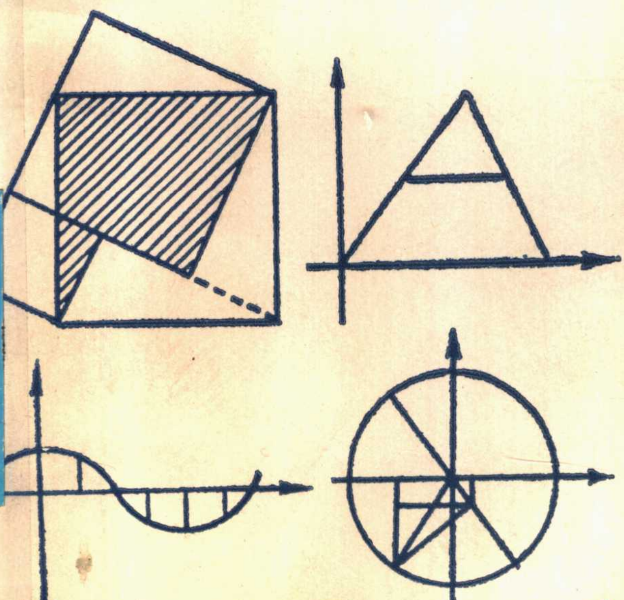
DINGLIDE DUOZHONGZHENGMING
GONGSHIDE DUOZHONGTUIDAO

# 定理的多种证明
# 公式的多种推导

王岳庭　程其坚



内蒙古人民出版社

# 定理的多种证明
# 公式的多种推导

王岳庭　程其坚

内蒙古人民出版社

1985・呼和浩特

**定理的多种证明·公式的多种推导**
王岳庭　　程其坚
＊
内蒙古人民出版社出版
呼和浩特市新城西街82号
内蒙古新华书店发行　凉城县印刷厂印刷
开本：787×1092 1／32 印张：10.25 字数：218千
1985年11月第一版　　1986年 6月第 1 次印刷
印数：1—6,350册
统一书号：7089·376　每册：1.50元

# 前 言

这本书叫做《定理的多种证明、公式的多种推导》，书名中按上了两个“多”字，可见其基本特点，就是“多”。试图通过多种证明和多种推导，来加深对定理和公式的理解；进一步掌握定理、公式之间，各种基本概念之间的内在联系；促进基础知识的融汇贯通；拓广思路，提高解题的技能、技巧。从而对于培养能力、发挥创造性有所裨益。这就是我们写这本书的基本思想和衷心愿望。

为了使这本参考书与课本配合得密切一些，这里的定理和公式是从现行中学数学课本中有重点地挑选出来的。是按重要的、常见常用的或者比较难懂难证的来挑选的。安排的顺序与课本也基本相同。课本上的证明和推导方法均不列入，那是为了避免重复。这里的证明和推导方法中有一些方法，往往用到了后面的知识。但是每一个定理或公式的证明和推导方法中总有一、二种只利用到它前面的知识。因此，在校的同学只要学到了这个定理，那么本书中的证法，总有一、二种是看得懂的。暂时还看不懂的那些证法，不妨跳过去。等学过有关的知识后，回过头来再看就行了，如果参阅本书，进行全面的总复习，那么从头到尾都能看得懂，而不会遇到什么大的困难。有一个例外，那就是，本书最后一章不在教材范围以内，但其内容是常见常用的，而且对中学来说是有力的工具，我们就采用了。在学好了前几章的基础

上，这一章的内容还是容易掌握的。

众所周知，学习数学总要看懂一些例题，解答一定数量的练习题，才能达到自觉的理解，自觉的运用以及熟练巩固的要求，我们认为例题和习题在课本里已基本上配备齐全而且数量足够。我们还认为，如果本书真能帮助读者提高能力，激发创造性，解答习题数量的多少，不起什么关键性的作用。因此，为了避免加重负担，例题和习题，本书概不列入。

一个定理或公式的证明或推导方法，搜集得多了以后，往往使人觉得五花八门、零乱不堪。因此，我们尽可能概括出一个统一的证法或统一的思路，以求完整。

本书中大部分方法，只利用中学课本以内的知识，也有少数方法利用了高等数学工具。目的是勾通初等数学与高等数学，起一点桥梁作用。

解题方法应力求简捷、幽美、巧妙。但是不可能使每一个方法都达到这样的要求。有的方法尽管不是最简捷的，但是殊途同归，饶有兴味；而且对拓广思路、融汇贯通知识，也有好处。

本书不是系统的教科书，而是一本与教科书密切配合的参考资料，可供中学同学课外阅读；也可供具有中学文化水平的读者自学或复习之用。中学老师同志们备课时，查阅有关的章节，可以获得一些有益的参考资料，减少翻阅其它参考书的时间，从而抽出空来为四化建设培养人才多作贡献。

由于手边的资料不足，时间仓促，以及作者水平有限，本书必然还存在一些缺点和错误，希望同志们指正。

程其坚　王岳庭

一九八四年春

# 目　　录

## 第一章　平面几何

## 第二章 平面三角



## 第三章 立体几何

## 第四章　代　数



## 第五章　平面解析几何

## 第六章　常用定理和方式

# 第一章　平面几何

## §1　直线形

### 1.1　勾股定理

**在直角三角形中，斜边的平方等于两条直角边平方的和**

我国古代人把直角三角形中，直角的对边叫做“弦”；夹直角的两边中，较短的一条叫做“勾”；较长的一条叫做“股”．我国最古的一部数学书《周髀算经》载着商高回答周公的一段话：“勾广三，股修四，径隅五”意思是说一个直角三角形的三边的长是3、4、5．这是符合勾股定理的一个特殊的直角三角形．这本书上还载着陈子回答荣方的一段话：“若求邪至日者，以日下为勾，日高为股，勾股各自乘，并而开方除之，得邪至日．”这就是勾股定理的一般情形了．商高发现这一定理时约是公元前1120年。比古希腊人毕达哥拉斯（*Pythagores*，约公元前569——公元前500）早得多．所以勾股定理可以称为商高定理．

勾股定理的应用很广泛，证明方法很多．全日制十年制学校初中课本《数学》第三册，采用赵爽著《勾股方圆图注》中的方法．赵爽字君卿，相传为汉代人．他把四个全等的直角三角形拼合成为一个大的正方形和一个小正方形．这个方法可以称为拼合成正方形法．这里先

介绍几种类似的拼合证法.

**证一** 设$\triangle BCA$中；$\angle C=Rt\angle$*，$BC=a$，$CA=b$，$AB=c$（下同，不再重述）.把四个全等的$Rt\triangle BCA$，$Rt\triangle ADF$ $Rt\triangle FHE$和$Rt\triangle EKB$拼合成为正方形$CDHK$，如图1.1.1.

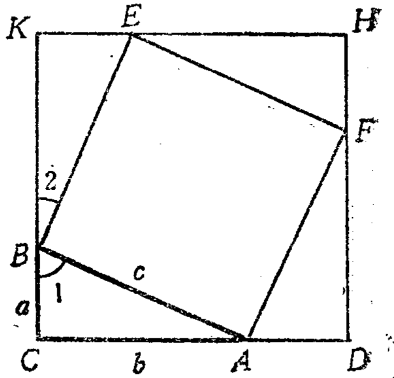



图1.1.1

因为$\angle 1+\angle 2=Rt\angle$，所以$\angle ABE=Rt\angle$，同理$\angle BEF=\angle EFA=\angle FAB=Rt\angle$.

又$AB=BE=EF=FA=c$，所以，$ABEF$是正方形.

$S_{\square CDHK}=(a+b)^2$，$S_{(\square ABEF+4Rt\triangle)}=c^2+2ab$，

但是 $S_{\square CDHK}=S_{(\square ABEF+4Rt\triangle)}$

所以 $(a+b)^2$

$=c^2+2ab$

从而得到：

$a^2+b^2=c^2$.

**证二** 四个全等的直角三角形$BCA$，$AMB$，$BNF$和$FKB$以及正方形$ADLM$，$HLNF$拼合成一个大的正方形$CDHK$如图1.1.2.

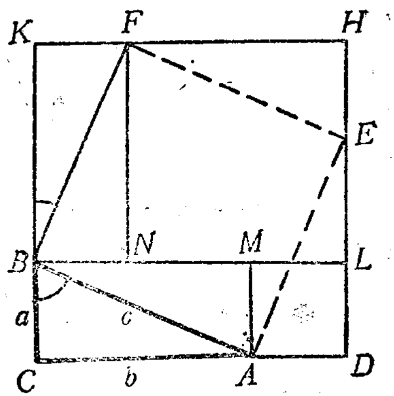



图1.1.2

* "Rt∠"表示直角.表示一个直角三角形ABC时，通常也可记做Rt△ABC.

在$DH$上取点$E$，使$HE=BC=a$，则$Rt\triangle EHF$和$Rt\triangle ADE$都与$Rt\triangle BCA$全等．而且$ABFE$是正方形，它的边长等于$c$．

$S_{\square CDHK}=2ab+a^2+b^2$，$S_{\square ABFE}=c^2$，

$$S_{(Rt\triangle BCA+Rt\triangle ADE+Rt\triangle EHF+Rt\triangle EKH)}=4\cdot\frac{ab}{2}$$

$$=2ab,$$

然后

$$S_{\square ABFE}=S_{\square CDHK}-S_{(Rt\triangle BCA+Rt\triangle ADE+Rt\triangle EHF+Rt\triangle EKB)}$$

所以，　　　$c^2=a^2+b^2$．

还有拼合成其他图形的证明方法．请看证三——证十七

**证三**　用两个全等的直角三角形$ABC$，$BDE$拼合成为图1.1.3那样的多边形$ABEDC$．

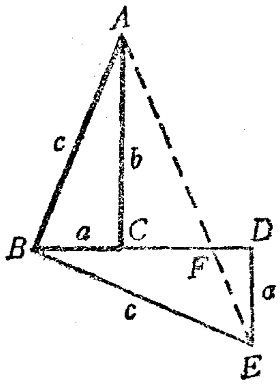


图1.1.3

连结$AE$，交$BD$于$F$，则$Rt\triangle DEF\backsim Rt\triangle CAF$．从而有

$$\frac{DF}{CF}=\frac{DE}{CA}=\frac{a}{b},$$

$$\frac{DF+CF}{CF}=\frac{a+b}{b}.$$

而$DF+CF=DC=b-a$．所以，$CF=b(b-a)/(a+b)$．类似地，求得　$DF=a(b-a)/(a+b)$．

$$S_{多边形ABEDC}=S_{(Rt\triangle ABC+Rt\triangle BDE)}=ab. \quad (1)$$

另一方面，又有

$$S_{多边形ABEDC}=S_{Rt\triangle ABE}+S_{Rt\triangle DEF}-S_{Rt\triangle CAF}$$

$$=\frac{c^2}{2}+\frac{a^2(b-a)}{2(a+b)}-\frac{b^2(b-a)}{2(a+b)}=\frac{c^2}{2}-\frac{(b-a)^2}{2}. \quad (2)$$

比较（1）和（2）两式，得到：

$$ab=\frac{c^2}{2}-\frac{(b-a)^2}{2}.$$

由此立即得到：$c^2=a^2+b^2$.

**证四** 用两个全等的$Rt\triangle ABC$和$Rt\triangle EBD$拼合成为图1.1.4的四边形$ABEF$.

$\triangle EFC\backsim\triangle ABC$，故有

$$\frac{EF}{AB}=\frac{FC}{BC}=\frac{CE}{CA},$$

或者$\frac{EF}{c}=\frac{FC}{a}=\frac{c-a}{b}$.

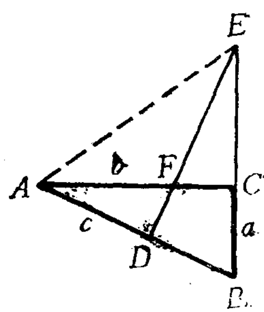


图1.1.4

所以，$EF=c(c-a)/b$,

$FC=a(c-a)/b$.

$$S_{\triangle ABC+\triangle EFC}=\frac{ab}{2}+\frac{a(c-a)^2}{2b}=\frac{ab^2+a(c-a)^2}{2b}$$

$$S_{\triangle ABE-\triangle AFE}=\frac{bc}{2}-\frac{c(c-a)^2}{2b}=\frac{b^2c-c(c-a)^2}{2b}.$$

然而，

$$S_{\triangle ABC+\triangle EFC}=S_{\triangle ABE-\triangle AFE}=S_{四边形ABEF},$$

于是得到：

$$\frac{ab^2+a(c-a)^2}{2b}=\frac{b^2c-c(c-a)^2}{2b}.$$

化简之，便得到：$c^2=a^2+b^2$ .

**证五** $Rt\triangle ABC\cong Rt\triangle EDC$ .

延长$ED$，交$AB$于$F$ . 则$EF\perp AB$ .

因为$Rt\triangle EBF\backsim Rt\triangle ABC$，故有

$$BF=a(a+b)/c .$$

从而$AF=c-a(a+b)/c$

$$=\frac{c^2-a(a+b)}{c} .$$

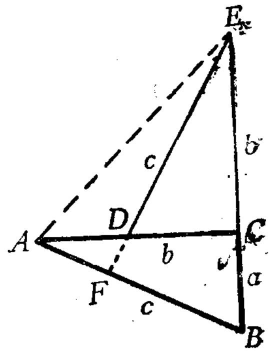



图1.1.5

$$S_{\triangle ABE}=\frac{1}{2}BE\cdot AC=\frac{1}{2}\cdot b(a+b),$$

$$S_{\triangle ADE}=\frac{1}{2}DE\cdot AF=\frac{1}{2}[c^2-a(a+b)] .$$

于是，

$$S_{(\triangle ABE-\triangle ADE)}=\frac{1}{2}[(a+b)^2-c^2] .$$

然而，

$$S_{四边形ABED}=S_{(\triangle ABE-\triangle ADE)}=S_{(\triangle ABC+\triangle EDC)}=ab .$$

所以，

$$\frac{1}{2}[(a+b)^2-c^2]=ab .$$

化简之，即得： $c^2=a^2+b^2$ .

**证六** 如图1.1.6，直角三角形$ABC$与$EAD$全等 . 由$\triangle EFA\backsim\triangle ABC$，求得： $EF=c^2/b$，$AF=ca/b$ .

又 $CF=AC-AF=b-\frac{ca}{b}=(b^2-ca)/b$ .

$S_{梯形BCAE}=\dfrac{b(c+a)}{2}$. (1)

$S_{(\triangle BEF+\triangle EFA+\triangle BFC)}$

$=\dfrac{c^2(c-a)}{2b}+\dfrac{c^2a}{2b}+\dfrac{a(b^2-ca)}{2b}$ (2)

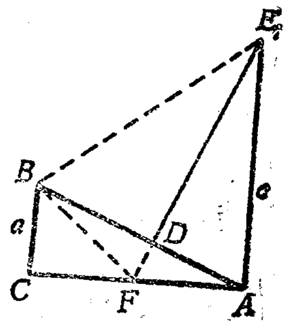


图1.1.6

（1）和（2）两式的左边相等，所以，

$$\frac{b(c+a)}{2}=\frac{c^2(c-a)}{2b}+\frac{c^2a}{2b}+\frac{a(b^2-ca)}{2b}.$$

化简之，便得到：$c^2=a^2+b^2$.

**证七** 用两个全等的$Rt\triangle ABC$和$Rt\triangle ABD$拼合成为筝形$ACBD$. 它内接于以$AB$为直径的圆周. 连接$CD$，交$AB$于$E$. 令$DE=x$，$BE=y$，则有$AE=c-y$. ∵ $\triangle DBE \backsim \triangle ABC$

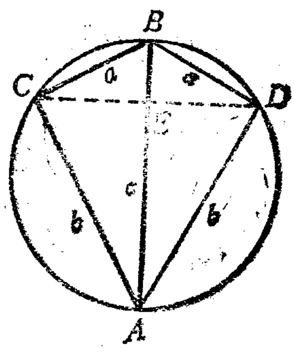


图1.1.7

∴ $\dfrac{x}{b}=\dfrac{y}{a}$,

$x=\dfrac{b}{a}y$ (1)

∵ $\triangle ADE \backsim \triangle ABC$,

∴ $\dfrac{b}{c}=\dfrac{c-y}{b}$, $y=\dfrac{c^2-b^2}{c}$ (2)

（2）代入（1），$x=\dfrac{b(c^2-b^2)}{ca}$.

$S_{筝形}=S_{(\triangle ABC+\triangle ABD)}=ab$.

另一方面，$S_{筝形}=AB\cdot DE=cx=\dfrac{b(c^2-b^2)}{a}$.

所以，$ab=\dfrac{b(c^2-b^2)}{a}$. 从而$c^2=a^2+b^2$.

**证八** 同证七,因筝形$ACBD$内接于圆周（如图1.1.7），由托勒密定理，$AC\cdot BD+BC\cdot AD=AB\cdot CD$（参阅第六章）就是 $ab+ab=c\cdot(2x)$ （$\because$ $CD=CE+ED=2ED=2x$）.

亦即 $ab=\dfrac{b(c^2-b^2)}{a}$. $\therefore$ $c^2=a^2+b^2$.

**证九** （美国，嘉尔斐尔德1882）把两个全等的$Rt\triangle ABC$和$Rt\triangle BEK$拼合如图1·1·8（与图1·1·1比较）.

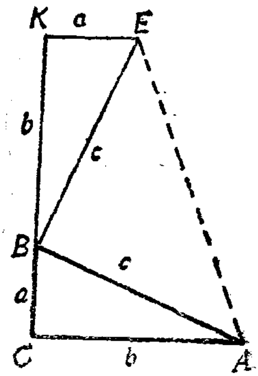


图1.1.8

$$S_{梯形ACKE}=\frac{(a+b)^2}{2},$$

另一方面，$S_{梯形ACKE}$

$=S_{(\triangle ABC+\triangle BEK+\triangle ABE)}$

$=\dfrac{1}{2}(2ab+c^2)$.

所以，$\dfrac{(a+b)^2}{2}=\dfrac{2ab+c^2}{2}$.

化简便得到：$c^2=a^2+b^2$.

**证十** （华德罕姆）. 两个全等的$Rt\triangle ABC$和$Rt\triangle CDE$拼合如图1.1.9. $AB\perp CE$，交点为$F$. 由$Rt\triangle CBF\backsim Rt\triangle ABC$，求得：

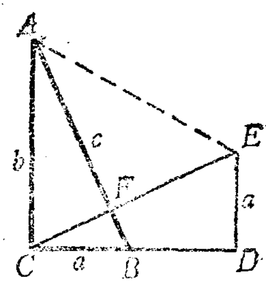


图1.1.9

$BF=a^2/c$，$CF=ab/c$，由此又得： $FE=(c^2-ab)/c$，$FA=(c^2-a^2)/c$。

$$S_{梯形ACDE}=\frac{b(a+b)}{2},$$

$$S_{(\triangle ABC+\triangle CDE+\triangle AEF-\triangle CBF)}=\frac{1}{2}\left[2ab+\frac{(c^2-ab)(c^2-a^2)}{c^2}-\frac{a^3b}{c^2}\right].$$

而 $S_{梯形ACDE}=S_{(\triangle ABC+\triangle CDE+\triangle AEF-\triangle CBF)}$。

所以，

$$\frac{b(a+b)}{2}=\frac{1}{2}\left[2ab+\frac{(c^2-ab)(c^2-a^2)}{c^2}-\frac{a^3b}{c^2}\right]$$

化简后便得到：$c^2=a^2+b^2$。

**证十一** （雷布隆德1753）先把两个全等的$Rt\triangle ABC$和$Rt\triangle AFD$如图1·1·10那样拼合起来，再以$AB$和$AF$为二邻边作正方形$ABEF$·最后，分别以$BE$和$EF$为斜边，在正方形的外面作与$Rt\triangle ABC$全等的三角形$EBK$和$FEH$。延长$AC$交$EK$于$M$，则$CMKB$和$DMHF$都是正方形，边长分别是$a$和$b$。

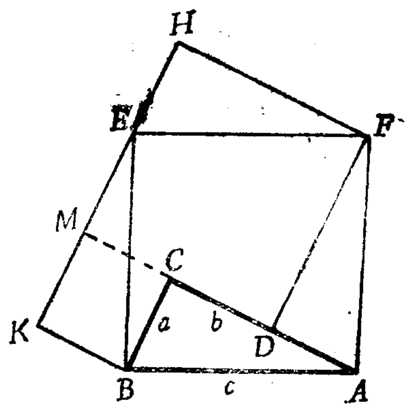


图1.1.10

$$S_{全图形}=S_{(□ABEF+\triangle EBK+\triangle FEH)}=c^2+ab,$$

另一方面，