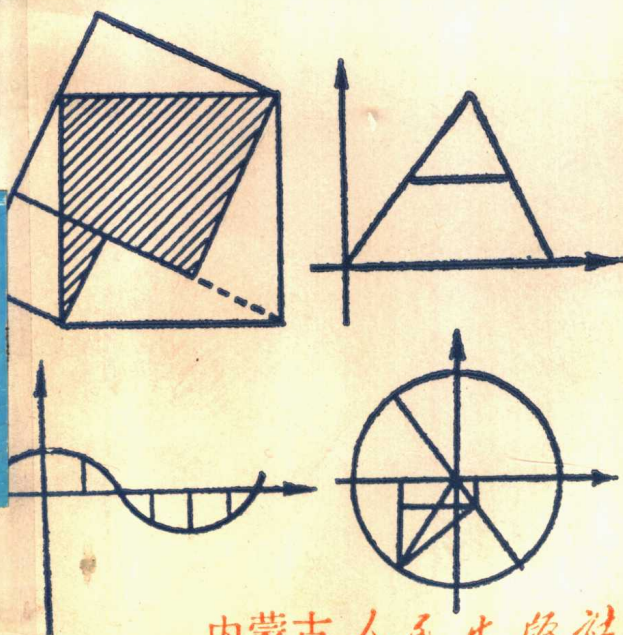


■ DINGLIDE DUOZHONGZHENGMIN
■ GONGSHI DE DUOZHONGTUIDAO

定理的多种证明 公式的多种推导

王岳庭 程其坚



内蒙古人民出版社

定理的多种证明 公式的多种推导

王岳庭 程其坚

内蒙古人民出版社

1985·呼和浩特

定理的多种证明·公式的多种推导

王岳庭 程其坚

*

内蒙古人民出版社出版

呼和浩特市新城西街82号

内蒙古新华书店发行 凉城县印刷厂印刷

开本: $787 \times 1092 \frac{1}{32}$ 印张: 10.25 字数: 218千

1985年11月第一版 1986年6月第1次印刷

印数: 1—6,350册

统一书号: 7089·376 每册: 1.50元

前 言

这本书叫做《定理的多种证明、公式的多种推导》，书名中按上了两个“多”字，可见其基本特点，就是“多”。试图通过多种证明和多种推导，来加深对定理和公式的理解；进一步掌握定理、公式之间，各种基本概念之间的内在联系；促进基础知识的融汇贯通；拓广思路，提高解题的技能、技巧。从而对于培养能力、发挥创造性有所裨益。这就是我们写这本书的基本思想和衷心愿望。

为了使这本参考书与课本配合得密切一些，这里的定理和公式是从现行中学数学课本中有重点地挑选出来的。是按重要的、常见常用的或者比较难懂难证的来挑选的。安排的顺序与课本也基本相同。课本上的证明和推导方法均不列入，那是为了避免重复。这里的证明和推导方法中有一些方法，往往用到了后面的知识。但是每一个定理或公式的证明和推导方法中总有一、二种只利用到它前面的知识。因此，在校的同学只要学到了这个定理，那么本书中的证法，总有一、二种是看得懂的。暂时还看不懂的那些证法，不妨跳过去。等学过有关的知识后，回过头来再看就行了，如果参阅本书，进行全面的总复习，那么从头到尾都能看得懂，而不会遇到什么大的困难。有一个例外，那就是，本书最后一章不在教材范围以内，但其内容是常见常用的，而且对中学来说是有力的工具，我们就采用了。在学好了前几章的基础

上，这一章的内容还是容易掌握的。

众所周知，学习数学总要看懂一些例题，解答一定数量的练习题，才能达到自觉的理解，自觉的运用以及熟练巩固的要求，我们认为例题和习题在课本里已基本上配备齐全而且数量足够。我们还认为，如果本书真能帮助读者提高能力，激发创造性，解答习题数量的多少，不起什么关键性的作用。因此，为了避免加重负担，例题和习题，本书概不列入。

一个定理或公式的证明或推导方法，搜集得多了以后，往往使人觉得五花八门、零乱不堪。因此，我们尽可能概括出一个统一的证法或统一的思路，以求完整。

本书中大部分方法，只利用中学课本以内的知识，也有少数方法利用了高等数学工具。目的是勾通初等数学与高等数学，起一点桥梁作用。

解题方法应力求简捷、幽美、巧妙。但是不可能使每一个方法都达到这样的要求。有的方法尽管不是最简捷的，但是殊途同归，饶有兴味；而且对拓广思路、融汇贯通知识，也有好处。

本书不是系统的教科书，而是一本与教科书密切配合的参考资料，可供中学同学课外阅读；也可供具有中学文化水平的读者自学或复习之用。中学老师同志们备课时，查阅有关的章节，可以获得一些有益的参考资料，减少翻阅其它参考书的时间，从而抽出空来为四化建设培养人才多作贡献。

由于手边的资料不足，时间仓促，以及作者水平有限，本书必然还存在一些缺点和错误，希望同志们指正。

程其坚 王岳庭

一九八四年春

目 录

第一章 平面几何

§ 1 直线形	(1)
1. 1 勾股定理	(1)
1. 2 勾股定理的逆定理	(30)
1. 3 三角形中位线定理	(43)
1. 4 梯形中位线定理	(47)
§ 2 相似形	(55)
2. 1 三角形内角平分线性质定理	(55)
2. 2 三角形相似的判定定理	(64)
2. 3 三角形的重心定理	(72)
2. 4 相似三角形的性质定理	(78)
2. 5 直角三角形中的射影定理	(84)
§ 3 圆	(85)
3. 1 三角形的外心定理	(85)
3. 2 三角形的垂心定理	(88)
3. 3 三角形的内心定理	(91)
3. 4 垂径定理	(93)
3. 5 相交弦定理	(95)
3. 6 切割线定理	(98)
3. 7 四边形内接于圆的判定定理	(99)

第二章 平面三角

§ 1 解三角形	(101)
1. 1 余弦定理	(101)
1. 2 正弦定理	(108)
§ 2 三角函数	(113)
2. 1 同角三角函数的基本关系式	(113)
2. 2 诱导公式	(119)
2. 3 两角和与差的三角函数	(123)
§ 3 反三角函数	(133)
3. 1 反正弦函数与反余弦函数的奇偶性定理	(133)
3. 2 反正切函数与反余切函数的奇偶性定理	(136)

第三章 立体几何

§ 1 直线和平面	(138)
1. 1 直线和平面平行的判定定理	(138)
1. 2 直线和平面平行的性质定理	(139)
1. 3 直线和平面垂直的判定定理	(139)
1. 4 直线和平面垂直的性质定理	(141)
1. 5 两条异面直线的距离公式	(142)
1. 6 三垂线定理	(149)
§ 2 多面体和旋转体	(152)
2. 1 锥体的体积公式	(152)
2. 2 楔体的体积公式	(156)
2. 3 拟柱体的体积公式	(166)
§ 3 多面角和正多面体	(170)
3. 1 三面角的性质定理 1	(170)

§ 3.2 三面角的性质定理 2	(172)
§ 3.3 三面角的性质定理 3	(174)
§ 3.4 关于多面体的欧拉定理	(175)

第四章 代 数

§ 1 对数	(182)
1.1 对数的运算法则	(182)
1.2 对数换底公式	(184)
§ 2 数列	(186)
2.1 等差数列	(186)
2.2 等比数列	(188)
2.3 各项是连续的自然数之积的数列的前 n 项和的公式	(189)
2.4 自然数平方和的公式	(197)
2.5 自然数立方和的公式	(198)
§ 3 几个基本不等式	(200)
3.1 不等式定理 1 及其推论	(200)
3.2 不等式定理 2 及其推论	(205)
3.3 n 个正数的算术平均数与几何平均数的不等式	(210)

第五章 平面解析几何

§ 1 两个基本公式	(217)
1.1 平面上两点间距离公式	(217)
1.2 线段的定比分点的坐标公式	(218)
§ 2 点到直线的距离公式	(220)
2.1 几种证法	(220)
§ 3 直线方程的几种形式	(232)

3.1 点斜式	(232)
3.2 斜截式	(235)
3.3 两点式和截距式	(235)
3.4 法线式	(237)
3.5 直线方程的一般公式	(238)
3.6 两条直线所成的角	(240)
§ 4 坐标轴的旋转变换公式	(242)
4.1 几种证法	(242)

第六章 常用定理和方式

§ 1 几个著名定理	(247)
1.1 塞瓦 (Ceva) 定理	(247)
1.2 美耐劳 (Menelaus) 定理	(251)
1.3 托勒密 (Ptolemy) 定理	(255)
1.4 柯西 (Cauchy) 不等式	(265)
1.5 切比雪夫 (Чебишев) 不等式	(269)
§ 2 常用的计算公式	(273)
2.1 平面几何图形的计算公式资料	(273)
2.2 三角函数公式资料	(280)
2.3 立体几何的计算公式资料	(290)
2.4 代数公式资料	(296)
2.5 平面解析几何资料	(305)
说明	(321)

第一章 平面几何

§ 1 直线形

1.1 勾股定理

在直角三角形中，斜边的平方等于两条直角边平方的和

我国古代人把直角三角形中，直角的对边叫做“弦”；夹直角的两边中，较短的一条叫做“勾”；较长的一条叫做“股”。我国最古的一部数学书《周髀算经》载着商高回答周公的一段话：“勾广三，股修四，径隅五”意思是说一个直角三角形的三边的长是3、4、5。这是符合勾股定理的一个特殊的直角三角形。这本书上还载着陈子回答荣方的一段话：“若求邪至日者，以日下为勾，日高为股，勾股各自乘，并而开方除之，得邪至日。”这就是勾股定理的一般情形了。商高发现这一定理时约是公元前1120年。比古希腊人毕达哥拉斯(Pythagores, 约公元前569——公元前500)早得多。所以勾股定理可以称为商高定理。

勾股定理的应用很广泛，证明方法很多。全日制十年制学校初中课本《数学》第三册，采用赵爽著《勾股方圆图注》中的方法。赵爽字君卿，相传为汉代人。他把四个全等的直角三角形拼合成为一个大的正方形和一个小正方形。这个方法可以称为拼合成正方形法。这里先

介绍几种类似的拼合证法。

证一 设 $\triangle BCA$ 中,
 $\angle C = \text{Rt} \angle^*$, $BC = a$,
 $CA = b$, $AB = c$ (下同,
 不再重述)。把四个全等的
 $\text{Rt} \triangle BCA$, $\text{Rt} \triangle ADF$,
 $\text{Rt} \triangle FHE$ 和 $\text{Rt} \triangle EKB$ 拼
 合成为正方形 $CDHK$,
 如图 1.1.1.

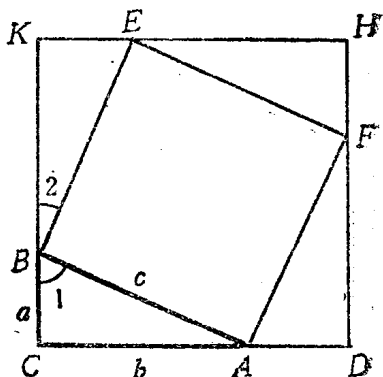


图 1.1.1

因为 $\angle 1 + \angle 2 =$
 $\text{Rt} \angle$, 所以 $\angle ABE = \text{Rt} \angle$,

同理 $\angle BEF = \angle EFA = \angle FAB = \text{Rt} \angle$.

又 $AB = BE = EF = FA = c$, 所以, $ABEF$ 是正方形。

$$S_{\square CDHK} = (a+b)^2, S_{(\square ABEF + 4 \text{Rt} \triangle)} = c^2 + 2ab,$$

$$\text{但是 } S_{\square CDHK} = S_{(\square ABEF + 4 \text{Rt} \triangle)}$$

$$\text{所以 } (a+b)^2 \\ = c^2 + 2ab$$

从而得到:

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

证二 四个全等的
 直角三角形 BCA ,
 AMB , BNF 和 FKB 以
 及正方形 $ADIM$, HIN
 F 拼合成一个大的正方形
 形 $CDHK$ 如图 1.1.2.

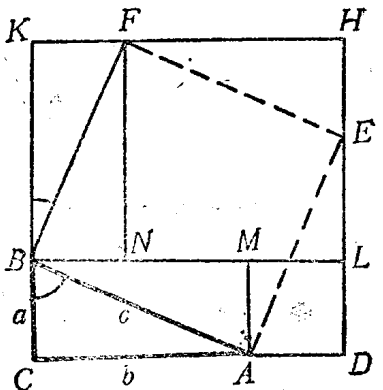


图 1.1.2

• “ $\text{Rt} \angle$ ” 表示直角, 表示一个直角三角形 ABC 时, 通常也可记做 $\text{Rt} \triangle ABC$ 。

在 DH 上取点 E , 使 $HE=BC=a$, 则 $Rt\triangle EHF$ 和 $Rt\triangle ADE$ 都与 $Rt\triangle BCA$ 全等. 而且 $ABFE$ 是正方形, 它的边长等于 c .

$$S_{\square CDHK} = 2ab + a^2 + b^2, \quad S_{\square ABFE} = c^2,$$

$$\begin{aligned} S_{(Rt\triangle BCA + Rt\triangle ADE + Rt\triangle EHF + Rt\triangle EKH)} &= 4 \cdot \frac{ab}{2} \\ &= 2ab, \end{aligned}$$

然后

$$S_{\square ABFE} = S_{\square CDHK} - S_{(Rt\triangle BCA + Rt\triangle ADE + Rt\triangle EHF + Rt\triangle EKH)}$$

$$\text{所以,} \quad c^2 = a^2 + b^2.$$

还有拼成其他图形的证明方法. 请看证三——证十七

证三 用两个全等的直角三角形 ABC , BDE 拼合成为图1.1.3那样的多边形 $ABEDC$.

连结 AE , 交 BD 于 F , 则 $Rt\triangle DEF \sim Rt\triangle CAF$. 从而有

$$\begin{aligned} \frac{DF}{CF} &= \frac{DE}{CA} = \frac{a}{b}, \\ \frac{DF+CF}{CF} &= \frac{a+b}{b}. \end{aligned}$$

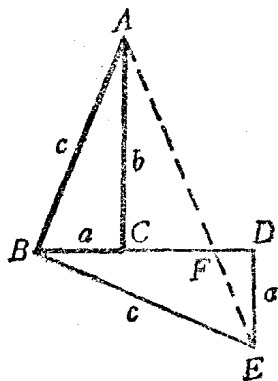


图 1.1.3

而 $DF+CF=DC=b-a$. 所以, $CF=b(b-a)/(a+b)$. 类似地, 求得 $DF=a(b-a)/(a+b)$.

$$S_{\text{多边形} ABEDC} = S_{(Rt\triangle ABC + Rt\triangle BDE)} = ab. \quad (1)$$

另一方面, 又有

$$\begin{aligned} S_{\text{多边形} ABEDC} &= S_{Rt\triangle ABE} + S_{Rt\triangle DEF} - S_{Rt\triangle CAF} \\ &= \frac{c^2}{2} + \frac{a^2(b-a)}{2(a+b)} - \frac{b^2(b-a)}{2(a+b)} = \frac{c^2}{2} - \frac{(b-a)^2}{2}. \quad (2) \end{aligned}$$

比较 (1) 和 (2) 两式, 得到:

$$ab = \frac{c^2}{2} - \frac{(b-a)^2}{2}.$$

由此立即得到: $c^2 = a^2 + b^2$.

证四 用两个全等的 $Rt\triangle ABC$ 和 $Rt\triangle EBD$ 拼合成为图 1.1.4 的四边形 $ABEF$.

$\triangle EFC \sim \triangle ABC$, 故有

$$\frac{EF}{AB} = \frac{FC}{BC} = \frac{CE}{CA},$$

$$\text{或者 } \frac{EF}{c} = \frac{FC}{a} = \frac{c-a}{b}.$$

所以, $EF = c(c-a)/b$,

$$FC = a(c-a)/b.$$

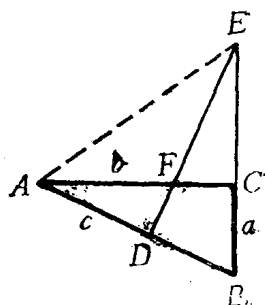


图1.1.4

$$S_{\triangle ABC + \triangle EFC} = \frac{ab}{2} + \frac{a(c-a)^2}{2b} = \frac{ab^2 + a(c-a)^2}{2b}$$

$$S_{\triangle ABE - \triangle AFE} = \frac{bc}{2} - \frac{c(c-a)^2}{2b} = \frac{b^2c - c(c-a)^2}{2b}.$$

然而,

$$S_{\triangle ABC + \triangle EFC} = S_{\triangle ABE - \triangle AFE} = S_{\text{四边形} ABEF},$$

于是得到:

$$\frac{ab^2 + a(c-a)^2}{2b} = \frac{b^2c - c(c-a)^2}{2b}.$$

化简之，便得到： $c^2 = a^2 + b^2$ 。

证五 $Rt\triangle ABC \cong Rt\triangle EDC$ 。

延长 ED ，交 AB 于 F 。则 $EF \perp AB$ 。

因为 $Rt\triangle EBF \sim Rt\triangle ABC$ ，故有

$$BF = a(a+b)/c。$$

$$\begin{aligned} \text{从而 } AF &= c - a(a+b)/c \\ &= \frac{c^2 - a(a+b)}{c}。 \end{aligned}$$

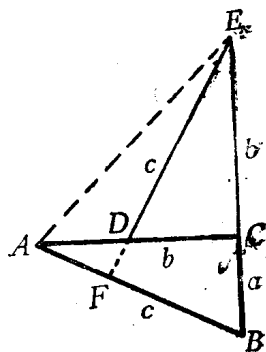


图1.1.5

$$S_{\triangle ABE} = \frac{1}{2} BE \cdot AC = \frac{1}{2} \cdot b(a+b)，$$

$$S_{\triangle ADE} = \frac{1}{2} DE \cdot AF = \frac{1}{2} [c^2 - a(a+b)]。$$

于是，

$$S_{(\triangle ABE - \triangle ADE)} = \frac{1}{2} [(a+b)^2 - c^2]。$$

然而，

$$S_{\text{四边形} ABED} = S_{(\triangle ABE - \triangle ADE)} = S_{(\triangle ABC + \triangle EDC)} = ab。$$

所以，

$$\frac{1}{2} [(a+b)^2 - c^2] = ab。$$

化简之，即得： $c^2 = a^2 + b^2$ 。

证六 如图1.1.6，直角三角形 ABC 与 EAD 全等。由 $\triangle EFA \sim \triangle ABC$ ，求得： $EF = c^2/b$ ， $AF = ca/b$ 。

$$\text{又 } CF = AC - AF = b - \frac{ca}{b} = (b^2 - ca)/b。$$

$$S_{\text{梯形}BCAE} = \frac{b(c+a)}{2} \cdot (1)$$

$$S_{(\triangle BEF + \triangle EFA + \triangle BFC)} \\ = \frac{c^2(c-a)}{2b} + \frac{c^2a}{2b} + \frac{a(b^2-ca)}{2b} \quad (2)$$

(1) 和 (2) 两式的左边相等, 所以,

$$\frac{b(c+a)}{2} = \frac{c^2(c-a)}{2b} + \frac{c^2a}{2b} + \frac{a(b^2-ca)}{2b}.$$

化简之, 便得到: $c^2 = a^2 + b^2$.

证七 用两个全等的 $Rt \triangle ABC$ 和 $Rt \triangle ABD$ 拼合成为筝形 $ACBD$. 它内接于以 AB 为直径的圆周. 连接 CD , 交 AB 于 E . 令 $DE = x$, $BE = y$, 则有 $AE = c - y$. $\therefore \triangle DBE \sim \triangle ABC$

$$\therefore \frac{x}{b} = \frac{y}{a},$$

$$x = \frac{b}{a}y \quad (1)$$

$$\therefore \triangle ADE \sim \triangle ABC,$$

$$\therefore \frac{b}{c} = \frac{c-y}{b}, \quad y = \frac{c^2 - b^2}{c} \quad (2)$$

$$(2) \text{ 代入 } (1), \quad x = \frac{b(c^2 - b^2)}{ca}.$$

$$S_{\text{筝形}} = S_{(\triangle ABC + \triangle ABD)} = ab.$$

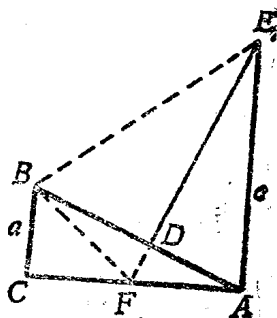


图1.1.6

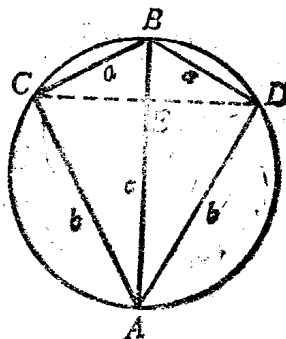


图1.1.7

$$\text{另一方面, } S_{\text{筝形}} = AB \cdot DE = cx = \frac{b(c^2 - b^2)}{a}.$$

$$\text{所以, } ab = \frac{b(c^2 - b^2)}{a}. \text{ 从而 } c^2 = a^2 + b^2.$$

证八 同证七, 因筝形 $ACBD$ 内接于圆周 (如图 1.1.7), 由托勒密定理, $AC \cdot BD + BC \cdot AD = AB \cdot CD$ (参阅第六章) 就是 $ab + ab = c \cdot (2x)$ ($\because CD = CE + ED = 2ED = 2x$).

$$\text{亦即 } ab = \frac{b(c^2 - b^2)}{a}. \quad \therefore c^2 = a^2 + b^2.$$

证九 (美国, 嘉尔裴尔 德 1882) 把两个全等的 $Rt\triangle ABC$ 和 $Rt\triangle BEK$ 拼合如图 1.1.8 (与图 1.1.1 比较).

$$S_{\text{梯形 } ACKB} = \frac{(a+b)^2}{2},$$

$$\begin{aligned} \text{另一方面, } S_{\text{梯形 } ACKB} &= S_{(\triangle ABC + \triangle BEK + \triangle ABE)} \\ &= \frac{1}{2}(2ab + c^2). \end{aligned}$$

$$\text{所以, } \frac{(a+b)^2}{2} = \frac{2ab + c^2}{2}.$$

$$\text{化简便得到: } c^2 = a^2 + b^2.$$

证十 (华德罕姆). 两个全等的 $Rt\triangle ABC$ 和 $Rt\triangle CDE$ 拼合如图 1.1.9. $AB \perp CE$, 交点为 F . 由 $Rt\triangle CBF \sim Rt\triangle ABC$, 求得:

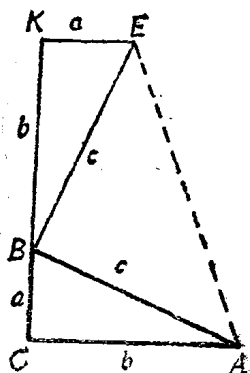


图 1.1.8

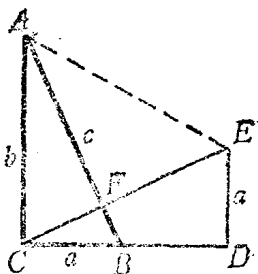


图 1.1.9

$BF = a^2/c$, $CF = ab/c$, 由此又得: $FE = (c^2 - ab)/c$,
 $FA = (c^2 - a^2)/c$.

$$S_{\text{梯形} ACDE} = \frac{b(a+b)}{2},$$

$$S_{(\triangle ABC + \triangle CDE + \triangle AEF - \triangle CBF)} = \frac{1}{2} \left[2ab + \frac{(c^2 - ab)(c^2 - a^2)}{c^2} - \frac{a^3b}{c^2} \right].$$

而 $S_{\text{梯形} ACDE} = S_{(\triangle ABC + \triangle CDE + \triangle AEF - \triangle CBF)}$.
 所以,

$$\frac{b(a+b)}{2} = \frac{1}{2} \left[2ab + \frac{(c^2 - ab)(c^2 - a^2)}{c^2} - \frac{a^3b}{c^2} \right]$$

化简后便得到: $c^2 = a^2 + b^2$.

证十一 (雷布隆
 德1753) 先把两个全等
 的 $Rt\triangle ABC$ 和 $Rt\triangle AFD$
 如图 1.1.10 那样拼合
 起来, 再以 AB 和 AF
 为二邻边作正方形 AB
 EF . 最后, 分别以 BE
 和 EF 为斜边, 在正方
 形的外面作与 $Rt\triangle ABC$
 全等的三角形 EBK 和 F
 EH . 延长 AC 交 EK 于

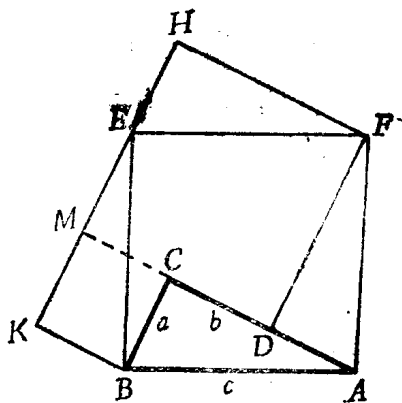


图 1.1.10

M , 则 $CMKB$ 和 $DMHF$ 都是正方形, 边长分别是 a 和 b .

$$S_{\text{全图形}} = S_{(\square ABFE + \triangle EBK + \triangle FEH)} = c^2 + ab,$$

另一方面,