一九八〇年校庆报告论文选

（理　科）

山　东　大　学

1980年6月

目　录

最优过程罚函数方法的数学理论……………………………………陈祖浩（1）

一类非线性算子的极限算子的正谱……………………………………郭大钧（16）

曲率单调的单拐曲线……………………………………………………郑汉鼎（33）

90 MH_z 钽酸锂晶体滤波器………………………………张仲渊　张振凡（41）

具有$PTF>1$及均匀载流子漂移速度的硅雪崩二极管的小讯号分析
　………………………………………………………………………唐惟琅（46）

5cm 波段微波辐射计………………………………电子系微波辐射计研制组（56）

氮分子激光器泵浦的可调谐染料激光器……………………………光学系（61）

硅橡胶新硫化体系的研究（Ⅰ）——双烯加成交联……………………
　…………………杜作栋　刘洪云　任树梅　王秀杰　王鲁军　刘志经（66）

多苯基苄基一、多苯基苯基有机硅化合物及其聚合物的耐热性研究
　…………杜作栋　陈剑华　史保川　王浩　李亚胜　宫淑玲　李永明（76）

极性基取代环四硅氧烷的合成及其开环聚合…………邓淑梅　鲍冠苓　杜作栋（86）

二氧化锰电极的电极行为（Ⅱ）碱液中无机添加剂对二氧化锰薄片电极
　可充电性的影响………………………………鹿玉理　雷佩琼　徐国宪（96）

泰山赤鳞鱼的研究………………………………周忠江　蔡德霖　周才武（104）

压力反射和迷走神经在肾上腺素诱发心律失常中的作用……………………
　………………………………………………李桂舫　张淑鎏　杨天恩（118）

猪骨针剂对血管通透性的影响（摘要）…………………王龙　王培忠　李文兰（129）

地瓜茎线虫研究之二：花生肿瘤病观察初报（摘要）……………………
　………………………………………………尹光德　张云美　张淑玲（131）

泰安地区地面测量的简单分析……………………………………………
　山东大学遥感室　中国科学院遥感所
　……………………山东省地质局综合队　浙江大学地质系（135）
　山东农学院　泰安林业局

造纸厂变害为利的一条途径——草类纸浆蒸煮黑液中半纤
　维素的微生物分解与利用（摘要）………………马桂荣　高培基　王祖农（144）

最优过程罚函数方法的数学理论

陈 祖 浩

（数 学 系）

摘要．本文采用统一的方法，把内外罚函数概念作了扩展和处理，揭示了内外罚函数的共同本质及两者的相异之处，对罚函数进行了分类，研究了最优控制问题与罚函数间的一些关系，获得了在极限情形下带内、外罚函数的最优控制问题等价于受限最优控制问题的一些充分条件和充要条件。

1．前 言

罚函数方法是解相坐标受限最优控制问题的有力工具，奠基性工作是[1]、[2]，其后的发展见[3]—[6]等。通常的外和内罚函数是分开定义的，且必须分别具下述性质：在受限域B外的任一闭域D上$\lim\limits_{k\to+\infty}\min\limits_{D}p_k(\cdot)=+\infty$和当$x(t)\to x(c_1)\in\partial B$时，$p_k(\cdot)\to+\infty$、$\int_{a_1}^{c_1}p_k(\cdot)dt=+\infty$。本文§2把内外罚函数的概念作了扩充和统一处理为三个性质，揭示了外和内罚函数的共同特征和不同之处，主要表现在∂B的邻域内而与邻域外的值无关，[1]—[4]等均为本文的特例，这既扩大了罚函数的选择范围，又可取$p_k(\cdot)$只在∂B的足够小邻域内不为零，而使$f_0(\cdot)+p_k(\cdot)$与$f_0(\cdot)$只在∂B的足够小邻域内相异，从而有可能加快带罚函数$p_k(\cdot)$的最优控制问题$\mathscr{A}_{k0}$（$\mathscr{A}_k$）收敛于原始受限最优控制问题$\mathscr{A}$的速率。

§§3—5 用统一的方法，清楚地揭示了外（内）罚函数的三个性质的作用，其中性质〈1〉、〈2〉主要是保证I_{k0}（I_k）的存在性、收敛性及满足一个重要的不等式（见定理3.1），而性质〈3〉则主要是保证问题$\mathscr{A}_{k0}$（$\mathscr{A}_k$）有非受限解、解序列收敛和其极限在受限域内。§6讨论了带罚函数的最优控制问题收敛于原始受限最优控制问题。文[1]、[2]等只得到属于本文特例的充分性条件，而本文还得到前人所没有的充要条件。其中[1]的主要定理是本文定理6.3.的特殊情形；此定理的充分条件是不易判断它何时才能成立的，[1]也未解决此问题，本文定理6.1.给出与此充分条件等价的一个定量判别法则。在$f_i(\cdot)$和$p_k(\cdot)$关于u是线性时文[2]的主要定理是本文定理6.8.的特例，在[2]中添了很难实现的“最优控制序列$\{u_k^*\}$绝对收敛”的假

定，而本文指出：只要取强外罚函数列，就足以保证问题$\mathscr{A}_{k_0}$收敛于问题$\mathscr{A}$了，这在使用上是很方便的。我们还对罚函数较细地分为六类，得到一些充要条件（见定理6.4.—6.7.），据所得的各定理，基本搞清楚了在什么情形下应取何种罚函数的问题了。此外，从定理5.3.和定理6.8.还得计算数$\mathring{J}_*$和J_*的公式。

2. 概念与问题的叙述

设受控系统由向量微分方程

$$\frac{dx}{dt}=f(t,x,u) \tag{2.1}$$

来描述，此处$x\in R^n$，$u\in R^r$，向量函数$f=(f_1,\cdots,f_n)$；$R^1\times R^n\times R^r\to R^n$，$f_i$在$I\times O\times U$上是$C^{(1)}$类函数，其中$I=[a,b]$是$t$轴上长度有限但不为零的闭区间，$O$是欧氏空间$R^n$内的开集或是$R^n$本身，$U$是$R^r$内的凸有界闭集。

记$\triangle$为在U内取值的可测函数$u(t)$，$a_u\leqslant t\leqslant b_u$ $(a\leqslant a_u<b_u\leqslant b)$，的全体所成的函数类。设$B$是$O$内有非空内部的闭集。今后用$\mathring{*}$记集$*$的内部。又给定位于$\mathring{B}$内互不相交的闭流形$S_0$和$S_1$.

任给集$D\subset O$，记$\varDelta[D]$为这样的控制类：当$u\in\varDelta[D]$时，有$u\in\triangle$，对应的状态向量$x(t)\in D$，$a_u\leqslant t\leqslant b_u$；$x(a_u)=x_0\in S_0$，$x(b_u)=x_1\in S_1$，$x(t)\bar{\in}S_i$，$a_u<t<b_u$，$(i=0,1)$。特别地可取$D=O$、$B$和$\mathring{B}$等。当$u\in\varDelta[O]$时，称$u$为容许控制，相应的$x(t)$称容许轨线，$(u,x)$或$(x,u)$称为容许对。

记$\hat{\mathscr{C}}[D]$为定义在$(a\leqslant)a_1\leqslant t\leqslant b_1(\leqslant b)$上且在域$D$内取值并满足边界条件$x(a_1)\in S_0$，$x(b_1)\in S_1$的绝对连续向量函数$x(t)$之全体所成的函数类。

显然，对任一个$u\in\varDelta[O]$，方程（2.1）的解关于初值唯一地确定且解$x(t)\in\hat{\mathscr{C}}[O]$。今后还假定，对一切$u\in\varDelta[O]$，存在数$L>0$，使相应地有

$$\|x(t)\|\leqslant L,\quad a_u\leqslant t\leqslant b_u, \tag{22}$$

此处$\|x\|=\left[\sum_i^n x_i^2\right]^{\frac{1}{2}}$是欧儿里得模。从此假设立得：

引理2.1. 设$\varDelta[O]$非空，任取$u\in\varDelta[O]$，则相应的轨线$x(t)$，$a_u\leqslant t\leqslant b_u$，有$\|x(t_2)-x(t_1)\|\leqslant S(t_2)-S(t_1)\leqslant K(t_2-t_1)$。此处$a_u\leqslant t_1\leqslant t_2\leqslant b_u$，$S(t)$表从点$x(a_u)$到点$x(t)$的轨线弧长，$K$是$\|f(\cdot)\|$在$I\times\{x\mid\|x\|\leqslant L\}\times U$上的上界。

现引进泛函

$$J[u]\triangleq\int_{a_u}^{b_u}f_0(t,x,u)\,dt, \tag{2.3}$$

此处$f_0(\cdot)$在$I\times O\times U$上连续。记

$$J_* \triangleq \inf_{u\in\Delta[B]} J[u],\ \mathring{J}_* \triangleq \inf_{u\in\Delta[\mathring{B}]} J[u],\ J_o \triangleq \inf_{u\in\Delta[O]} J[u]. \qquad (2.4)$$

定义1．求$u_*\in\Delta[B]$使$J[u_*]=J_*$，这问题称为相坐标有界的最优控制问题，或称受限最优控制问题，简称（受限）问题$\mathscr{A}$；相应的容许对（u_*，x_*）称为问题$\mathscr{A}$的解。

定义2．若问题$\mathscr{A}$的一个解（$\hat{u}$，$\hat{x}$）有性质$\hat{u}\in\Delta[\mathring{B}]$或即$\hat{x}(t)\in\mathring{B}$，$a_u\leqslant t\leqslant b_u$，则称（$\hat{u}$，$\hat{x}$）是（受限）问题$\mathscr{A}$的一个非受限解。

定义3．凡具下列三性质的连续函数列$\{p_k(t, x, u)\}$，，称外(内)罚函数列[*]：

〈1〉$p_k(\cdot)$在$I\times O\times U$（$I\times\mathring{B}\times U$）上非负。

〈2〉对任定的闭集$D\subset\mathring{B}$，有

$$\lim_{k\to+\infty}\ \sup_{(x,\ u)}\int_{a_1}^{b_1} p_k(t,\ x(t),\ u(t))\,dt=0, \qquad (2.5)$$

此处$x\in\hat{\mathscr{C}}[D]$，$a_1\leqslant t\leqslant b_1$是$x(t)$的定义区间，$u$是$\triangle$中以$[a_1,\ b_1]$为定义区间的任一函数。

〈3〉存在有性质$B_{k+1}\subset B_k\subset O$，$B=\bigcap\limits_k B_k$和$B_k\neq B(B=B_k)$的某闭集序列$\{B_k\}$，使在$B_k(B)$上，对有性质$x(t)\in\mathring{B}_k(\mathring{B})$，$a_1\leqslant t<c_1$，$x(c_1)\in\partial B_k(\partial B)$的定义区间是$a_1\leqslant t\leqslant b_1$而$a_1<c_1\leqslant b_1$的任一函数$x\in\hat{\mathscr{C}}[O]$，和确定在$[a_1,\ c_1]$上的$u\in\triangle$，都有

$$\int_{a_1}^{c_1} p_k(t,\ x(t),\ u(t))\,dt\geqslant \mathring{J}_*-J_o+\rho(\mathring{J}_*-J_*+\rho), \qquad (2.6)$$

此处ρ是一正数。

易见，若取$p_k(\cdot)\equiv 0$，$(t,\ x,\ u)\in I\times B\times U$，则性质〈2〉成立，$\mathring{J}_*$和$J_o$可用通常非受限最优控制理论而求得；或为简便起见，直接按下一节的公式（3.1），选取$p_k(\cdot)$使满足下式，即能使式（2.6）成立：

$$\int_{a_1}^{c_1} p_k(\cdot)\,dt\geqslant 2\overline{M}(b-a)+\rho,\ \overline{M}=max\{M,\ |m|\}, \qquad (2.7)$$

定义4．若$\{p_k(\cdot)\}$是外罚函数列，设在域B及∂B上满足内罚函数所满足的不等式：

$$\int_{a_1}^{c_1} p_k(\cdot)\,dl\geqslant \mathring{J}_*-J_*+\rho, \qquad (2.8)$$

则称$\{p_k(\cdot)\}$是内罚型外罚函数。

若$\{p_k(\cdot)\}$是外罚函数列，设还满足加强了的性质〈2〉：对域$D=B$有性质〈2〉，即

---

[*] 此处及往后各节的叙述中，遇括号时，前后括号内的和紧跟括号前的文字或符号分别地相互对应，而其余的则共用。

$$\lim_{k\to+\infty} \sup_{(x,\ u)} \int_{a_1}^{b_1} p_k(t,\ x,\ u)dt = 0, \tag{2.9}$$

成立，此处 $x\epsilon\hat{\mathscr{C}}[B]$，$[a_1,\ b_1]$是 x 的定义区间，u 是△中定义在 $[a_1,\ b_1]$ 上的函数，则称 $\{p_k(\cdot)\}$ 是强外罚函数列。

若在定义 3 的关于内罚函数的叙述中，用 $\int_{a_1}^{c_1} p_k(\cdot)dt \geqslant \rho > 0$ 代替式（2.6），则称 $\{p_k(\cdot)\}$ 是弱内罚函数列。

若 $\{p_k(\cdot)\}$ 是外罚函数列，设在域 B 和 ∂B 上满足的是 $\int_{a_1}^{c_1} p_k(\cdot)dt \geqslant \rho > 0$，则称$\{p_k(\cdot)\}$是弱内罚型外罚函数列。

现引入泛函和记号

$$J_k[u] \triangleq J[u] + \int_{a_u}^{b_u} p_k(t,\ x,\ u)dt, \tag{2.10}$$

$$J_{k0} \triangleq \inf_{u\epsilon\Delta[O]} J_k[u],\quad J_{k*} \triangleq \inf_{u\epsilon\Delta[B]} J_k[u]. \tag{2.11}$$

定义 5．求 $u_*^*\epsilon\Delta[O]$（$\Delta[B]$）使 $J_k[u_*^*] = J_{ko}$（J_{k*}），这样的最优控制问题称为问题 $\mathscr{A}_{ko}$（$\mathscr{A}_k$），相应的（u_*^*，x_*^*）称为问题 $\mathscr{A}_{ko}$（$\mathscr{A}_k$）的解。

定义 6．问题 $\mathscr{A}_{ko}$（$\mathscr{A}_k$）的有性质 $x_*^*(t)\epsilon O(\mathring{B})$，$a_u \leqslant t \leqslant b_u$，的解，称为问题 $\mathscr{A}_{ko}$（$\mathscr{A}_k$）的非受限解。

3. J_O、J_*、$\mathring{J}_*$ 和 J_{kO}、J_{k*} 的存在性和收敛性

本节将导出数 J_o、J_* 等的存在性及 J_{ko}、J_{k*} 收敛于 J_* 的充分条件。可证得下述

引理 3.1. 设 $\Delta[\mathring{B}]$ 非空，$\{p_k(\cdot)\}$是满足定义 3 的性质〈1〉的函数列，则 J_o、J_*、J_{ko}（J_{k*}），（$k=1,\ 2,\ \cdots$），存在且为有限数，并有关系式

$$M(b-a) \geqslant \mathring{J}_* \geqslant J_* \geqslant J_o \geqslant \begin{cases} 0, & \text{当}m \geqslant 0, \\ m(b-a), & \text{当}m < 0, \end{cases} \tag{3.1}$$

$$J_{ko}(J_{k*}) \geqslant J_o(J_*), \tag{3.2}$$

此处 M 和 m 分别是 f_o 在 $I\times\{x|\,\|x\|\leqslant L\}\times U$ 上的上界和下界。

引理 3.2. 设 $\Delta[\mathring{B}]$ 非空，$\{p_k(\cdot)\}$是满足定义 3 中性质〈1〉、〈2〉的函数列，则对任何 $\mathring{u}\epsilon\Delta[\mathring{B}]$ 有

$$J_o(J_*) \leqslant \varliminf_{k\to+\infty} J_{ko}(J_{k*}) \leqslant \varlimsup_{k\to+\infty} J_{ko}(J_{k*}) \leqslant J[\mathring{u}]. \tag{3.3}$$

注意到式（3.3）中 $\mathring{u}\epsilon\Delta[\mathring{B}]$ 的任意性，立即得下述三个定理。

定理 3.1. 在上面引理的假设下，有关系式

$$J_o(J_*) \leqslant \varliminf_{k\to+\infty} J_{ko}(J_*) \leqslant \varlimsup_{k\to+\infty} J_{ko}(J_{k*}) \leqslant \bar{J}_*. \quad (3.4)$$

定理 3.2. 设上面定理的假定成立，则 $\{J_{ko}(J_{k*})\}$ 存在收敛子序列，其极限$J_{\infty o}(J_{\infty *})$满足

$$J_o(J_*) \leqslant J_{\infty o}(J_{\infty *}) \leqslant \bar{J}_*. \quad (3.5)$$

定理 3.3. 设上面定理的假定成立。若 $J_o = \bar{J}_*$，则 $\{J_{ko}\}$ 和 $\{J_{k*}\}$ 的极限存在且等于 J_*；若 $J_* = \bar{J}_*$，则 $\{J_{k*}\}$ 的极限存在且等于 J_*.

定理 3.4. 设$\Delta[B]$ 非空，$\{p_k(\cdot)\}$ 满足定义 3 中的 性 质 〈1〉 和加强了的性质〈2〉，则有关系式

$$J_o \leqslant \varliminf_{k\to+\infty} J_{ko} \leqslant \varlimsup_{k\to+\infty} J_{ko} \leqslant \varlimsup_{k\to+\infty} J_{k*} \leqslant J_*, \quad (3.6)$$

$$J_o \leqslant \varliminf_{k\to+\infty} J_{ko} \leqslant \varliminf_{k\to+\infty} J_{k*} \leqslant \varlimsup_{k\to+\infty} J_{k*} \leqslant J_*. \quad (3.7)$$

证 只要证明上两式的最右边不等式就够了。因 $\Delta[B] \subset \Delta[O]$，故

$$J_{ko} \leqslant J_{k*} = \inf_{u\in\Delta[B]} \left[J[u] + \int_{a_u}^{b_u} p_k(\cdot) \right]. \quad (3.8)$$

显然，对任给的 $\varepsilon > 0$，存在 $u_\varepsilon \in \Delta[B]$，使

$$\inf_{u\in\Delta[B]} J[u] \leqslant J[u_\varepsilon] \leqslant \inf_{u\in\Delta[B]} J[u] + \varepsilon.$$

因此，从式（3.8）得

$$J_{ko} \leqslant J_{k*} \leqslant \inf_{u\in\Delta[B]} J[u] + \varepsilon + \sup_{u\in\Delta[B]} \int_{a_u}^{b_u} p_k(\cdot)\,dt. \quad (3.9)$$

注意到 ε 的任意性及式（2 9）. 从上式即得证本定理。

4. 问题 $\mathscr{A}_{ko}(\mathscr{A}_k)$ 和问题 $\mathscr{A}$ 的存在性

从现在起的各节，所研究的是线性地依赖于 u 的系统，即设

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x, u) = g(t, x) + B(t, x)u, \quad (4.1)$$

$$J[u] = \int_{a_u}^{b_u} f_o(t, x, u)\,dt = \int_{a_u}^{b_u} \{g_o(t, x) + \langle h_o(t, x), u\rangle\}dt, \quad (4.2)$$

$$J_k[u] = J[u] + \int_{a_u}^{b_u} \{p_{ok}(t, x) + \langle q_{ok}(t, x), u\rangle\}dt, \quad (4.3)$$

此处〈·，·〉是数积，$g(t, x)$和$h_o(t, x)$，$q_{ok}(t, x)$分别是n维和r维向量函数，$B(t, x)$是$n\times r$矩阵函数，g_o和p_{ok}是数量函数。由这些函数所构成的f_i（$i=0,1,\cdots,n$）和$\{p_k(\cdot)\}$仍假定具§2的性质，此外，当$\{p_k(\cdot)\}$是内罚或内罚型函数列时，我们只考虑$q_{ok}(\cdot)=0$，即$p_k(t, x, u)\equiv p_{ok}(t, x)$。之所以研究系统(4.1)—(4.3)，是为保证问题$\mathscr{A}_{ko}$（$\mathscr{A}_k$）和$\mathscr{A}$的解的存在性及收敛性。

定理 4.1. 设$\Delta[B]$非空，则问题$\mathscr{A}$有解（u_*，x_*）。

证 一方面，从引理3.1.知J_*是有限数，又从假设可见存在$\{u_i\}$，$u_i\in\Delta[B]$，使$\lim\limits_{i\to+\infty} J[u_i]=J_*$. 另方面，注意到问题$\mathscr{A}$是受限最优控制问题，故从[7]或[1]的定理2.1.知，在$\{u_i\}$中存在L_2空间的弱收敛子序列，仍记为$\{u_i\}$，$a_i\leqslant t\leqslant b_i$，其极限记为$u_*$，$a_*\leqslant t\leqslant b_*$，使当$i\to+\infty$时$a_i\to a_*$，$b_i\to b_*$，$\lim\limits_{i\to\infty} J[u_i]=J[u_*]$，$u_*\in\Delta[B]$，合并上面两个方面，即得（$u_*$，$x_*$）就是问题$\mathscr{A}$的解。

定理 4.2. 设$\Delta[\mathring{B}]$非空，$\{p_k(\cdot)\}$是外(内)罚函数列，则存在$N>0$，当$k>N$时，问题$\mathscr{A}_{ko}$（$\mathscr{A}_k$）有非受限解（u_*^k，x_*^k），且$x_*^k(t)\in B_k(\mathring{B})$，$a^k\leqslant t\leqslant b^k$.

证 （一）从引理3.1.和定义可见，J_{ko}（J_{k*}）是有限数且存在$\{(u_i^k, x_i^k)\}$，$u_i^k\in\Delta[O]$（$\Delta[B]$），使

$$\lim_{i\to+\infty} J_k[u_i^k]=J_{ko}\ (J_{k*})\ . \tag{4.4}$$

于是由[1]、[7]知，存在容许对（u^k_*，x^k_*），$a^k\leqslant t\leqslant b^k$，和$\{(u_i^k, u_i^k)\}$的子序列，仍记为$\{(u_i^k, x_i^k)\}$，$a_i^k\leqslant t\leqslant b_i^k$，使

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{i\to+\infty} a_i^k=a^k,\quad \lim\limits_{i\to+\infty} b_i^k=b^k;\quad \lim\limits_{i\to\infty} u_i^k=u_*^k,\ (\,weakly),\ t\in \mathring{I};\\ \lim\limits_{i\to+\infty}\ \max\limits_{t\in I_o}\|x_i^k(t)-x_*^k(t)\|=0,\end{array}\right\} \tag{4.5}$$

此处I_o是$[a^k, b^k]$上的任一紧致子集。

当$\{p_k(\cdot)\}$是内罚函数列时，因$u_i^k\in\Delta[B]$及问题$\mathscr{A}$是受限的，故据[1]定理2.1.有

$$\lim_{i\to+\infty} J[u_i^k]=J[u_*^k]. \tag{4.6}$$

（二）若$\{p_k(\cdot)\}$是外罚函数列时，可指出，存在$N>0$，当$k>N$时，$u_*^k\in\Delta[B_k]$。

从定理3.1.可见，对数$\rho>0$，存在$N>0$，当$k>N$时，$J_{ko}<\mathring{J}_*+\rho$；由此式及(4.4)可见，存在$N_1(k)>0$，当$i\geqslant N_1$时，

$$J_k[u_i^k]<\mathring{J}_*+\rho. \tag{4.7}$$

现往证，当$k>N$，$i\geqslant N_1$时$u_i^k\in\Delta[\mathring{B}_k]$。设不然，则有时刻$c_i^k$，使$x_i^k(t)\in\mathring{B}_k$，$a_i^k\leqslant t<c_i^k$，$x_i^k(c_i^k)\in\partial B_k$，于是据定义3得

$$J_k[u_i^k] \geqslant J_o + \int_{a_i^k}^{c_i^k} p_k(t, x_i^k(t), u_i^k(t))\,dt \geqslant \tilde{J}_* + \rho.$$

这式与（4.7）相悖，从而得证 $u_i^k \in \Delta[\mathring{B}_k]$。再顾及式（4.5）和 B_k 为闭集，即得 $x_*^k(t) \in B_k \subset O$，$a^k \leqslant t \leqslant b^k$，$u_*^k \in \Delta[O]$，从［1］的定理2.1.即得

$$\lim_{i \to +\infty} J_k[u_i^k] = J_k[u_*^k],\ u_*^k \in \Delta[O]. \tag{4.8}$$

从式（4.4）和（4.8）即得证（u_*^k，x_*^k）是问题 $\mathscr{A}_{ko}$ 的非受限解。

（三）若 $\{p_k(\cdot)\}$ 是内罚函数列，往证 $x_*^k(t) \in \mathring{B}$ 且（u_*^k，x_*^k）是问题 $\mathscr{A}_k$ 的解。

从式（4.5）知 $u_*^k \in \Delta[B]$，再注意到式（4.4）、（4.6）即得

$$\lim_{i \to +\infty} \int_{a_i^k}^{b_i^k} p_k(t, x_i^k(t), u_i^k(t))\,dt = J_{k*} - J[u_*^k] \leqslant J_{k*} - J_*. \tag{4.9}$$

设存在某时刻 $c^k \in [a^k, b^k]$ 使 $x_*^k(t) \in \mathring{B}$，$a^k \leqslant t < c^k$，但 $x_*^k(c^k) \in \partial B$，兹证会产生矛盾。任定一个小数 $\delta > 0$，则应用 *Fatou* 定理和式（4.9）即得

$$\int_{a^k+\delta}^{c^k} p_k(t, x_*^k(t), u_*^k(t))\,dt = \int_{a^k+\delta}^{c^k} \lim_{i \to +\infty} p_{ok}(t, x_i^k(t))\,dt$$

$$\leqslant \lim_{i \to +\infty} \int_{a_i^k}^{c^k} p_{ok}(t, x_i^k(t))\,dt \leqslant J_{k*} - J_*, \tag{4.10}$$

由此注意到 δ 的任意性并从定理3.1.就得：对常数 $\rho > 0$，存在 $N > 0$，当 $k > N$ 时

$$\int_{a^k}^{c^k} p_k(t, x_*^k(t), u_*^k(t))\,dt \leqslant J_{k*} - J_* < \tilde{J}_* - J_* + \rho; \tag{4.11}$$

另方面，因 $u_*^k \in \Delta[B]$，则从定义3得

$$\int_{a^k}^{c^k} p_k(t, x_*^k(t), u_*^k(t))\,dt \geqslant \tilde{J}_* - J_* + \rho. \tag{4.12}$$

从式（4.11）与（4.12）所得矛盾证明了 $x_*^k(t) \in \mathring{B}$，$a^k \leqslant t \leqslant b^k$．因此，从［1］的定理2.1.即得 $\lim_{i \to +\infty} J_k[u_i^k] = J_k[u_*^k]$，由此及（4.4）就得证（$u_*^k$，$x_*^k$）是问题 $\mathscr{A}_k$ 的非受限解。

推论4.1. 设 $\Delta[\mathring{B}]$ 非空，若 $\{p_k(\cdot)\}$ 是内罚型外罚函数列，则还有 $x_*^k(t) \in \mathring{B}$，$a^k \leqslant t \leqslant b^k$。

推论4.2. 设 $\Delta[\mathring{B}]$ 非空，则用内罚型外罚函数列构成的问题 $\mathscr{A}_{ko}$ 和问题 $\mathscr{A}_k$，两者是等价的。

5．问题 $\mathscr{A}_{k0}(\mathscr{A}_k)$ 的解的收敛性

定理 5.1．设定理 4.2．中的假设均成立，则问题 $\mathscr{A}_{k0}(\mathscr{A}_k)$ 的解序列 $\{(u_*^k, x_*^k)\}$，$a_k\leqslant t\leqslant b_k$，中有收敛于 (u_*, x_*)，$a_*\leqslant t\leqslant b_*$，的子序列，使

$$\left.\begin{array}{l} 1^\circ.\ \lim\limits_{k\to+\infty} a_k=a_*,\quad \lim\limits_{k\to+\infty} b_k=b_*;\quad \lim\limits_{k\to+\infty} u_*^k=u_*\ (weakly)\ t\in I;\\ \qquad \lim\limits_{k\to+\infty}\max\limits_{t\in I_0}\|x_*^k(t)-x_*(t)\|=0, \end{array}\right\}\tag{5.1}$$

此处 I_0 是 $[a_*, b_*]$ 上的任一紧致子集。

$$2^\circ.\ u_*\in\Delta[B]，即\ x_*(t)\in B,\ a_*\leqslant t\leqslant b_*. \tag{5.2}$$

$$3^\circ.\ \lim_{k\to+\infty} J[u_*^k]=J[u_*]。 \tag{5.3}$$

证 （一）从［1］、［7］就知 $\{(u_*^k, x_*^k)\}$ 中存在弱收敛子序列，仍记为 $\{u_*^k, x_*^k)\}$，使 1° 成立。

（二）往证对问题 $\mathscr{A}_k$，2°、3° 成立。事实上，因 $u_*^k\in\Delta[B]$，B 是闭集，故 $u_*\in\Delta[B]$；又 $\mathscr{A}_k$ 是受限问题，故从［1］的定理 2.1．得知（5.3）成立。

（三）现考虑（u_*^k，x_*^k）是问题 $\mathscr{A}_{k0}$ 的解的情形。首先往证 $u_*\in\Delta[B]$。设不然，则存在时刻 $\bar t\in I_*$ 使 $x_*(\bar t)\bar\in B$，故存在点 $x_*(\bar t)$ 的一个与 B 不交的、闭邻域 $H(x_*(\bar t),\varepsilon)$，此处 ε 是大于 0 的足够小的正数，并存在 $\bar t$ 的一个 δ 邻域和存在 $N_1>0$，使当 $k>N_1$ 时 $x_*^k(t)\in H(x_*(\bar t),\varepsilon)$，$t\in[\bar t-\delta, \bar t+\delta]$。另方面按定义 3，存在 $N_2>0$，当 $k>N_2$ 时 $B_k\cap H(x_*(\bar t),\varepsilon)=\varnothing$，而从定理 4.2．知 $x_*^k(t)\in\mathring{B}_k$，$t\in[\bar t-\delta, \bar t+\delta]$，所以 $x_*^k(t)\bar\in H(x_*(\bar t),\varepsilon)$，$t\in[\bar t-\delta,\bar t+\delta]$。上述两方面是矛盾的，这证实了必有 $x_*(t)\in B$，$a_*\leqslant t\leqslant b_*$．故 2° 得证。

其次，由上述当然也有 $x_*(t)\in O$，$a_*\leqslant t\leqslant b_*$，故从［1］的定理 2.1．知式（5.3）必成立，即 3° 得证。

定理 5.2．设定理 5.1．的假定成立，则

$$J_0\leqslant J_*\leqslant J[u_*]\leqslant \varliminf_{k\to+\infty} J_k[u_*^k]\leqslant \varlimsup_{k\to+\infty} J_k[u_*^k]\leqslant \mathring{J}_*. \tag{5.4}$$

证 从 J_* 的定义、$p_k(\cdot)$ 的非负性、定理 5.1．及定理 4.2．和定理 3.1．，即可证得本定理。

定理 5.3．设 $\{p_k(\cdot)\}$ 是内罚函数列或内罚型外罚函数列，则 $\lim\limits_{k\to+\infty} J_k[u_*^k]=J[u_*]=\mathring{J}_*$。

证 从定理 4.2．及推论 4.1．知 $u_*^k\in\mathring{B}$，因此 $\mathring{J}_*\leqslant J[u_*^k]\leqslant J_k[u_*^k]$。另方面，注意到上一定理及式（5.3），就得证本定理。

6．极限情形下问题 $\mathscr{A}_{k0}(\mathscr{A}_k)$ 与问题 $\mathscr{A}$ 的等价性

定义 7．设 $(\hat{u},\ \hat{x})$，$\hat{a}\leqslant t\leqslant \hat{b}$，是容许对。若相应地存在容许对序列 $\{(\hat{u}_j,\ \hat{x}_j)\}$，它具性质：$\hat{u}_j\in\Delta[\mathring{B}]$，$\hat{a}_j\leqslant t\leqslant \hat{b}_j$；且当 $j\to+\infty$ 时 $\hat{a}_j\to\hat{a}$，$\hat{b}_j\to\hat{b}$，及

$$\left.\begin{aligned}&\lim_{j\to+\infty}\hat{u}_j=\hat{u}\ (weakly),\quad t\in I,\\&\lim_{j\to+\infty}\ \max_{t\in I_0}\ \|\hat{x}_j(t)-\hat{x}(t)\|=0,\end{aligned}\right\}\tag{6.1}$$

此处 I_0 是 $[\hat{a},\ \hat{b}]$ 上任一紧致子集，则称能从 $\Delta[\mathring{B}]$ 内（或从 $\mathring{B}$ 内）趋近容许对 $(\hat{u},\hat{x})$。若 $(\hat{u},\ \hat{x})$ 还是问题 $\mathscr{A}$ 的一个解，则称能从 $\Delta[\mathring{B}]$ 内（或从 $\mathring{B}$ 内）趋近于问题 $\mathscr{A}$ 的解 $(\hat{u},\ \hat{x})$。

引理 6.1．若容许对序列 $\{(\hat{u}_j,\ \hat{x}_j)\}$ 从 $\Delta[\mathring{B}]$ 内趋于容许对 $(\hat{u},\ \hat{x})$，则必有 $\lim\limits_{j\to+\infty}J[\hat{u}_j]=J[\hat{u}]$。

定义 8．设 (u_*^k,u_*^k)，$a_k\leqslant t\leqslant b_k$，和 $(u_*,\ x_*)$，$a_*\leqslant t\leqslant b_*$，分别是问题 $\mathscr{A}_{k0}(\mathscr{A}_k)$ 和问题 $\mathscr{A}$ 的解，$\{(u_*^k,\ x_*^k)\}$ 有子序列，仍记为 $\{u_*^k,\ x_*^k)\}$，使

$$\left.\begin{aligned}&\lim_{k\to+\infty}a_k=a_*,\quad \lim_{k\to+\infty}b_k=b_*;\quad \lim_{k\to+\infty}u_*^k=u_*\ (weakly),\quad t\in I;\\&\qquad\lim_{k\to+\infty}\ \max_{t\in I_0}\ \|x_*^k(t)-x_*(t)\|=0,\end{aligned}\right\}\tag{6.2}$$

此处 I_0 是 $[a_*,\ b_*]$ 上的任一紧致子集，且

$$\lim_{k\to+\infty}J[u_*^k]=J[u_*],\tag{6.3}$$

$$\lim_{k\to+\infty}J_k[u_*^k]=J[u_*]=J_*.\tag{6.4}$$

则称当 $k\to+\infty$ 时问题 $\mathscr{A}_{k0}(\mathscr{A}_k)$ 等价于问题 $\mathscr{A}$，或称问题 $\mathscr{A}_{k0}(\mathscr{A}_k)$ 趋于问题 $\mathscr{A}$．

定理 6.1．设 $\Delta[\mathring{B}]$ 非空，则问题 $\mathscr{A}$ 有能从 $\mathring{B}$ 内趋于它的解的充要条件是：$\mathring{J}_*=J_*$。

证　充分性　从 $\mathring{J}_*$ 的定义知，存在 $\{\hat{u}_j\}$，$\hat{u}_j\in\Delta[\mathring{B}]$，使

$$\lim_{j\to+\infty}J[\hat{u}_j]=\mathring{J}_*;\tag{6.5}$$

又从［1］、［7］知，在 $\{\hat{u}_j,\ \hat{x}_j)\}$ 中存在子序列，仍记 $\{(\hat{u}_j,\ \hat{x}_j)\}$，及存在 $(\hat{u},\hat{x})$ 使（6.1）成立，注意到 $\hat{x}_j(t)\in\mathring{B}$，$\hat{a}_j\leqslant t\leqslant\hat{b}_j$，和 B 是闭集，就得 $\hat{x}(t)\in B$，$\hat{a}\leqslant t\leqslant\hat{b}$，即 $\hat{u}\in\Delta[B]$。这样，容许对 $(\hat{u},\ \hat{x})$ 是可从 $\mathring{B}$ 内由 $\{\hat{u}_j,\ \hat{x}_j)\}$ 趋近的。从引理 6.1 就得 $\lim\limits_{j\to+\infty}J[\hat{u}_j]=J[\hat{u}]$，再注意式（6.5）和所给条件即得 $J[\hat{u}]=J_*=\mathring{J}_*$，即 $(\hat{u},\ \hat{x})$ 是问题 $\mathscr{A}$ 的解。

必要性　设问题 $\mathscr{A}$ 的解（$\hat{u}$，$\hat{x}$）可由 $\{(\hat{u}_j,\ \hat{x}_j)\}$ 从 $\mathring{B}$ 内趋近，这里 $\hat{u}_j\in\Delta[\mathring{B}]$，于是从引理 6.1. 可见 $\lim\limits_{j\to\infty} J[\hat{u}_j]=J[\hat{u}]$，此处 $J[\hat{u}]=J_*$. 另方面，因 $\hat{u}_j\in\Delta[\mathring{B}]$ 故 $J_*\leqslant \mathring{J}_*\leqslant J[\hat{u}_j]$，合并上述两方面就得 $\mathring{J}_*=J_*$。

定理 6.2. 设 $\Delta[\mathring{B}]$ 非空，$\{p_k(\cdot)\}$ 是外（内）罚函数列，则 $\mathring{J}_*=J_*$ 或 $\mathring{J}_*=J_0$ 是当 $k\to+\infty$ 时问题 $\mathscr{A}_{ko}(\mathscr{A}_k)$ 有非受限解且等价于问题 $\mathscr{A}$ 的充分条件。

证　据定理 4.2.，问题 $\mathscr{A}_{ko}(\mathscr{A}_k)$ 有非受限解（u_*^k，x_*^k）。从定理 5.1. 知，存在（u_*，x_*）使式（6.2）和（6.3）成立。再在所设条件下从定理 5.2. 即得（6.4）成立，定理证毕。

定理 6.3. 设 $\Delta[\mathring{B}]$ 非空，$\{p_k(\cdot)\}$ 是外（内）罚函数列，问题 $\mathscr{A}$ 有能从 $\mathring{B}$ 内趋近的解（$\hat{u}$，$\hat{x}$），则当 $k\to+\infty$ 时，问题 $\mathscr{A}_{ko}(\mathscr{A}_k)$ 有非受限解且等价于问题 $\mathscr{A}$。

证　据定理 6.1. 和定理 6.2. 即得本定理。

定理 6.4. 设 $\Delta[\mathring{B}]$ 非空，$\{p_k(\cdot)\}$ 是内罚型外罚函数列（内罚函数列），则 $k\to+\infty$ 时问题 $\mathscr{A}_{ko}(\mathscr{A}_k)$ 等价于问题 $\mathscr{A}$ 的充要条件是：$\mathring{J}_*=J_*$。

证　从假设，据推论 4.1. 及定理 5.1.，问题 $\mathscr{A}_{ko}(\mathscr{A}_k)$ 的解 $(u_*^k,\ x_*^k)\in\Delta[\mathring{B}]\times\hat{C}[\mathring{B}]$ 及满足式（6.2）和（6.3）。

充分性　由 $\mathring{J}_*=J_*$ 及定理 5.3. 就得式（6.4）成立。

必要性　设已知 $[u_*^k,\ x_*^k]$ 是问题 $\mathscr{A}_{ko}(\mathscr{A}_k)$ 的解，上面已得知 $u_*^k\in\Delta[\mathring{B}]$ 故 $\mathring{J}_*\leqslant J[u_*^k]\leqslant J_k[u_*^k]$，取极限并据条件就得 $\mathring{J}_*\leqslant J_*$。但显然应 $J_*\leqslant\mathring{J}_*$，故 $J_*=\mathring{J}_*$。

定理 6.5. 设 $\Delta[\mathring{B}]$ 非空，$\{p_k(\cdot)\}$ 是弱内罚型外罚函数列（弱内罚函数列），则当 $k\to+\infty$ 时问题 $\mathscr{A}_{ko}(\mathscr{A}_k)$ 有（u_*^k，x_*^k）$\in\Delta[\mathring{B}]\times\hat{C}[\mathring{B}]$ 的解且等价于问题 $\mathscr{A}$ 的充要条件是：$\mathring{J}_*=J_*$.

证　充分性　从 $\{p_k(\cdot)\}$ 的弱罚性及 $\mathring{J}_*=J_*$，知，对具性质 $x(t)\in\mathring{B}, a_1\leqslant t<c_1$，$x(c_1)\in\partial B$ 的每一个函数 $x\in\hat{C}[O]$，$a_1\leqslant t\leqslant b_1$，其中 $a_1<c_1\leqslant b_1$，及在 $[a_1,\ c_1]$ 上定义的 $u\in\triangle$，都有 $\displaystyle\int_{a_1}^{c_1} p_k(t,\ x(t),\ u(t))dt\geqslant\mathring{J}_*-J_*+\rho=\rho>0$，由此可认为 $\{p_k(\cdot)\}$ 就是内罚型外罚函数列（内罚函数列）。因此，从推论 4.1. 和定理 4.2. 知问题 $\mathscr{A}_{ko}(\mathscr{A}_k)$ 的解（u_*^k，x_*^k）$\in\Delta[\mathring{B}]\times\hat{C}[\mathring{B}]$，且满足式（6.2）和（6.3）；再类似于定理 6.4. 中充分性的证明就得：$k\to+\infty$ 时问题 $\mathscr{A}_{ko}(\mathscr{A}_k)$ 等价于问题 $\mathscr{A}$。

必要性　类似定理6.4.中必要性的证明即可。

据定理6.4.、6.5.、6.1.即得下述两定理。

定理 6.6. 设 $\Delta[\mathring{B}]$ 非空，$\{p_k(\cdot)\}$ 是内罚型外罚函数列（内罚函数列），则当 $k\to+\infty$ 时问题 $\mathscr{A}_{ko}(\mathscr{A}_k)$ 等价于问题 $\mathscr{A}$ 的充要条件是：问题 $\mathscr{A}$ 有一个从 $\mathring{B}$ 内趋近的解。

定理 6.7. 设 $\Delta[\mathring{B}]$ 非空，$\{p_k(\cdot)\}$ 是弱内罚型外罚函数列（弱内罚函数列），则当 $k\to+\infty$ 时问题 $\mathscr{A}_{ko}(\mathscr{A}_k)$ 有（u_*^k，x_*^k）$\in\Delta[\mathring{B}]\times\hat{C}[\mathring{B}]$ 的解且等价于问题 $\mathscr{A}$ 的充要条件是：问题 $\mathscr{A}$ 有从 $\mathring{B}$ 内趋近的解。

定理 6.8. 设 $\Delta[B]$ 非空，$\{p_k(\cdot)\}$ 是强外罚函数列，则当 k 足够大时，问题 $\mathscr{A}_{k_0}$ 必有非受限解且当 $k\to+\infty$ 时问题 $\mathscr{A}_{k_0}$ 等价于问题 $\mathscr{A}$。

证 因 $\{p_k(\cdot)\}$ 也是外罚函数，故从定理 4.2. 知问题 $\mathscr{A}_{k_0}$ 有非受限解 (u_*^k, x_*^k) 且使 $J_{k_0}=J_k[u_*^k]$。由此式及定理 3.4. 即得 $\underset{k\to+\infty}{\underline{\lim}} J_k[u_*^k]\leqslant \underset{k\to+\infty}{\overline{\lim}} J_k[u_*^k]\leqslant J_*$. 另方面考虑到定理 5.2. 即得

$$\lim_{k\to+\infty} J_k[u_*^k]=J[u_*]=J_*,$$

最后，从定理 5.1. 知，式（6.2）和（6.3）成立。证毕。

7. 例

例1. 易检验，通常所见的及［1］、［2］所定义的外（内）罚函数列，均为本文的特例。

例2. 记 $g(x)=\max\limits_{l}\{g_l(x)\}$，此处 $g_l(x)$，$l=1,\cdots,m$，是 $x=(x^1,\cdots,x^n)$ 的 $c^{(1)}$ 类函数，取域 $B\triangleq\{x|g(x)\leqslant 0\}$，$B_k\triangleq\{x|g(x)\leqslant\frac{3}{k}\}$，$O=R^n$，并取

$$p_k(t,x,u)=\begin{cases}\dfrac{Rk}{2d_k}g, & \text{当 } 0\leqslant g\leqslant\dfrac{2}{k},\\ -\dfrac{Rk}{2d_k}\left(g-\dfrac{4}{k}\right), & \text{当 } \dfrac{2}{k}\leqslant g\leqslant\dfrac{4}{k},\\ 0, & \text{其余的 } g,\end{cases}$$

其中 d_k 是曲面 $g(x)=\frac{1}{k}$ 与曲面 $g(x)=\frac{3}{k}$ 之间的距离，$R=2K[2\overline{M}(b-a)+\rho]$（参见式（2.7）），$K$ 是引理 2.1. 中的常数。易见，对任定的闭集 $D\subset O\backslash B$，当 $k\to+\infty$ 时 $\min\limits_{(t,x,u)\in \dot{I}\times D\times U} p_k(t,x,u)\to 0$，因之 $\{p_k(\cdot)\}$ 不是通常及［1］、［2］等所定义的外罚函数。易查得 $\{p_k(\cdot)\}$ 满足定义 3 中的性质〈1〉、〈2〉及加强了的性质〈2〉，利用引理 2.1. 等还可查得满足性质〈3〉，故 $\{p_k(\cdot)\}$ 是本文的强外罚函数，其图形见图 1。

例3. 域 O、B 和 $g(x)$ 仍如上例，取 $B_k\triangleq\{x|g(x)\leqslant\frac{1}{k}\}$，

$$p_k(\cdot)=\begin{cases}\dfrac{Rk}{2d_k}\left(g+\dfrac{2}{k}\right), & \text{当 } -\dfrac{2}{k}\leqslant g\leqslant 0,\\ -\dfrac{Rk}{2d_k}\left(g-\dfrac{2}{k}\right), & \text{当 } 0\leqslant g\leqslant\dfrac{2}{k},\\ 0, & \text{其余的 } g,\end{cases}$$

d_k 是曲面 $g(x)=-\dfrac{1}{k}$ 与曲面 $g(x)=\dfrac{1}{k}$ 之间的距离，R 与上例同。显然在 $x\in\partial B$ 上 $p_k(\cdot)\neq+\infty$，故不是通常的内罚函数和外罚函数。可验证是本文的内罚型外罚函数，其图形见图 2 。

例 4. 域 O、B 和 $g(x)$ 仍如上例，取

$$p_k(\cdot)=\begin{cases}\dfrac{Rk}{2d_k}\left(g+\dfrac{4}{k}\right), & \text{当} -\dfrac{4}{k}\leqslant g\leqslant -\dfrac{2}{k},\\ -\dfrac{Rk}{2d_k}g, & \text{当} -\dfrac{2}{k}\leqslant g\leqslant 0,\\ 0, & 0\leqslant g,\end{cases}$$

此处 d_k 是曲面 $g(x)=-\dfrac{1}{k}$ 与 $g(x)=-\dfrac{3}{k}$ 之间的距离。可验证 $\{p_k(\cdot)\}$ 不是通常的内罚函数而是本文扩展了的内罚函数。其图形见图 3 。

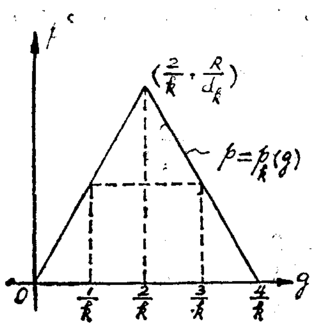

图 1.

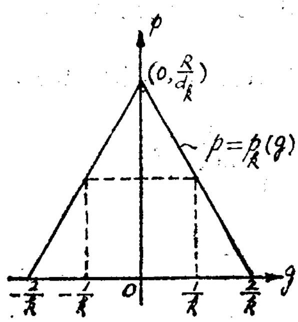

图 2

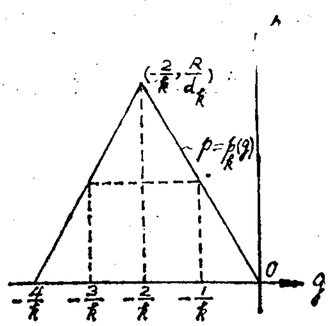

图 3

参 考 文 献

[1] D. L. Russell, Penalty functions and bounded phase coordinate control, J. SIAM Control Ser. A. Vol, 2, №3, 1965.

[2] K. Okamura, Some mathematical theory of penalty method for solving optimum control problems, J. SIAM Control Ser. A, Vol. 2. №3, 1965.

[3] J. Cullum, Penalty functional and nonconvex continuous optimal control problems in ≪Computing method in optimization problems—2≫, Academic Press, New York, 1969.

[4] E. Polak, Computational methods in optimization, Academic

Press, New York and London, 1971。

[5] 陈祖浩，解相坐标有界最优控制问题的罚函数方法，山大学报，第一期，1979。

[6] 陈祖浩，罚函数方法解最优控制问题的数学理论，《现控理论及应用1979年全国学术会议论文集》，(待出版)。

[7] E. B. Lee & L. Markus, Optimal control for nonlinear processes, Arch. Rational Mech. Anal, Vol. 8, №1 (1961).

The Mathematical Theory of Penalty Function Methods of Optimal Processes

Chen Tsu-hau

(Shandong University)

In this paper the main contents are:

Definition. $\{p_k(t, x, u)\}$ *is called a seqence of exterior (interior) penalty functions, if*

(1) $p_k(\cdot)\geqslant 0$ *and continuous on* $I\times O\times U$ $(I\times\mathring{B}\times U)$[*], *where* $I=[a, b]$, *open set* $O\supset R$, U *is a compact, convex set of* R^r, $\mathring{B}$ *is the interior of close set* $B\subset R^n$。

(2) *given any compact set* $D\subset\mathring{B}$, *for each absolutely continuous function* $x(t)\in D$ & $u(t)\in U$, $a_1\leqslant t\leqslant b_1$, *we have*

$$\lim_{k\to+\infty}\sup_{(x,\ u)}\int_{a_1}^{b_1}p_k(t,\ x(t),\ u(t))\,dt=0. \qquad (2.5)$$

(3) *exist closed sets* $\{B_k\}: B_{k+1}\subset B_k\subset O$, $B=\bigcap_k B_k$, $B_k\neq B$ $(B=B_k)$, *such that for each absolutely continuous function* $x(t)\in\mathring{B}_k(\mathring{B})$, $a_1\leqslant t<c_1$, $x(c_1)\in\partial B_k$ (∂B) & $u(t)$, $a_1\leqslant t\leqslant c_1$, *specified as* ⟨2⟩, *we have*

$$\int_{a_1}^{c_1}p_k(t,\ x(t),\ u(t))\,dt\geqslant\mathring{J}_*-J_o+\rho(\mathring{J}_*-J_*+\rho), \qquad (2.6)$$

where number $\rho\geqslant 0$, *and* $\mathring{J}_*$, J_*, J_o *is defined by* (2.4)。

A seqence of exterior penalty functions $\{p_k(\cdot)\}$ *is called the interior penalty*

*Generally, the statement suits the exterior and interior penalty functions, but the words or marks in the bracket only suit the interior penalty functions, and the words or marks before the bracket correspondent to the exterior penalty functions.

type, if for set B & ∂B the right-hand number of (2.6) is replaced by $\mathring{J}_* - J_* + \rho$, and it is called a sequence of strongly exterior penalty functions if for $D=B$ the property (2) i.e. formula (2.5) is satisfied. Generally, the exterior and interior penalty functions respectively contain such properties (see [1], [2]):

$$\lim_{k\to+\infty}\min_{D} p_k(\cdot)=+\infty, \text{ for every compact set } D\subset O\backslash\mathring{B} \text{ and } p_k(\cdot)\to+\infty, \int_{a_1}^{c_1}$$

$p_k(\cdot)dt=+\infty$ as $x(t)\to x(c_1)\in\partial B$, but in our paper all these properties are replaced by property(3), which simplifies and generalizes the concept of penalty functions, and shows that the unified character of penalty functions is in the neighborhood of B. Thus we may take $p_k(\cdot)=0$ only just in the enough small neighborhood of ∂B such that $\{p_k(\cdot)\}$ may qicken the rate of $\mathscr{P}_{ko}(\mathscr{P}_k)\to\mathscr{P}$.

Problem $\mathscr{P}$ or $\mathscr{P}$: Find a solution(u_*, x_*) of systems (2.1), (2.3) such that $x_*(t)\in B$, $a_*\leqslant t\leqslant b_*$, & $J[u_*]=J_*$, Problem $\mathscr{P}_{ko}(\mathscr{P}_k)$ or $\mathscr{P}_{ko}(\mathscr{P}_k)$: Find a solution (u_*^k, u_*^k) of systems (2.1), (2.10) such that $x_*^k(t)\in O(\mathring{B})$ & $J_k[u_*^k]=J_{ko}(J_{k*})$ (see formulas (2.11), if $x_*^k(t)\in O(\mathring{B})$, then $x_*^k(t)$ is called unconstrained. $\mathscr{P}_{ko}(\mathscr{P}_k)\to\mathscr{P}$ as $k\to+\infty$: exist a solution (u_*^k, x_*^k) of $\mathscr{P}_{ko}(\mathscr{P}_k)$ such that the formulas(6.2) −(6.4) are safisfied. Problem $\mathscr{P}$ is said to have a solution $(\hat{u}, \hat{x})$ approximated from $\mathring{B}$ if there is a solution set $\{\hat{u}_i, \hat{x}_i\}$ of system (2.1), (2.3) such that the formula (6.1) is satisfied.

Theorem 6.1. In order that $\mathscr{P}$ has a solution approximated from $\mathring{B}$, the necessary and sufficient condition is $\mathring{J}_*=J_*$.

Theorem 6.2. & 6.3. Let $\{p_k(\cdot)\}$ be a seqence of exterior (interior) penalty functions. In order that $\mathscr{P}_{ko}$ ($\mathscr{P}_k$) has an unconstrained solution and approximate to $\mathscr{P}$, the sufficient condition is: 1°. $\mathring{J}_*=J_*$, or 2°. $\mathring{J}_*=J_0$, or 3°. has a solution approximated from $\mathring{B}$.

Theorem 6.4. & 6.6. Let $\{p_k(\cdot)\}$ be a seqence of exterior penalty functions of interior penalty type (interior penalty functions). In order that $\mathscr{P}_{ko}$ ($\mathscr{P}_k$) $\to\mathscr{P}$ as $k\to+\infty$, the necessary and sufficient condition is: 1°. $\mathring{J}_*=J_*$, or 2°. $\mathscr{P}$ has a solution approximated from $\mathring{B}$.

Theorem 6.8. If $\{p_k(\cdot)\}$ is a seqence of strongly exterior penalty functions, then $\mathscr{P}_{ko}$ approximates to $\mathscr{P}$.

Paper [2] only obtained the third sufficient condition of Theorem 6.2. & 6.3. and it is not easy to check it up, while Theorem 5.1. in this paper gives a quantitative rule. In order to prove $\mathscr{P}_{ko}\to\mathscr{P}$, paper [3] added an assumption, i. e. $\{u_*^k\}$ is abosolutely convergent, but this assumption is very difficult to realize, while here Theorem 6.8. only needs $\{p_k(\cdot)\}$ to be a seqence of strongly exterior penalty *functions, and it is very useful in practice. we sort out the penalty functions into six type, in order that* $\mathscr{S}_{ko}(\mathscr{S}_k) \to \mathscr{S}$ *we give some sufficient and necessary conditions (see Theorem 6.4.—6.7.), which are carried out here for the first time. Thus, our paper clearly explains under what case the exterior or interior penalty functions may be chosen.*

We take the unified method to define the concepts and to prove the theorem for the exterior and interior penalty functions, and show the important relations between $\mathfrak{J}_*$, J_*, J_o, J_{ko}, J_{k*} *(see Theorem 3.4. or formula (5.4)), and what is more we obtain the computational formulas of* $\mathfrak{J}_*$ & J_* *from Theorem 5.3. & Theorem 6.8.*