立；

② 当a，b都是负数时，上式成立；

③ 当a，b至少有一个是零时，上式也成立.

∴ 当两数同号，或至少有一个数为零时，它们的和的绝对值等于它们的绝对值的和.

习题 1.1

1. 填空：

(1) 比$-2\frac{1}{3}$大而比$3\frac{1}{2}$小的所有非负整数是________；

(2) 若两个数相乘积为零，则这两个数________；

(3) 一个数的倒数的相反数是$3\frac{1}{2}$，这个数是________；

(4) 如果两个数绝对值的和为零，则这两个数________；

(5) 若a，b互为相反数，那么$a+b=$________；

(6) 若a，b互为负倒数，那么$a\cdot b=$________；

(7) 若实数a满足$\frac{a}{|a|}=-1$，则a是________；

(8) 一个数的平方比这个数大，则这个数是________；

(9) 一个数的倒数比这个数大，则这个数是________；

(10) 最大的负整数是______，最小的正整数是______，绝对值最小的实数是______.

2. 写出下列各数的相反数：

$$\frac{5}{3},\ 0,\ -\sqrt{7},\ \sqrt{2}-1,\ -m,\ \frac{1}{1-x}.$$

3．写出下列各数的负倒数：

$$-4,\frac{7}{2},\ \sqrt{3},\ \sqrt{3}-\sqrt{2},\ \frac{1}{a^2},\ 1+\frac{1}{x},\ 0.$$

4．写出下列各数的绝对值：

$$3\frac{1}{4},\ 0,\ -\sqrt{3},\ m^2,\ -x^2,\ x^3,\ x-1.$$

5．写出满足下列各条件的数：

(1) 平方等于 9 的数；

(2) 绝对值小于 3 的整数；

(3) 小于 7 的非负整数；

(4) 绝对值大于 2，小于 $7\frac{1}{2}$的整数.

6．在数轴上表示下列各数或数的范围：

(1) 绝对值不大于 3 的整数；

(2) 绝对值大于 2 而小于 5 的数；

(3) 小于 5 的正整数；

(4) $-3\leqslant x\leqslant 4.5$.

7．下面几句话对不对？如果不对应怎样改正？

(1) 小数都是有理数；

(2) 小数都是无理数；

(3) 无理数都是无限小数.

§1.2 实数大小的比较及运算

1．实数比较大小

(1) 正数与负数：任何正数大于任何负数；

(2) 两个正数：绝对值较大的正数大；

(3) 两个负数：绝对值较大的负数反而小；

(4) 零与负数：负数小于零.

在数轴上表示两个数的点，右边的点所表示的数较大.

2. 有理数的运算法则

(1) 加法：同号两数相加，符号不变，绝对值相加；异号两数相加，取绝对值较大的加数的符号，用较大的绝对值减去较小的绝对值.

(2) 减法：减去一个数，等于加上这个数的相反数. 因此在有理数集中，加法和减法都可以统一成加法，而加号可以省略不写.

(3) 乘除法：两数相乘除，同号为正，异号为负，并把绝对值相乘除.

除以一个不等于零的数等于乘以这个数的倒数.

(4) 乘方：求相同因数的积的运算叫做乘方. 即

$$\underbrace{a\cdot a\cdots\cdots a}_{n\text{个}a}=a^n.$$

相同的因数 a 叫做底数，相同因数的个数 n 叫做指数，a^n 叫做 a 的 n 次幂.

正数的任意次幂是正数；负数的偶次幂是正数，负数的奇次幂是负数.

3. 有理数的运算定律

(1) 加法与乘法的交换律：

$$a+b=b+a;\quad a\cdot b=b\cdot a.$$

(2) 加法与乘法的结合律：

$$a+(b+c)=(a+b)+c;\quad a\cdot(b\cdot c)=(a\cdot b)\cdot c.$$

(3) 乘法对加法的分配律：

$$m(a+b)=ma+mb.$$

利用运算定律可以变更式子中各数的运算顺序，达到简化运算的目的.

4. 实数的计算

有理数集中的运算法则与运算定律在实数集中依然适用.

运算顺序：

(1) 按照第三级运算(乘方、开方)，第二级运算(乘、除)，第一级运算(加、减)的顺序进行运算.

(2) 有括号时，按照小括号，中括号，大括号的顺序进行运算.

例 1 (实数大小的比较)

比较下列各组数的大小；并用"<"连结：

(1) $-\frac{30}{31}$和$-\frac{29}{30}$；(2) π、3.1415、$\frac{22}{7}$；

(3) $\sqrt{2}+\sqrt{5}$和$2+\sqrt{3}$；

解：(1) $\left|-\frac{30}{31}\right|=\frac{30}{31}=\frac{900}{930}$

$\left|-\frac{29}{30}\right|=\frac{29}{30}=\frac{899}{930}$

$\because\ \left|-\frac{30}{31}\right|>\left|-\frac{29}{30}\right|$，$\therefore\ -\frac{30}{31}<-\frac{29}{30}$.

(2) $\because\ \frac{22}{7}=3.142857\cdots$，$\pi=3.1415926\cdots$

$\therefore\ 3.1415<\pi<\frac{22}{7}$.

(3) $(\sqrt{2}+\sqrt{5})^2=2+2\sqrt{10}+5=7+2\sqrt{10}$,

$(2+\sqrt{3})^2=4+4\sqrt{3}+3=7+2\sqrt{12}$,

$\because\ \sqrt{2}+\sqrt{5}$，$2+\sqrt{3}$都是正数，

$\therefore\ \sqrt{2}+\sqrt{5}$，$2+\sqrt{3}$分别是$7+2\sqrt{10}$和$7+2\sqrt{12}$的算术平方根，而$7+2\sqrt{10}<7+2\sqrt{12}$,

$\therefore\quad \sqrt{2}+\sqrt{5}<2+\sqrt{3}.$

例 2（有理数的运算） 计算：

$$-0.75^2\div\left(-1\frac{1}{2}\right)^3+(-1)^{18}\times\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right).$$

解：原式 $=-\left(\frac{3}{4}\right)^2\div\left(-\frac{3}{2}\right)^3+1\times\left(\frac{3}{6}-\frac{2}{6}\right)$

$$=-\frac{9}{16}\div\left(-\frac{27}{8}\right)+\frac{1}{6}$$

$$=\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{1}{3}.$$

注意 $-0.75^2=-\frac{9}{16}$，不要将它和 $(-0.75)^2=\frac{9}{16}$ 相混淆.

例 3（实数的运算） 计算：

$$\left\{\left[3\frac{1}{3}\div\left(-\frac{1}{4}\right)-\frac{1}{2}\times\sqrt[3]{\frac{-8}{27}}\right]\div\left(-\frac{1}{6}\right)-20\right\}\times|5\div(-6)|$$

解：原式 $=\left\{\left[\frac{10}{3}\times(-4)-\frac{1}{2}\times\left(-\frac{2}{3}\right)\right]\times(-6)-20\right\}\times\frac{5}{6}=\left\{\left[-\frac{40}{3}+\frac{1}{3}\right]\times(-6)-20\right\}\times\frac{5}{6}$

$$=\{[-13]\times(-6)-20\}\times\frac{5}{6}$$

$$=\{78-20\}\times\frac{5}{6}$$

$$=58\times\frac{5}{6}=48\frac{1}{3}.$$

习题 1.2

1. 比较下列各组数的大小：

(1) $-\frac{1}{6}$ 和 $\frac{1}{5}$；　　(2) $-\frac{5}{6}$ 和 $-\frac{6}{7}$；

(3) $-\frac{1}{\pi}$ 和 $-\frac{\sqrt{3}}{6}$；　　(4) $\left|-\frac{1}{4}\right|$ 和 $|-0.26|$；

(5) $\left|-\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\right|$和$\left|-\frac{1}{3}\right|+\left|-\frac{1}{2}\right|$;

(6) a和$-a$.

2．求：$+9\frac{5}{12}$与$-6\frac{7}{15}$两数和的相反数，再求这两个数相反数的和.

3．求$+\frac{5}{18}$与$-\frac{7}{24}$两数和的绝对值，再求这两个数的绝对值的和.

4．用简便方法计算：

(1) $\left(-2\frac{1}{2}\right)+\left[\left(\frac{5}{6}-0.5\right)+1\frac{1}{6}\right]$;

(2) $(-2)^3\times37\times(-0.125)$;

(3) $\left(-32\frac{16}{25}\right)\div(-32)$.

5．(1) 计算$\sqrt{3}+\frac{1}{7}-\left(2.335-\frac{5}{3}\right)$(精确到0.01)；

(2) 查表计算$2\sqrt{5}(1+\sqrt{3})$(保留两个有效数字).

6．计算下列各题：

(1) $-\left[-0.2^2+\frac{1}{25}\right]+[2^3-3^2(-1)^6]\div\frac{3^2}{4}$;

(2) $-2^2+(-2)^2-(-1)^3\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{2}\right)\div\frac{1}{6}-|-1|$;

(3) $12\div(-2)+0\div147-|2^4-(-29)\times(-2)|\times(3^2-2^3)$;

(4) $$\frac{23\frac{11}{12}+10.125\div\left(-\frac{3}{4}\right)^3}{(-1)^7-\dfrac{1}{\frac{1}{6}+\frac{1}{4}}};$$

(5) $-|(-3)^3|-|3.14-\pi|-\dfrac{\pi}{(-1)^{101}}-|-3.14|$.

复 习 题 一

1．在什么条件下，下列各式成立？

(1) $-a>0$；(2) $|a|>a$；(3) $\dfrac{1}{a}>a$；(4) $a^2>a$.

2．试比较三个数 $-\dfrac{17}{42}$，$-\dfrac{5}{12}$，$-\dfrac{3}{7}$的大小，把比较结果用不等号连结起来．

3．写出下列各数的近似值，使其结果保留4个有效数字，并用科学记数法表示．

(1) $\dfrac{\pi}{100}$；(2) $\dfrac{2}{7}$；(3) 438987；(4) $100\sqrt{3}$.

4．计算下列各式的值：

(1) $\left(-1\dfrac{3}{5}+0.8\right)\times 47.5+89\dfrac{3}{5}\div 26\dfrac{2}{7}\times\left(-14\dfrac{3}{8}\right)$；

(2) $\dfrac{4\times\left(-\dfrac{3}{4}\right)^2+\left|8\times\left(-\dfrac{3}{5}\right)\div 1\dfrac{1}{5}\right|-3\times\left(1\dfrac{2}{3}\right)^2}{4\dfrac{1}{3}-\left|2\div\left(-\dfrac{3}{2}\right)^2\times\left(1\dfrac{1}{2}\right)^2-2\right|}$.

5．$(2-\sqrt{3})$的相反数和负倒数各是什么？并把倒数和负倒数化简．

6．如果$-3<a<10$，写出所有奇数a的和与所有偶数a的积．

7．设a、b为有理数，且满足$(\sqrt{3}a+\sqrt{2})a+(\sqrt{3}b-\sqrt{2})b-\sqrt{2}-25\sqrt{3}=0$，求$a$，$b$.

8．设$\sqrt{10}$的整数部分为a，小数部分为b，试求$-\dfrac{1}{b}$.