范大茵 陈永华 编

概率论与数理统计

（第二版）

浙江大学出版社

概率论与数理统计

（第二版）

范大茵　陈永华　编

浙江大學出版社

图书在版编目（CIP）数据

概率论与数理统计／范大茵，陈永华编．—2版．
杭州：浙江大学出版社，2003.6
ISBN 7-308-03323-6

Ⅰ.概...　Ⅱ.①范...②陈...　Ⅲ.①概率论—高等学校—教材②数理统计—高等学校—教材　Ⅳ.O21

中国版本图书馆CIP数据核字（2003）第039253号

责任编辑　邹小宁
出版发行　浙江大学出版社
（杭州天目山路148号　邮政编码310028）
（网址：http://www.zjupress.com）
（E-mail：zupress@mail.hz.zj.cn）
排　　版　浙江大学出版社电脑排版中心
印　　刷　德清县第二印刷厂
开　　本　850mm×1168mm　1/32
印　　张　11.5
字　　数　309千字
版 印 次　2003年6月第2版　2006年1月第8次印刷
印　　数　40001—45000
书　　号　ISBN 7-308-03323-6/O·291
定　　价　15.00元

内容提要

本书共十章。前四章为概率论。主要内容有概率论的基本概念、一维与多维随机变量及其分布、数字特征和极限定理。后六章为数理统计部分。主要内容有数理统计的基本概念、参数估计、假设检验、方差分析、回归分析、正交试验设计法。

本书叙述通俗易懂，注重应用，并有较多的例子介绍概率论与数理统计的思想和方法。

本书可作为高等院校工科、理科（非数学专业）概率论与数理统计课程的教材，同时可作为各类专业人员学习概率论与数理统计的参考读物。

第二版说明

本书自1996年第一版出版后，得到许多院校和任课教师的广泛使用，发行量超过5万册。为了适应教学的需要，我们对该书进行了修订，对第一版中的一些疏漏和不足之处作了修改或补充，同时对书中的插图、版式都作了进一步的调整，旨在提高教材质量。

限于作者水平，书中不足和错误之处敬请读者批评指正。

编者

2003年6月

前言

概率论与数理统计是研究随机现象数量规律性的一门学科。它是数学中与现实世界联系最密切、应用最广泛的学科之一。随着科学技术的进步，过去用确定性的数学形式描述的一些现象，为了得到更精确的描述，就需要使用概率论与数理统计的方法。

概率论与数理统计和其他的数学分支有着密切的联系，同时又有自己的特点。它与其他的数学分支一样有严格的数学形式，又有它独特的“概率思想”与“统计思想”。随着电子计算机技术的发展，概率论与数理统计的方法已在理、工、农、医、林等自然科学领域，以及社会、经济的各个部分都得到了卓有成效的应用。数理统计学与其他学科相结合形成了许多边缘性学科，如统计物理学、地质数学、数量经济学、医学统计、生物统计学、数量遗传学等。这些都充分说明了数理统计学的重要性。现有的概率论与数理统计教材，由于学时的限制，在数理统计部分主要讲述了参数估计和假设检验，没有介绍试验设计方法的内容，对回归分析的内容也介绍得比较少。这些实用性较强的基本内容来不及为学生所掌握，不能不说是一个缺陷。为改变这种状况，我们在不增加篇幅与学时的前提下，增加了数理统计部分实用性内容的比重，同时对概率论部分的内容进行提炼，这就是编写本书的出发点。

本书共分十章。概率论部分(第 1 章至第 4 章)，主要内容为概率论的基本概念、一维与多维随机变量及其分布、数字特征和极限定理。数理统计部分(第 5 章至第 10 章)介绍了数理统计中的基本概念、参数估计、假设检验、方差分析、一元及多元线性回归分析、逐步

回归分析和正交试验设计等内容。为了帮助读者加深理解基本内容，提高学以致用的能力，各章均配有习题，并在书末附有答案。

为便于读者理解和运用，本书在选材和叙述上力求将概念写得清晰易懂，详细介绍概率论与数理统计的思想和方法，注重应用的前提和步骤的说明。书中一部分内容能直接应用于解决实际问题，另一部分内容将为读者今后进一步学习有关课程或在实际应用方面奠定一定的基础。

本书可作为各类高等院校工科、理科（非数学专业）概率论与数理统计课程的教材，同时可供各类专业技术人员进行生产和科学研究时参考。

在确定本书的内容时，基本上假定读者具有微积分学及线性代数的基础知识。标有“*”号的小段或用小字编排的定理证明等内容，初学时可以跳过，跳过它们并不损害全书的连贯性。本书的后三章具有相对独立性，通过适当的取舍可以适应不同学时数的教学需要。

本书的概率论部分（第 1,2,3,4 章）由范大茵编写，数理统计部分（第 5,6,7,8,9,10 章）由陈永华编写。华东师范大学茆诗松教授对全书作了认真、负责、细致的审阅，提出了许多宝贵的意见，对本书的最后形成起了重要的作用，在此特向茆诗松教授致以诚挚的感谢。同时，浙江大学盛骤教授及许多老师对本书提出了宝贵的意见，对此一并表示衷心的感谢。书中个别例题是编者在解决企业实际课题中遇到的问题，同时也引用了国内外有关书籍中的一些例题和习题，恕不一一指明出处，在此一并向有关人员致谢。

书中的不足之处，尚请读者不吝指正。

编者

1994 年 12 月

目 录

第1章

概率论的基本概念

概率论与数理统计是研究随机现象的统计规律性的一门学科.人们在实践中经常会遇到各种随机现象,例如丢一枚硬币,可能是正面朝上也可能是反面朝上,事先无法断言;又如观察某机床加工出来的零件,可能是正品也可能是次品,在观察之前无法肯定哪个结果会出现;又如观察某地区1月份的最高温度及最低温度,在观察之前也无法断言最高温度及最低温度一定是多少;又如观察某车站在某一时间区间内的候车人数,可能0个,可能1个……事先无法肯定;又如观察某一工厂生产的灯泡的寿命,可能大于1000小时,也可能小于1000小时,事先无法确定其寿命一定是多少等,这一类现象,尽管我们在每次试验之前无法断言将得到哪一种结果,但是如果进行大量的重复的观察,我们会发现其出现的结果还是有一定的规律可循的.如丢钱币的问题,如果钱币确实均匀的话,那么当投掷次数很多时,将会发现大约有一半的次数出现正面.又如测量某物体的长度,如果测量多次的话,一般来说测量值会在某一数值附近较为集中,而离该数值较远的数据往往较少.我们将这种规律称为统计规律性.

随着科学技术的不断发展以及设计及测量精度的不断提高,随机现象受到人们越来越多的重视,概率论与数理统计的理论和方法得到了越来越广泛的应用.概率论与数理统计的应用几乎遍及所有科学技术领域以及工农业生产和国民经济各个部门.例如气象预报、水文、地震预报、元件和系统可靠性评估、产品抽样验收方案的制订、寻求最佳生产条件的试验设计、产品寿命预测等.概率论与数理统计

与其他数学分支也有着密切的联系，概率论与数理统计的方法正向许多基础学科、工程学科渗透. 概率论与其他学科相结合发展了许多边缘学科，如生物统计、统计物理、地质、数学等. 概率论与数理统计也是可靠性理论、信息论、控制论等重要学科的理论基础.

1.1 随机试验、样本空间、随机事件

1.1.1 随机试验、样本空间

所谓随机试验是指具有以下三个特点的试验：

(1)试验可以在相同的条件下大量重复进行.

(2)每次试验的可能结果不止一个，且在试验之前已知试验的所有可能结果.

(3)在每次试验之前无法断言哪一个结果会出现，但若进行大量重复试验的话，其可能结果出现又有一定的统计规律性.

下面列举一些随机试验的例子.

E_1：丢一颗骰子①，观察所得点数.

E_2：从一副扑克牌(52 张)中任选 13 张牌，观察得牌情况.

E_3：向平面上某目标射击，观察子弹弹着点的位置.

E_4：观察某电话交换台，在某时间区间内接到的呼叫次数.

E_5：从一批灯泡中任取一只，观察其寿命.

E_6：丢两颗骰子，观察所得点数.

大家也可以自己列举一些随机试验的例子. 本书以后提到的试验都指随机试验.

对于随机试验，虽然在试验之前我们无法断言哪一个结果会出现，但是对于所有可能出现的试验结果我们是预先知道的，我们就将试验 E 的所有可能结果组成的集合称为试验 E 的**样本空间**，记为 S. 样本空间的每个元素，即试验的每个可能结果，称为**样本点**.

---

① 骰子为正六面体，其各面分别标有数字 1,2,3,4,5,6.

若记上面列举的例子中随机试验 E_k 的样本空间为 $S_k(k=1,2,3,4,5,6)$，那么容易得到：

$$S_1 = \{1,2,3,4,5,6\}.$$

S_2 = 52 张牌中选 13 张牌的各种组合的全体，共有 $\binom{52}{13}$ 个元素.

$$S_3 = \{(x,y) \mid -\infty < x < +\infty, -\infty < y < +\infty\}.$$

$$S_4 = \{0,1,2,3,\cdots\}.$$

$$S_5 = \{t \mid 0 \leqslant t < +\infty\}.$$

$$S_6 = \{(x,y) \mid x = 1,2,\cdots,6, y = 1,2,\cdots,6\}.$$

1.1.2 随机事件

有了样本空间的概念就可以定义事件. 先看如下例子.

例 1 将一颗骰子连掷两次，依次记录所得点数，则所有可能出现的结果是：

(1,1)，	(1,2)，	(1,3)，	(1,4)，	(1,5)，	(1,6)，
(2,1)，	(2,2)，	(2,3)，	(2,4)，	(2,5)，	(2,6)，
(3,1)，	(3,2)，	(3,3)，	(3,4)，	(3,5)，	(3,6)，
(4,1)，	(4,2)，	(4,3)，	(4,4)，	(4,5)，	(4,6)，
(5,1)，	(5,2)，	(5,3)，	(5,4)，	(5,5)，	(5,6)，
(6,1)，	(6,2)，	(6,3)，	(6,4)，	(6,5)，	(6,6).

把这 36 个可能结果作为样本点，其全体构成了样本空间，每做一次试验这 36 个样本点中必有一个出现且仅有一个出现. 在许多场合，我们常常对 S 的某些子集感兴趣，并将这些子集称之为事件. 如

A：两次投掷所得点数之和为 8.

B：两次投掷所得点数相等.

显然事件 A 发生等价于下列样本点之一出现：(2,6)，(3,5)，(4,4)，(5,3)，(6,2). 记为

$$A = \{(2,6),(3,5),(4,4),(5,3),(6,2)\},$$

A 是样本空间 S 的子集.

易知事件 B 的发生等价于下列样本点之一出现：(1,1)，(2,2)，(3,3)，(4,4)，(5,5)，(6,6). 记为：

$$B=\{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(6,6)\},$$

B 是样本空间的子集.

一般，我们称随机试验 E 的样本空间的子集为 E 的**随机事件**，简称**事件**. 在每次试验中，当且仅当这一子集中的某一个样本点出现时就称这一**事件发生**.

特别，仅由一个样本点组成的单点集称为**基本事件**.

样本空间 S 包含所有的样本点，它是 S 自身的子集，在每次试验中它总是发生的，称为**必然事件**. 空集 $\varnothing$ 不包含任何样本点，它也是 S 的子集，它在每次试验中总不发生，称为**不可能事件**.

下面讲述事件的关系和运算.

设试验 E 的样本空间是 S，而 $A,B,A_k(k=1,2,3,\cdots)$ 都是 S 的子集.

1° 若 $A\subset B$，则称事件 B **包含**事件 A，亦称事件 A 是事件 B 的**子事件**，亦即事件 A 的发生必导致事件 B 的发生.

2° 若 $A\subset B$ 且 $B\subset A$，则称事件 A 与事件 B **相等**，记为 $A=B$.

3° 事件 $A\cup B=\{x|x\in A$ 或 $x\in B\}$，称为事件 A 与事件 B 的**和事件**，当且仅当事件 A 或事件 B 至少有一个发生时，和事件 $A\cup B$ 发生.

类似地，对于 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$，定义 $\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i$ 为这 n 个事件的和事件，即当且仅当 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 中至少有一个发生时，和事件 $\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i$ 发生.

对于事件列 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$，可类似定义这一列事件的和事件 $\bigcup\limits_{n=1}^{+\infty}A_n$.

4° 事件 $A\cap B=\{x|x\in A$ 且 $x\in B\}$，称为事件 A 与事件 B 的**积事件**，即当且仅当事件 A 和事件 B 都发生时，积事件 $A\cap B$ 发

生. 积事件 $A\cap B$ 也可简记为 AB.

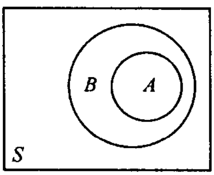
类似地,可以定义有限个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的积事件 $\bigcap\limits_{i=1}^{n}A_i$,以及定义事件列 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$ 的积事件 $\bigcap\limits_{n=1}^{+\infty}A_n$.

5° $A-B=\{x|x\in A$ 且 $x\notin B\}$,即当且仅当 A 发生而 B 不发生时事件 $A-B$ 发生,称 $A-B$ 为事件 A 与事件 B 的**差事件**.

6° 若 $A\cap B=\varnothing$,则称事件 A 与事件 B **互不相容**,或称为**互斥的**,即若 A,B 两事件互不相容,则在每次试验中事件 A 与事件 B 决不会同时发生.

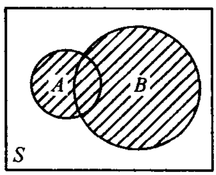
7° 若 $A\cup B=S$ 且 $A\cap B=\varnothing$,则称事件 A 与事件 B 互为**逆事件**. 亦称 A,B 互为**对立事件**,记为 $A=\overline{B}$ 或 $B=\overline{A}$. 若 A,B 互为对立事件,则每做一次试验,事件 A 或事件 B 中总有一个且仅有一个事件要发生.

用图 1-1 至图 1-6 可较直观地表示事件之间的关系及运算.



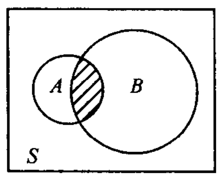
$A\subset B$

图1-1



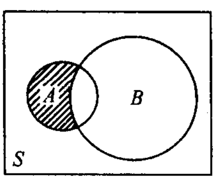
$A\cup B$

图1-2



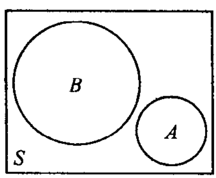
$A\cap B$

图1-3



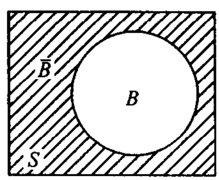
$A-B$

图1-4



$A\cap B=\varnothing$

图1-5



$B\cup\overline{B}=S,\ B\cap\overline{B}=\varnothing$

图1-6

例如图 1-3 中，长方形表示样本空间 S，小圆表示事件 A，大圆表示事件 B，则两圆的公共部分，即图 1-3 的阴影部分表示积事件 $A \cap B$.

在进行事件运算时经常要用到下面的定律：

设 A,B,C 是事件，则有

交换律：$A \cup B = B \cup A$，　$A \cap B = B \cap A$；

结合律：$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$，

$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$；

分配律：$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$，

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$；

德·摩根律：$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$，

$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

例 2　将一颗骰子投掷两次，依次记录所得点数，设 A 为"所得点数之和为 8"的事件，B 为"所得数对中至少有一个为 2 点"的事件，C 为"所得数对中两数相等"的事件，D 为"两数之和小于或等于 3"的事件，则

$$A = \{(2,6),(3,5),(4,4),(5,3),(6,2)\};$$

$$B = \{(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6),(1,2),(3,2),(4,2),(5,2),(6,2)\};$$

$$C = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(6,6)\};$$

$$D = \{(1,1),(1,2),(2,1)\}.$$

且　$C \cup D = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(6,6),(1,2),(2,1)\}$

= "所得两数相等或两数之和小于等于 3".

$A \cap B = \{(2,6),(6,2)\}$

= "所得两数之和为 8 且两数中至少有一个为 2".

$B \cap C = \{(2,2)\}$

= "所得数对中至少有一个为 2 且两数相等".

$A - B = \{(3,5),(4,4),(5,3)\}$

= "所得数对两数之和为 8 但两数中没有一个为 2".

$$AD = \varnothing$$

$=$"所得数对中两数之和为 8 且两数之和小于或等于 3".

例 3 设某系统由元件 1,2,3,4,5,6 按图 1-7 所示连接而成,用 A_i 表示第 i 个元件正常工作的事件($i = 1,2,3,4,5,6$),用 B 表示系统正常工作的事件,则

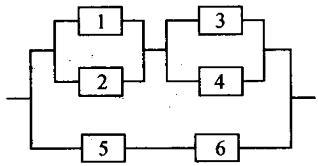


图 1-7

$$B = [(A_1 \cup A_2) \cap (A_3 \cup A_4)] \cup (A_5 \cap A_6).$$

例 4 设有随机事件 A,B,C,则

(1)B 发生但 A 不发生的事件为 $B - A = B\overline{A}$.

(2)A 与 B 至少发生其一的事件为 $A \cup B$.

(3)A 与 B 至少有一个不发生的事件为 $\overline{A} \cup \overline{B} = \overline{AB}$.

(4)A 发生,B 与 C 都不发生的事件为 $A\overline{B}\,\overline{C}$ 或 $A(\overline{B \cup C})$.

(5)A,B,C 中至少有两个发生的事件为

$$AB \cup AC \cup BC,$$

或 $$AB\overline{C} \cup A\overline{B}C \cup \overline{A}BC \cup ABC.$$

(6)A,B,C 中恰有一个发生的事件为

$$A\overline{B}\,\overline{C} \cup \overline{A}B\overline{C} \cup \overline{A}\,\overline{B}C.$$

(7)A 发生但 B 与 C 中至少有一个不发生的事件为

$$A(\overline{B} \cup \overline{C}) = A\,\overline{BC}.$$

1.2 频率与概率

1.2.1 频率

设随机事件 A 在 n 次试验中发生了 n_A 次,则称 n_A 是 A 在这 n 次试验中发生的**频数**,称比值 n_A/n 为 A 在这 n 次试验中发生的**频率**,记作 $f_n(A) = n_A/n$. 频率 $f_n(A)$ 有如下性质:

(1)$0 \leqslant f_n(A) \leqslant 1$;