编号

高等数学练习册

（上 册）

西北工业大学高等数学教材编写组 编

GAODENG SHUXUE LIANXICE

姓名

班级

学号

西北工業大學出版社

高等数学练习册

（上册）

西北工业大学高等数学教材编写组　编

西北工業大學出版社

【内容简介】 本练习册与西北工业大学高等数学教材编写组编写的《高等数学》配套使用。本练习册选题注重基本概念、基本定理、基本运算，适当配有提高题，以训练学生的解题技巧，其中穿插有数学家小传和数学史资料等，每册书后附有习题答案。本练习册的特点是选题精，内容系统，适合于工科专业本科生使用。

图书在版编目（CIP）数据

高等数学作业集/西北工业大学高等数学教材编写组编．—西安：西北工业大学出版社，1999.8

ISBN 7-5612-1146-5

Ⅰ．高…　Ⅱ．西…　Ⅲ．高等数学—高等学校—习题 Ⅳ．O13-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字（1999）第 27977 号

出版发行：西北工业大学出版社
通信地址：西安市友谊西路 127 号　**邮编**：710072
电　　话：029—88493844　88491757
网　　址：www.nwpup.com
印 刷 者：陕西友盛印务有限责任公司印刷
开　　本：787 mm×1 092 mm　1/16
印　　张：17.25
字　　数：430 千字
版　　次：2005 年 8 月第 1 版　2005 年 8 月第 1 次印刷
印　　数：1～6 000
定　　价：25.00 元(本册定价:11.00 元)

前 言

高等数学是工科院校最重要的基础课之一，学生对其内容掌握的程度如何，不仅直接影响到后续课程的学习，而且对今后工作将产生重要影响。在高等数学课程的学习中，学生不仅要注意获取必要的数学知识，更为重要的是，在获取数学知识的同时，要努力提高自己的抽象思维、逻辑推理、运算技能、综合应用等方面的能力。一本好的作业集，对内容的消化、所学知识的巩固以及上述各种能力的培养与训练，都将有重要的作用。

本练习册是由西北工业大学应用数学系具有丰富教学经验的教师于1993年编写完成并开始在教学中使用的。十二年来，曾几次修订、完善。习题的深广度，紧扣原国家教委颁发的“高等工业学校高等数学课程教学基本要求”。实践表明，使用该作业集，对保证高等数学课的教学质量起到了积极的作用。

本练习册与西北工业大学高等数学教材编写组编的《高等数学》教材配套使用。全书共分十二章，每一章由若干节及总习题组成。各节中的习题是大课后的作业，每一章的总习题是习题课后的作业。本作业集共分四册，这是为了方便学生交作业而编排的，为了提高学生对数学的兴趣，开阔眼界，增长知识，作业集中还穿插了一些数学家简介、数学笑话、智力趣题等，可以使学生的大脑在紧张中得到放松。每册书的末尾都附有习题答案。

参加本书编写工作的有肖亚兰、陆全、孟雅琴、杨月茜、刘哲、刘小冬、郑红婵、符丽珍、李云珠、郑兴媛、陈瑜、杨敬娟、王寿生、陈淑云。

限于编者水平，书中难免有错误、疏漏之处，敬请同行们批评指正。

编 者

2005年5月

目　　录

第一章　一元函数的极限与连续

第一节　映射与函数

1. 设 $A=(-\infty,-5)\cup(5,+\infty)$，$B=[-10,3]$，则 $A\cup B=$ ________，$A\cap B=$ ________，$A\backslash B=$ ________. $A\backslash(A\backslash B)=$ ________.

2. 函数 $y=\begin{cases}x^2-1, & 0\leqslant x\leqslant 1\\ x^2, & -1\leqslant x<0\end{cases}$ 的反函数 $x=\varphi(y)=$ ____________，即 $y=\varphi(x)=$ ____________.

3. 设 $f(x)=\dfrac{1-x}{1+x}$，$x\neq-1$，则 $f(0)=$ __________，$f(-x)=$ __________，$f(x+1)=$ __________，$f\left(\dfrac{1}{x}\right)=$ __________，$\dfrac{1}{f(x)}=$ __________.

4. 已知函数 $f(x)$ 的定义域为$(-1,0)$，则下列函数(　　)的定义域是$(0,1)$.

   (a) $f(x^2-1)$　　(b) $[f(x)]^2$　　(c) $f(-x)$　　(d) $f(x-1)$

5. 设 $f(x)=\begin{cases}1, & |x|<1\\ 0, & |x|=1\\ -1, & |x|>1\end{cases}$，$g(x)=e^x$，则 $f[g(x)]=$ ____________，$g[f(x)]=$ ____________.

6. 设 $\varphi(x)$，$\psi(x)$ 及 $f(x)$ 是单调增函数，证明：若 $\varphi(x)<f(x)<\psi(x)$，则

$$\varphi[\varphi(x)]<f[f(x)]<\psi[\psi(x)]$$

7. 设 $f(x)=\begin{cases}x^2, & x\leqslant 1\\ 2-x, & 1<x\leqslant 2\end{cases}$，求 $f(x-1)$.

8. 设 $f(x)$ 为奇函数，$F(x)=f(x)\left(\dfrac{1}{2^x-1}+\dfrac{1}{2}\right)$，则 $F(x)$ 的奇偶性如何?

9. 设映射 $f:X\to Y$，若存在一个映射 $g:Y\to X$，使 $g\circ f=I_x$，$f\circ g=I_y$，其中 I_x，I_y 分别是 X，Y 上的恒等映射，即对于每一个 $x\in X$，有 $I_x x=x$；对于每一个 $y\in Y$，有 $I_y y=y$. 证明：f 是双射，且 g 是 f 的逆映射：$g=f^{-1}$.

10. 证明：$\operatorname{sh}x+\operatorname{sh}y=2\operatorname{sh}\frac{x+y}{2}\operatorname{ch}\frac{x-y}{2}$.

任何周期函数必有最小正周期，对吗？

第三节　极限的概念

1. 观察下列数列的变化趋势，用线将其与相应结果连接起来.

(1) $x_n=(-1)^n\frac{1}{n}$　　(a) 极限为 1

(2) $x_n=1+(-1)^n$　　(b) 极限为 0

(3) $x_n=n\sin\frac{n\pi}{2}$　　(c) 极限不存在

(4) $x_n=\begin{cases}\frac{2^n-1}{2^n}, & n\text{ 为奇数}\\ \frac{2^n+1}{2^n}, & n\text{ 为偶数}\end{cases}$

2. 根据数列极限的定义证明：$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n+1}{2n+1}=\frac{3}{2}$.

3. 设数列$\{x_n\}$有界，又$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=0$，证明：$\lim\limits_{n\to\infty}x_ny_n=0$.

4. 根据函数极限的定义,证明:$\lim\limits_{x\to 3}(3x-1)=8$.

5. 已知:$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-1}{x^2+3}=1$,问 X 等于多少,可使 $|x|>X$ 时有 $\left|\dfrac{x^2-1}{x^2+3}-1\right|<0.01$ 成立?

6. 设 $f(x)=\begin{cases}-\dfrac{1}{x-1}, & x<0\\ 0, & x=0\\ x, & 0<x<1\\ 1, & 1\leqslant x<2\end{cases}$,则 $f(0^-)=$ ________,$f(0^+)=$ ________,

$f(1^-)=$ ________,$f(1^+)=$ ________,问 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to 1}f(x)$ 是否存在?

7. 设 $f(x)=\dfrac{|x|}{x}$,则 $f(0^-)=$ ________,$f(0^+)=$ ________. 问 $f(x)$ 在 $x\to 0$ 时极限是否存在?

第五节 极限的运算法则

1. 计算下列极限：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{3^n})$；

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1^2}{n^3}+\frac{2^2}{n^3}+\cdots+\frac{n^2}{n^3}\right)$；

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{(n-1)n})$；

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^n+3^n}{2^{n+1}+3^{n+1}}$；

(5) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[\left(x+\frac{2}{n}\right)+\left(x+\frac{4}{n}\right)+\cdots+\left(x+\frac{2n}{n}\right)\right]$.

2. 计算下列极限：

(1) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{(x+h)^2-x^2}{h}$；

(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1}$；

(3) $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\dfrac{8x^3-1}{6x^2-5x+1}$；

(4) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{3}{1-x^3}\right)$；

(5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4x^3-2x^2+x}{3x^2+2x}$；

(6) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(2x+10)^{10}(x+9)^{50}}{x^{60}+7x^{50}}$.

下列计算方法是否正确？为什么？

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)\left(1+\dfrac{1}{n}\right)\cdots\left(1+\dfrac{1}{n}\right)=$

$$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)\cdots\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)=1$$

(2) 设 $q>1$，若 $\lim\limits_{n\to\infty}q^n=a$，因为 $q^{n+1}=q\cdot q^n$，两边取极限得 $a=\lim\limits_{n\to\infty}q^{n+1}=q\lim\limits_{n\to\infty}q^n=qa$，从而必有 $a=0$，故 $\lim\limits_{n\to\infty}q^n=0$.

第六节　极限存在准则与两个重要极限

1. 计算下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\alpha x}{\sin\beta x}$；

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan 2x}{\sin 5x}$；

(3) $\lim\limits_{x\to 0}x\cot x$；

(4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{x\sin x}$；

2. 计算下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 0}(1-x)^{\frac{1}{x}}$；

(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x}{1+x}\right)^{x}$.

(3) $\lim\limits_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{1}{x}}$；

(4) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^{3x}$.

3. 已知 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x+1}-ax-b\right)=0$，求 a，b.

4. 用夹逼准则证明数列极限：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n^2+\pi}+\frac{n}{n^2+2\pi}+\cdots+\frac{n}{n^2+n\pi}\right)=1$；

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^n}{n!}=0$.

5. 设数列$\{x_n\}$由下式给出：$x_0>0$，$x_{n+1}=\frac{1}{2}\left(x_n+\frac{1}{x_n}\right)$ $(n=0,1,2,\cdots)$，用单调有界准则证明$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在，并求其值．

6. 求数列极限：$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2+n+1}+\frac{2}{n^2+n+2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n+n}\right)$.

数学是一种方法，它能使人们的思维方式严格化，养成有步骤地进行推理的习惯。当然，这并不是主张所有的人都成为知识渊博的数学家，而只是认为，人们通过学习数学，能使他们的理智获得逻辑推理的方法，由此他们就可能去把知识进行推广和发展。

第七节　无穷小与无穷大

1. 下列变量在所给趋向下 ________ 是无穷小，________ 是无穷大，________ 既不是无穷小，也不是无穷大．

(a) $x \to 0$，$\dfrac{1+2x}{x^2}$；　(b) $x \to 0^+$，$\lg x$；

(c) $x \to 0$，$x^3+\sin x$；　(d) $x \to \pi$，$x^3+\sin x$；

(e) $x \to 0$，$2^{-x}-1$；　(f) $x \to +\infty$，$2^{-x}-1$.

2. 根据定义证明：$y = x\sin\dfrac{1}{x}$ 当 $x \to 0$ 时为无穷小．

3. 当 $x \to 0$ 时，将下列所给无穷小与跟其相应的结论用线连接起来．

(1) $x^4+\sin 2x$　(a) 是比 x 低阶的无穷小

(2) $1-\cos 2x$　(b) 是比 x 高阶的无穷小

(3) $\dfrac{2}{\pi}\left[\cos\dfrac{\pi}{2}(1-x)\right]$　(c) 是 x 的同阶无穷小，但不等价

(4) $\dfrac{\sin x}{\sqrt{x}}$　(d) 是 x 的等价无穷小

4. 当 $x \to 0$ 时，(1) 无穷小 x^2 与 $\sqrt{1-x^2}-1$ 是否同阶，是否等价？为什么？

(2) 无穷小 x^2 与 $\tan x-\sin x$ 哪一个的阶高？为什么？

5. 利用等价无穷小的性质,求下列极限:

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1-3x)}{\sin x}$;

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{\sin^3 x}$;

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+x^2}-1}{1-\cos x}$;

(4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x\sin x}-1}{e^{x^2}-1}$.

6. 当 $x\to 0$ 时,$\cos x-\cos 2x$ 是关于 x 的几阶无穷小?为什么?

对于每一本值得阅读的数学书,必须"前后往返"地去阅读(拉格朗日语),现在我对这句话稍作修饰并阐述如下:"继续不断地往下读,但又不时地返回到已读过的那些内容中去,以便增强你的信心。"另外,当您在研读之中,一旦陷入难懂而又枯燥的内容之中时,不妨暂且越过而继续往前阅读,等到你在下文中发现被越过部分的重要性和必要性时,再回过头去研读它。

——克里斯托·乔治

7. 试观察函数 $y=x\cos x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内是否有界？又当 $x\to+\infty$ 时，这个函数是否为无穷大？

8. 函数 $f(x)=e^{\frac{1}{x}}$ 当 $x\to0$ 时极限存在吗？为什么？何时是无穷大？何时是无穷小？

发现谬误并纠正谬误，对于那些不是初学数学的人来说是一种极好的检测手段，还可以检验你是否已经正确而深入地了解了数学的真谛，还可以锻炼你的智力，并将你的判断和推理严格地约束在一种顺序之中。

——维奥拉