# 极限与极限题

吕 学

# 极限与极限题



云南人民出版社

责任编辑：何学惠
封面设计：刘绍荟

**极限与极限题**

吕　学

*

云南人民出版社出版
（昆明市书林街100号）
云南新华印刷厂印刷　云南省新华书店发行

*

开本：787×1092 1/32　印张：8.5　字数：180,000
1980年5月第一版　1980年5月第一次印刷
印数：1—5,770
统一书号：7116·712　　定价：0.60元

# 写在前面的话

近两三年来，学习高等数学（尤其是微积分学）的人日益增多，这有多方面的原因：第一，当前我国广大青年工人、农民和知识青年，响应党中央的号召，为早日实现四个现代化，正忘我地钻研新的科学技术，高等数学便成为首先应该掌握的工具；第二，为了适应四个现代化的需要，教育部又特地规定在中学数学中增设微积分学初步，因此，为数更多的中学生也在努力地学习微积分的有关内容；第三，还有高等院校理工科的低年级学生，当然也在积极地学习这门课程。

然而，就学习情况看，据笔者几年来的接触，发现初学微积分的青年同志，普遍地存在两个问题：（一）对有关的基本概念（尤其是极限部分）未能真正掌握，有些内容甚至还被理解得似是而非，这不利于学好这门课。（二）不会演习题，特别是不会证极限部分的证明题。其实，这两个问题也是互为影响的。对基本概念没有正确的理解和掌握，演起有关的习题当然是困难的，即使是仿照性地演了几题，也会觉得索然无味；反过来，不经过适当数量的演题训练，要想深刻地理解和掌握基本概念的实质，并灵活地运用它们，那当然也是不可能的。鉴于此，笔者不揣冒昧，草成《极限与极限题》这本小册子，其目的就是希望能为初学者提供一点方便和参考意见。

本书内容共计三章，即数列、数列的极限、函数的极限。第一章是复习和准备；第二章是本书的重点，比较详细地介绍了数列极限的基本概念、基本性质、演题方法；第三章可看作第二章内容的深入和继续。每章都附有大量例题，供读者参考。当然，要真正掌握这些，对每一个初学者来说，都是要花些精力的。

由于本书主要是给中学生(包括初学微积分的年青同志)看的，因此在编写时注意了以下几点：第一，对基本概念的引入，力求做到由浅入深，由具体到抽象，从正反两个方面进行对比和阐述。笔者认为，采用这样的方式，既不会使初学者因某些基本概念的过分抽象而望而生畏，同时，也不至于使读者对基本概念的理解仅仅局限于浅显而表面的感性认识阶段。第二，剖析了大量例题，并进行整理、归纳和综合，指出演题的基本方法和技巧。笔者认为，通过这样的分析和整理，可以提高初学者分析问题和解决问题的能力，增加学习的兴趣。第三，在方法上，尽量采用中学生可以接受的初等的方法，这样，既可以为读者进一步学习高等数学打牢基础，也可以顺便复习和巩固中学数学中与之有关的一些基本知识。

限于笔者水平，加之时间短，因此，本书在内容取舍和处理上都肯定会有许多不妥和错误的地方，敬请各方面的同志，给以批评指正。

# 目　录


第一章　数列 …………………………………………… ( 1 )

§1　数列的基本概念 ……………………………… ( 1 )

§2　等差数列和等比数列 …………………………… ( 6 )

§3　几个记号和三角不等式 ………………………… ( 10 )

§4　几个求和公式和必要充分条件 ………………… ( 14 )

§5　例题分析 ……………………………………… ( 19 )

第二章　数列的极限 ……………………………………… ( 39 )

§1　数列极限之描述 ………………………………… ( 39 )

§2　极限定义的精确化 ……………………………… ( 44 )

§3　几点注记和例题 ………………………………… ( 50 )

§4　十个讨论题 …………………………………… ( 64 )

§5　收敛数列的一些基本性质和运算法则 ………… ( 70 )

§6　极限存在的两个重要判别法 …………………… ( 85 )

§7　子数列、无界数列、无穷大量、无穷小量 ………… (103)

§8* 上、下确界和上、下极限 ……………………… (107)

§9　杂谈极限题 …………………………………… (124)

第三章　函数的极限 ……………………………………… (177)

§1　函数极限的定义 ……………………………… (178)

§2　函数极限的一些基本性质和运算法则 ………… (188)

§3　海因定理、复合函数极限运算定理 …………… (196)

§4　单调有界原理、柯西准则、两个重要极限 ……… (207)

§5　无穷小量和无穷大量的阶 ……………………… (213)

§6　杂谈函数的极限题 ……………………………… (217)

# 第一章　数　列

为了学习极限理论，我们先简单复习一下数列的基本概念，并且还补充一些与极限有关的知识。

## §1　数列的基本概念

**数列**

依照某种法则排列着的一列数，叫做数列。例如：

（1）自然数列

$$1, 2, 3, 4, 5, \cdots;$$

（2）从小到大排列着的所有正的偶数组成的数列

$$2, 4, 6, 8, 10, \cdots;$$

（3）$-\frac{1}{2}$的1次幂，2次幂，3次幂，…组成的数列

$$-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \cdots;$$

（4）从小到大排列着的100以内的质数组成的数列

$$2, 3, 5, 7, 11, \cdots, 97;$$

（5）在 $f(t)=9-3t$ 中，自变量 $t$ 依次取1，2，3，4，5，6所得的函数值组成的数列

$$6, 3, 0, -3, -6, -9;$$

（6）在 $f(n)=n^2-(n+2)(n-2)$ 中，自变量 $n$ 依次取 1，2，3，4，5，…所得的函数值组成的数列

$$4, 4, 4, 4, 4, \cdots;$$

等等。

在一个数列里，每一个确定的位置上都有一个确定的数。例如，在上面的数列（1）里，第一个位置上的数是 1，第二个位置上的数是 2，…；在数列（2）里，第一个位置上的数是 2，第二个位置上的数是 4，…。因此，我们可以把一个数列的数，看做它所在的位置的号数的函数；自变量就是位置的号数，它所取的值是 1，2，3，…，等等，而对应的函数值就是数列里的各个数。

数列里的一个数叫做数列的一项；在第一个位置上的数叫做第 1 项，在第二个位置上的数叫做第 2 项，…，一般地说，在 $n$ 个位置上的数叫做第 $n$ 项。数列的第 $n$ 项通常用符号 $x_n$（或 $a_n$ 等）表示。因为 $n$ 可以是任何正整数，所以 $x_n$ 又叫做数列的通项，并常常以记号 $\{x_n\}$ 表示以 $x_n$ 为通项的数列。例如，在数列（2）里，$x_1=2$，$x_2=4$，$x_3=6$，…，$x_n=2n$，因而数列（2）也可以简单地写成 $\{2n\}$；或 $\{x_n\}$，$x_n=2n$。

一个数列里，如果在某一项的后面不再有任何别的项，这个数列就叫做有限数列；如果在任何一项的后面都还有跟随着的项，这个数列就叫做无穷数列。例如，数列（4）、（5）是有限数列；数列（1）、（2）、（3）、（6）是无穷数列。

一个数列里，如果从第2项起，每一项都不小于（或大于）它的前面一项，即

$$x_n \leqslant x_{n+1} \text{（或 } x_n < x_{n+1}\text{）}(n=1,2,3,\cdots),$$

这个数列就叫做单调递增（或严格单调递增）数列；如果从第2项起，每一项都不大于（或小于）它的前面一项，即

$$x_n \geqslant x_{n+1} \text{（或 } x_n > x_{n+1}\text{）}(n=1,2,3,\cdots),$$

这个数列就叫做单调递减（或严格单调递减）数列。

一个数列，如果各项都相等，这个数列就叫做常数列。例如，数列(6)即常数列。

设 $\{x_n\}$ 是一个数列，如果存在一个正数 $R$，使得 $\{x_n\}$ 中的每一项的绝对值都不大于 $R$，即

$$|x_n| \leqslant R \quad (n=1,2,3,\cdots),$$

就称 $\{x_n\}$ 是有界数列；$R$ 便是 $\{x_n\}$ 的一个界。

很明显，如果 $R$ 是 $\{x_n\}$ 的界，那末任何比 $R$ 大的正数也都是 $\{x_n\}$ 的界。这是因为，若 $R_1>R>0$，那末当 $|x_n| \leqslant R(n=1,2,3,\cdots)$ 时，当然更有 $|x_n| \leqslant R_1(n=1,2,3,\cdots)$，所以 $R_1$ 也是 $\{x_n\}$ 的界。

设 $\{x_n\}$ 是一个数列，如果存在常数 $u$，使得数列 $\{x_n\}$ 中的每一项都不大于 $u$，即

$$x_n \leqslant u \quad (n=1,2,3,\cdots),$$

就说 $\{x_n\}$ 是上方有界的数列，简称有上界的数列。$u$ 便是 $\{x_n\}$ 的一个上界。很明显，如果 $\{x_n\}$ 有上界 $u$，即 $x_n \leqslant u$

$(n=1,2,3,\cdots)$，那末任何比 $u$ 大的数 $u_1$ 也都是 $\{x_n\}$ 的上界，即 $x_n \leqslant u < u_1 (n=1,2,3,\cdots)$. 因此，如果 $\{x_n\}$ 是有上界的，那末它就有无穷多个上界.

同样，如果存在常数 $v$，使得数列 $\{x_n\}$ 中的每一项都不小于 $v$，即

$$v \leqslant x_n \ (n=1,2,3,\cdots),$$

则说 $\{x_n\}$ 是下方有界的数列，简称有下界的数列. $v$ 便是 $\{x_n\}$ 的一个下界. 很明显，如果 $\{x_n\}$ 有下界 $v$，即 $v \leqslant x_n$ $(n=1,2,3,\cdots)$，那末任何比 $v$ 小的数 $v_1$ 也都是 $\{x_n\}$ 的下界，即 $v_1 < v \leqslant x_n \ (n=1,2,3,\cdots)$. 因此，如果 $\{x_n\}$ 是有下界的，那末它就有无穷多个下界.

不过要注意，有些数列只有上界而无下界，例如数列

$$-1,-2,-3,\cdots,-n,\cdots$$

便是有上界而无下界的数列. 同样，有些数列只有下界而无上界，例如数列

$$1,2,3,\cdots,n,\cdots$$

便是有下界而无上界的数列.

由此可见，有上界的数列不一定是有界数列，有下界的数列也不一定是有界数列. 只有当数列 $\{x_n\}$ 既有上界又有下界时，$\{x_n\}$ 才是有界的数列. 所以既有上界又有下界的数列，叫有界数列.

这样，有界数列便有了两种定义方法，其等价性是容易证明的. 现证之如下：

先证假若存在正数$R$，使

$$|x_n|\leqslant R \quad (n=1,2,3,\cdots),$$

那末，$\{x_n\}$一定是既有上界又有下界，也即是说，一定存在常数$u$和$v$，使

$$v\leqslant x_n\leqslant u \quad (n=1,2,3,\cdots).$$

事实上，$|x_n|\leqslant R$，意味着

$$-R\leqslant x_n\leqslant R \quad (n=1,2,3,\cdots),$$

因此可取$v=-R$，$u=R$。

次证假若存在常数$u$和$v$，使

$$v\leqslant x_n\leqslant u \quad (n=1,2,3,\cdots),$$

那末，一定存在正数$R$，使

$$|x_n|\leqslant R \quad (n=1,2,3,\cdots).$$

事实上，当所有的$x_n$都夹在$v$和$u$之间时，只要取$R$为$v$的绝对值和$u$的绝对值这两个数中的最大者，那末就必然有

$$|x_n|\leqslant R \quad (n=1,2,3,\cdots).$$

**数列的通项公式**

一个数列的第$n$项$x_n$和项数$n$间的函数关系如果可以用一个公式表示，这个公式就叫做这个数列的通项公式。

很明显，如果知道了一个数列的通项公式，那末用某一

个自然数代公式里的 $n$，就可以求出这个数列的某一项；依次用 1，2，3，…去代公式里的 $n$，就可以依次求出这个数列的第 1 项，第 2 项，第 3 项，…等等。例如，已知一个无穷数列 $\{x_n\}$ 的通项公式是 $x_n = 3n-2$，那末用20代 $n$，就得出这个数列的第20项 $x_{20}=58$；依次用 1，2，3，…去代 $n$，就得出这个数列的各项依次是 1，4，7，…。

## §2 等差数列和等比数列

**等差数列**

如果一个数列，从第 2 项起，每一项减去它的前面一项所得的差都等于某一个常量，那末这个数列就叫做等差数列。这个常量叫做等差数列的公差，通常用符号 $d$ 表示。

**等差数列的通项公式**

因为在一个等差数列里，从第 2 项起，每一项减去它的前面一项都等于公差，所以每一项都等于它的前面一项加上公差。因此，如果等差数列 $a_1$，$a_2$，$a_3$，$a_4$，… 的公差是 $d$，那末

$$a_2 = a_1 + d,$$

$$a_3 = a_2 + d = a_1 + 2d,$$

$$a_4 = a_3 + d = a_1 + 3d,$$

…………

$$a_n = a_1 + (n-1)d.$$

所以，$a_n = a_1 + (n-1)d$ 就是上述等差数列的通项公式。

**等差数列前n项的和的公式**

设等差数列

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\cdots,\ x_n,\cdots$$

的前 $n$ 项的和是 $S_n$，那末

$$S_n=x_1+x_2+\cdots+x_n.$$

根据等差数列的通项公式，我们可以把这个式子写成

$$S_n=x_1+(x_1+d)+(x_1+2d)+\cdots+[x_1+(n-1)d] \tag{1}$$

很明显，我们也可以把 $S_n$ 写成

$$S_n=x_n+x_{n-1}+\cdots+x_2+x_1,$$

因为 $x_n,\ x_{n-1},\cdots,\ x_1$ 是公差等于 $-d$ 的等差数列，所以根据等差数列的通项公式，上面这个式子又可写成

$$S_n=x_n+(x_n-d)+(x_n-2d)+\cdots+[x_n-(n-1)d] \tag{2}$$

把(1)和(2)的两边分别相加，得

$$2S_n=(x_1+x_n)+(x_1+x_n)+\cdots+(x_1+x_n)=n(x_1+x_n),$$

$$\therefore\quad S_n=\frac{(x_1+x_n)n}{2}.$$

由此可知，等差数列前 $n$ 项的和等于第1项与第 $n$ 项的和的一半的 $n$ 倍。

如果用 $x_1+(n-1)d$ 代替公式 $S_n=\dfrac{(x_1+x_n)n}{2}$ 里的 $x_n$，我们还可以得到下面的公式：

$$S_n=nx_1+\frac{n(n-1)}{2}d.$$

**等比数列**

如果一个数列，从第 2 项起，每一项和它的前面一项的比都等于某一个常量，那末这个数列就叫做等比数列．这个常量叫做等比数列的公比，通常用字母 $q$ 表示．例如数列

$$1,\ -\frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ -\frac{1}{8},\ \frac{1}{16},\ \cdots$$

就是一个等比数列，它的公比 $q=-\dfrac{1}{2}$.

**等比数列的通项公式**

因为在一个等比数列里，从第 2 项起，每一项和它的前面一项的比都等于公比，所以每一项都等于它的前面一项乘以公比。因此，如果等比数列

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ \cdots,\ x_n,\ \cdots$$

的公比是 $q$，那末

$$x_2=x_1q,$$

$$x_3=x_2q=(x_1q)q=x_1q^2,$$

$$x_4=x_3q=(x_1q^2)q=x_1q^3,$$

$$x_5=x_4q=(x_1q^3)q=x_1q^4,$$

…………

$$x_n=x_{n-1}q=\cdots=x_1q^{n-1}.$$

所以，　$x_n=x_1q^{n-1}$就是上述等比数列的通项公式。

**等比数列前n项的和的公式**

设等比数列

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ \cdots,\ x_n,\ \cdots$$

的前$n$项的和是$S_n$，那末

$$S_n=x_1+x_2+x_3+\cdots+x_n.$$

根据等比数列的通项公式，我们可以把这个式子写成：

$$S_n=x_1+x_1q+x_1q^2+\cdots+x_1q^{n-1} \tag{1}$$

很明显，如果等比数列$x_1$，$x_1q$，$x_1q^2$，…，$x_1q^{n-1}$的每一项都乘以公比$q$，那末所得数列的第1项就是原来数列的第2项，所得数列的第2项就是原来数列的第3项，…，而所得数列各项的和应当等于原来数列的各项的和的$q$倍，即

$$qS_n=x_1q+x_1q^2+xq^3+\cdots+x_1q^{n-1}+x_1q^n \tag{2}$$

从(1)的两边分别减去(2)的两边，得

$$(1-q)S_n=x_1-x_1q^n=x_1(1-q^n).$$

所以，当$q\neq1$时，

$$S_n=\frac{x_1(1-q^n)}{1-q}.$$

另外，很明显，当$q=1$时，等比数列各项相同，即为常数列，因此，

$$S_n=nx_1\ (q=1).$$

## § 3 几个记号和三角不等式

有几个在数学中常用的记号，我们先在此地介绍一下.

设 $x_1$，$x_2$，…，$x_n$ 为 $n$ 个实数（随便 $n$ 等于几），以符号 $max\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ 来表示这 $n$ 个数中最大的数，又以 $min\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ 来表示这 $n$ 个数中最小的数. 例如：

$$max\left\{\frac{1}{2}, -1, -8, 3\frac{2}{5}, -4\frac{1}{3}\right\}=3\frac{2}{5},$$

$$min\left\{\frac{1}{2}, -1, -8, 3\frac{2}{5}, -4\frac{1}{3}\right\}=-8.$$

设 $x$ 代表任一实数，我们以符号 $|x|$ 代表 $x$ 的绝对值，即

$$|x|=\begin{cases} x & \text{当 } x\geqslant 0 \text{ 时,} \\ -x & \text{当 } x<0 \text{ 时.}\end{cases}$$

**绝对值的几条基本性质**

1） $|a|\geqslant 0$；$|a|=|-a|$；

2） $|a|\geqslant \pm a$；

3） $|ab|=|a|\cdot|b|$；

4） $\left|\dfrac{a}{b}\right|=\dfrac{|a|}{|b|}$ $(b\neq 0)$；

5） 若 $|a|<\varepsilon$，则 $-\varepsilon<a<\varepsilon$；反之，若 $-\varepsilon<a<\varepsilon$，则 $|a|<\varepsilon$. 这里 $\varepsilon$ 是一正实数.

6） $|a+b|\leqslant|a|+|b|$.

性质1)、2)、3)、4)、5)是很明显的，初中代数中就已经学过．性质6)可以证明如下：

(i)当$a$，$b$中有一为0时，不妨设$b=0$，那末很明显

$$|a+0|=|a|+|0|=|a|+|b|;$$

(ii)当$a$和$b$同号时，那末，由于

$$(a+b)=\pm(|a|+|b|),$$

上式右端，当$a$，$b$同为正时，取+；同为负时，取－．

$$\therefore\quad |a+b|=\left|\pm(|a|+|b|)\right|=\left||a|+|b|\right|=|a|+|b|;$$

(iii)当$a$，$b$异号时，并且不妨设$|b|\geqslant|a|$，那末，

当$b>0$时，

$$0<a+b=|b|-|a|<|b|+|a|,$$

$$\therefore\quad |a+b|=a+b<|b|+|a|.$$

当$b<0$时，

$$0>a+b=-(|b|-|a|),$$

即 $$0<-(a+b)=|b|-|a|<|b|+|a|,$$

$$\therefore\quad |a+b|=-(a+b)<|b|+|a|.$$

综合(i)、(ii)、(iii)得知，不论$a$，$b$的情况怎样，都有

$$|a+b|\leqslant|a|+|b|.$$

连续应用性质6)，还可得到