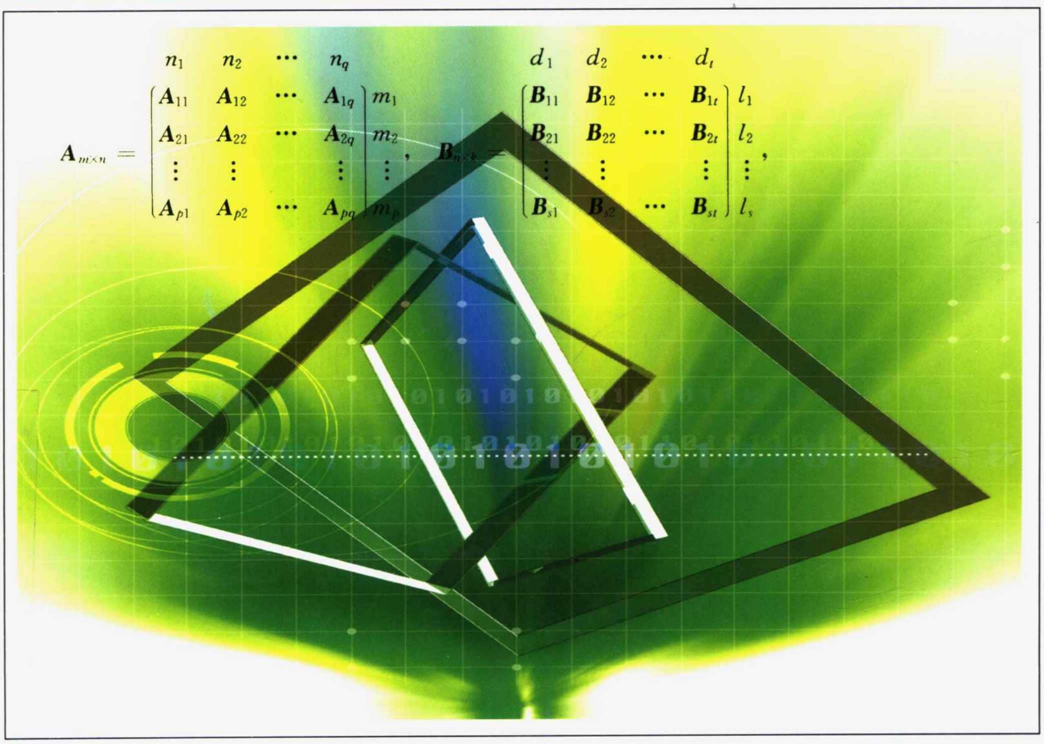
21世纪高等学校教材

XIANXING DAISHU

线性代数

主编　靳全勤　张华隆



上海交通大学出版社

21 世纪高等学校教材

线性代数

靳全勤　张华隆　主编

上海交通大学出版社

内 容 提 要

全书共分六章，内容包括矩阵、方阵的行列式、线性方程组、相似矩阵与矩阵对角化、对称矩阵与二次型、线性空间与线性变换简介。每章后都附有习题。书后附有答案。

本书内容符合教育部高等学校线性代数教学的要求，遵循循序渐进、由浅入深的原则。

本书可供高等院校理工、经济、工商管理等各专业作为教材使用，也可供电视大学和其他业余大学及科技工作者使用。

图书在版编目(CIP)数据

线性代数／靳全勤，张华隆主编．—上海：上海交通大学出版社，2005

21 世纪高等学校教材

ISBN 7-313-04064-4

Ⅰ．线… Ⅱ．①靳…②张… Ⅲ．线性代数-高等学校-教材 Ⅳ．O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 067475 号

线 性 代 数

靳全勤 张华隆 主编

上海交通大学出版社出版发行

(上海市番禺路 877 号 邮政编码 200030)

电话：64071208 出版人：张天蔚

上海市崇明县裕安印刷厂印刷 全国新华书店经销

开本：787mm×960mm 1/16 印张：12.75 字数：239 千字

2005 年 8 月第 1 版 2005 年 8 月第 1 次印刷

印数：1-10 050

ISBN7-313-04064-4/O·174 定价：18.00 元

前　言

随着计算机技术的飞速发展和广泛应用，许多实际问题得以通过离散化的数值计算而得到定量的解决。而线性代数正是实际问题离散化的数学基础。不仅如此，线性代数在训练学生的逻辑思维和推理能力、分析解决实际问题的能力方面也起着重要的作用。因此，线性代数成为理工、经济、工商管理等各专业大学生必修的重要数学基础课之一。

本书由勒全勤、张华隆任主编，郭白妮、成军祥任副主编。

本书是作者多年的教学经验积累的结晶。主要内容包括矩阵、行列式、线性方程组、二次型和线性空间与线性变换初步等。在本书编写过程中，我们遵循了由特殊到一般、由具体到抽象循序渐进、由浅入深的原则。本书充分注重数学概念理论的条理性，而不过分追求数学的严谨。具体说来，本书具有如下特点：

1. 突出了矩阵工具这条主线。矩阵是线性代数最重要也是最基本的工具。线性代数中几乎所有问题都可以利用或者通过矩阵这个有效的工具而得到解决。

2. 突出矩阵的初等变换的重要性。矩阵的初等变换是线性代数中最基本也是最重要的工具和计算方法。它在求逆矩阵、计算方阵的行列式、解线性方程组、求二次型的标准形等问题中发挥着重要作用。

3. 重视例题和习题的选配。本书所配例题都是具有充分的代表性的典型例题。每节都配备了针对本节内容的习题，以帮助学生理解、掌握、巩固所学内容。每章还配备了适量的复习题，这些习题或综合性较强，或具有一定的难度和技巧性。做完这些题目，对准备考研深造的同学大有裨益。

由于作者水平所限，加之时间仓促，书中不当之处，敬请读者批评指正。

作者于上海 同济园

2005年5月

目　　录

第1章　矩　　阵

矩阵是线性代数的重要工具，解线性方程组、求二次型的标准形、描述抽象的线性变换等等，都离不开矩阵这个重要工具。本章主要介绍矩阵及其运算。

1.1　矩阵的概念

1.1.1　矩阵概念的引入

定义 1.1　一个 $m\times n$ **矩阵**，是由 $m\times n$ 个数 $a_{ij}(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$ 排列成的一个 m 行 n 列的矩形数表：

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

我们通常用大写的英文字母 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ 等来表示矩阵。比如，可以用 $\boldsymbol{A}$ 表示上面的矩阵为

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}，或者\ \boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n},$$

其中矩阵 $\boldsymbol{A}$ 中元素 a_{ij} 的下标 ij 表示它在矩阵中的具体位置，即位于第 i 行、第 j 列的交叉位置。

注： $m\times n$ 矩阵中的 m 和 n 均为正整数。

1.1.2　几个特殊矩阵

(1) 如果一个矩阵的元素全为零，则称该矩阵为零矩阵。$m\times n$ 零矩阵通常记为 $\boldsymbol{O}_{m\times n}$；

(2) 一个 m 行一列的矩阵 $\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}$，通常也称为 m 维列向量；

(3) 一个一行 n 列的矩阵$(b_{11} \quad b_{12} \quad \cdots \quad b_{1n})$，通常也称为 n 维行向量。

在矩阵中还有一类比较特殊的矩阵，其行数和列数相等(即其元素排列成一个正方形的数表)，称此类矩阵为**方阵**。方阵是一类极其重要的矩阵，在下一章将专门讨论方阵的行列式。

在方阵中，我们称从左上角到右下角的对角线为**主对角线**；而从左下角到右上角的对角线为**副对角线**。如果一个方阵除主对角线上元素外全为 0，则称此矩阵为**对角矩阵**。对角矩阵形如 $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$。如果对角矩阵 $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$ 对角线上元素 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 全相等，则称为**纯量矩阵**(或**数量矩阵**)。如果一个方阵主对角线上元素全为 1，而其余元素全为 0(即对角线上元素为 1 的纯量矩阵)，则称此矩阵为**单位矩阵**，通常我们用 $\boldsymbol{E}$ 表示单位矩阵。比如，n 阶单位矩阵

$$\boldsymbol{E}_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}_{n\times n}。$$

如果一个方阵位于主对角线上方的元素全为 0，则称该方阵为**下三角矩阵**；同样，如果一个方阵位于主对角线下方的元素全为 0，则称该方阵为**上三角矩阵**。比如，$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ d & b & 0 \\ f & e & c \end{pmatrix}$ 是一个三阶下三角矩阵；$\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix}$ 为二阶上三角矩阵。

定义 1.2 两个矩阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 称为相等，如果它们具有相同的行数和列数(即同型)，并且对应位置的元素全相等。若矩阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 相等，则记为 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$。

例 1.1 由 m 个含有 n 个未知量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的方程组成一个齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0, \\ \quad \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad\quad \vdots \qquad\; \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0, \end{cases} \tag{1-1}$$

如果把方程组中未知量的系数按照它们在方程组中的相对位置关系排成一个 m 行 n 列的矩形表格，就得到一个 $m\times n$ 矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

其中，元素 a_{ij} 是方程组中第 i 个方程中第 j 个未知量 x_j 的系数。这个矩阵通常称为齐次线性方程组(式 1-1)的**系数矩阵**。易见，给定一个齐次线性方程组，按上述方式可以得到唯一一个矩阵；反之，给定一个矩阵，可以得到唯一一个齐次线性方程组，方程组中方程(常数项为零)的个数就是矩阵的行数，未知量的个数就是矩阵的列数，而第 i 个方程中第 j 个未知量 x_j 的系数就是矩阵中的元素 a_{ij}。这样，在齐次线性方程组与矩阵之间就确定了一个一一对应关系。以后会看到，解齐次线性方程组实际上就是通过对其系数矩阵做一系列的变换得到的。

例 1.2 设有一个非齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2, \\ \quad\vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad\quad \vdots \qquad\quad \vdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m, \end{cases} \tag{1-2}$$

如果在该方程组的系数矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

中再加一列元素 $\beta=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$，就得一个 $m\times(n+1)$矩阵

$$\bar{\boldsymbol{A}}=(\boldsymbol{A}\vdots\boldsymbol{\beta})=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix},$$

这个矩阵称为非齐次线性方程组式(1-2)的**增广矩阵**。类似于上例，在非齐次线性方程组与矩阵之间也有一个一一对应关系。以后会知道，判别非齐次线性方程

组是否有解，以及在有解时如何求得其解，都是通过对其增广矩阵做一系列的变换得到的。

例 1.3 同济大学现有 81 个本科专业，毕业生就业于全国的 30 个省市和地区。可以做一个 81×30 的矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} \cdots & \cdots & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \cdots & a_{ij} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix},$$

其元素 a_{ij}($0\leqslant a_{ij}\leqslant 1$)为第 i 个专业在第 j 个省市(区)的就业人数占本专业毕业总人数的百分比。从这个矩阵可以清晰地了解到同济大学某年各专业毕业生在全国各地就业的分布情况。

习题 1.1

1. 一个 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$，既是上三角矩阵又是下三角矩阵，问 $\boldsymbol{A}$ 是什么类型的矩阵？

2. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a & a-b & a-b-c \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ x-1 & y-2 & z-3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$。若 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$，试求 a，b，c，x，y，z 的值。

3. 设有线性方程组 $\begin{cases} x_2-x_4=3, \\ x_1+x_3=4, \\ 2x_1-x_2=0, \end{cases}$ 试写出该方程组的系数矩阵和增广矩阵。

1.2 矩阵的运算

1.2.1 矩阵的加法

定义 1.3 设矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$，$\boldsymbol{B}=(b_{ij})$同为 $m\times n$ **矩阵**，即它们具有相同的行数和列数(有的教科书称为同型矩阵)，定义 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的和仍为一个 $m\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{C}=(c_{ij})$，其中 $c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$($i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n$)，即 $\boldsymbol{C}$ 中元素为 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 对应元素的和，记为 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}$。

由于两个同型矩阵的加法本质上就是把矩阵中对应位置元素相加，而数的加法满足交换律、结合律等性质，很容易得到矩阵加法满足下面运算律：

(1) 交换律,即 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}$;

(2) 结合律,即 $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})$;

(3) 零矩阵 $\boldsymbol{O}$ 满足:对任意同型矩阵 $\boldsymbol{A}$,$\boldsymbol{O}+\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{O}=\boldsymbol{A}$;

(4) 任意矩阵 $\boldsymbol{A}$,都存在唯一的一个矩阵 $\boldsymbol{B}$,使得 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$。称此矩阵 $\boldsymbol{B}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的**负矩阵**,记为 $-\boldsymbol{A}$。

显然,如果 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$,则 $-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} -a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & -a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_{m1} & -a_{m2} & \cdots & -a_{mn} \end{pmatrix}$。

1.2.2 数与矩阵的乘法

定义 1.4 设 λ 为一个数,$\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 为一个 $m\times n$ **矩阵**。定义数 λ 与矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的积为一个 $m\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{C}=(c_{ij})$,其中 $c_{ij}=\lambda a_{ij}(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$,亦即一个数 λ 与一个矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$ 的乘积,就是用数 λ 乘矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的每一个元素 a_{ij} 所得的矩阵 $(\lambda a_{ij})_{m\times n}$。

由定义,容易知道数与矩阵的乘法满足:

(1) 结合律:$\lambda(\mu\boldsymbol{A})=(\lambda\mu)\boldsymbol{A}$;

(2) 分配律:$(\lambda+\mu)\boldsymbol{A}=\lambda\boldsymbol{A}+\mu\boldsymbol{A}$, $\lambda(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=\lambda\boldsymbol{A}+\lambda\boldsymbol{B}$;

(3) $1\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}$。

由定义可知,纯量矩阵(或数量矩阵)就是用一个数 λ 乘单位矩阵 $\boldsymbol{E}$ 所得的矩阵 $\lambda\boldsymbol{E}$。

1.2.3 矩阵的乘法

定义 1.5 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 为一个 $m\times n$ 矩阵,$\boldsymbol{B}=(b_{ij})$ 为一个 $n\times k$ 矩阵。定义 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的积为一个 $m\times k$ 矩阵 $\boldsymbol{C}=(c_{ij})$,其中 $c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{in}b_{nj}=\sum_{l=1}^{n}a_{il}b_{lj}(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,k.)$,记为:$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{AB}$。

注 1: 两个矩阵 $\boldsymbol{A}$,$\boldsymbol{B}$ 可以做乘法,当且仅当第一个矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的列数与第二个矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的行数相等。

与矩阵的加法以及数与矩阵的乘法不同,矩阵的乘法与通常数的乘法具有很多不同之处。

注 2: **矩阵乘法不满足交换律**,即 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$ 不成立。这有两个方面的原因,即使 $\boldsymbol{AB}$ 有意义,$\boldsymbol{BA}$ 却未必有意义。比如,$\boldsymbol{A}_{3\times 2}\boldsymbol{B}_{2\times 4}$ 为一个 3×4 矩阵,而 $\boldsymbol{B}_{2\times 4}$ 却不能与 $\boldsymbol{A}_{3\times 2}$ 相乘;另一方面,即使 $\boldsymbol{AB}$ 和 $\boldsymbol{BA}$ 都有意义,两者也未必相等。比如,

$A=\begin{bmatrix}0&0\\1&1\end{bmatrix}$,$B=\begin{bmatrix}1&1\\0&0\end{bmatrix}$,$AB=\begin{bmatrix}0&0\\1&1\end{bmatrix}$,而 $BA=\begin{bmatrix}1&1\\0&0\end{bmatrix}$,显然 $AB\neq BA$。

两个非零矩阵的乘积可能为零矩阵,即使 $A\neq O,B\neq O$ 仍有可能 $AB=O$。 比如,$A=\begin{bmatrix}1&1\\2&2\end{bmatrix}\neq O$,$B=\begin{bmatrix}4&-7\\-4&7\end{bmatrix}\neq O$,而 $AB=O$。

由 $AB=AC$ 并且 $A\neq O$,仍不能推出 $B=C$。 比如:$A=\begin{bmatrix}1&1\\2&2\end{bmatrix}\neq O$,$B=\begin{bmatrix}1&2\\-1&-2\end{bmatrix}$,$C=\begin{bmatrix}3&4\\-3&-4\end{bmatrix}$,显然 $AB=O=AC$,但 $B\neq C$。

即便如此,矩阵的乘法仍满足一些运算律(以下均假定等式两边有意义):

(1) 结合律:$(AB)C=A(BC)$;

(2) 矩阵乘法对加法的分配律:$A(B+C)=AB+AC$(左分配律),

$(A+B)C=AC+BC$(右分配律);

(3) 单位矩阵 E 满足:对任意矩阵 $A_{m\times n}$,$E_mA_{m\times n}=A_{m\times n}E_n=A_{m\times n}$。

这些性质的证明都很简单,由矩阵运算的定义可得。这里只证明结合律,其余留作练习。证明如下:

由于矩阵可乘,A 的列数必须等于 B 的行数,而 B 的列数必须等于 C 的行数。于是,设 $A_{m\times n}=(a_{ij})$,$B_{n\times k}=(b_{ij})$,$C_{k\times l}=(c_{ij})$。易知,$A(BC)$ 和 $(AB)C$ 都是 $m\times l$ 矩阵。要证明二者相等,只需说明它们对应位置的元素相等即可。根据定义,$A(BC)$ 中的第 i 行第 j 列元素为 A 中的第 i 元素 $a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{in}$ 与 BC 中的第 j 列元素 $\sum_{p=1}^{k}b_{1p}c_{pj},\sum_{p=1}^{k}b_{2p}c_{pj},\cdots,\sum_{p=1}^{k}b_{np}c_{pj}$ 对应元素乘积之和,即

$$\begin{aligned}&a_{i1}\sum_{p=1}^{k}b_{1p}c_{pj}+a_{i2}\sum_{p=1}^{k}b_{2p}c_{pj}+\cdots+a_{in}\sum_{p=1}^{k}b_{np}c_{pj}\\&=\sum_{q=1}^{n}a_{iq}\sum_{p=1}^{k}(b_{qp}c_{pj})=\sum_{q=1}^{n}\sum_{p=1}^{k}a_{iq}(b_{qp}c_{pj})。\end{aligned}$$

同理,$(AB)C$ 中第 i 行第 j 列元素为

$$\begin{aligned}&\Big(\sum_{q=1}^{n}a_{iq}b_{q1}\Big)c_{1j}+\Big(\sum_{q=1}^{n}a_{iq}b_{q2}\Big)c_{2j}+\cdots+\Big(\sum_{q=1}^{n}a_{iq}b_{qk}\Big)c_{kj}\\&=\sum_{p=1}^{k}\Big(\sum_{q=1}^{n}a_{iq}b_{qk}\Big)c_{kj}=\sum_{q=1}^{n}\sum_{p=1}^{k}(a_{iq}b_{qp})c_{pj}。\end{aligned}$$

故 $(AB)C=A(BC)$。

由于矩阵满足结合律,可以定义方阵 A 的幂如下:$A^m=\underbrace{A\cdot A\cdot\cdots\cdot A}_{m}$,其中 m 为正整数。我们规定:$A^0=E$。对于方阵 A,B,$(A+B)^m$ 仍有意义,但数的二项式

定理 $(a+b)^m=\sum_{i=0}^{m}C_m^i a^i b^{m-i}$ 在矩阵的情形却不再成立。比如，$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^2=(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{BA}+\boldsymbol{B}^2$，因为矩阵乘法不满足交换律，一般来说，$\boldsymbol{AB}\neq\boldsymbol{BA}$，从而 $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^2=\boldsymbol{A}^2+2\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{B}^2$ 不成立。

例 1.4 设线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2, \\ \quad\vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad\quad \vdots \qquad \vdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m \end{cases}$$

的系数矩阵为 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$ 称为常数项列向量，$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$ 称为未知量列向量。根据矩阵乘法以及矩阵相等的定义，线性方程组可以表示为：$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}$。此式成为线性方程组的**矩阵表示**。

例 1.5 设矩阵 $\boldsymbol{A}_{m\times n}=(a_{ij})$ 的每列元素之和均为常数（设为 a），矩阵 $\boldsymbol{B}_{n\times k}=(b_{ij})$ 的每列元素之和也都为常数（设为 b），试证明：$\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的乘积矩阵 $\boldsymbol{AB}$ 的每列元素之和必为常数。

证明： 由已知，$\sum_{p=1}^{m}a_{pj}=a_{1j}+a_{2j}+\cdots+a_{mj}=a \quad (j=1,2,\cdots,n)$，

$$\sum_{p=1}^{n}b_{pj}=b_{1j}+b_{2j}+\cdots+b_{nj}=b \quad (j=1,2,\cdots,k),$$

令 $\boldsymbol{\alpha}=(1\ \ 1\ \ \cdots\ \ 1)$ 表示分量（或元素）都是 1 的 m 维行向量，则

$$\boldsymbol{\alpha A}=(1\ \ 1\ \ \cdots\ \ 1)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$=\left(\sum_{p=1}^{m}a_{p1}\quad \sum_{p=1}^{m}a_{p2}\quad \cdots\quad \sum_{p=1}^{m}a_{pn}\right)=(a\quad a\quad \cdots\quad a)=a\boldsymbol{\alpha}。$$

由此可以看出，用 $\boldsymbol{\alpha}$ 左乘一个矩阵所得的行向量，其分量（或元素）恰为矩阵对应列元素之和。因此，要证明 $\boldsymbol{AB}$ 的每列元素之和为常数，只需验证一下行向量 $\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{AB})$ 的各分量是否相等。由矩阵的结合律以及数与矩阵乘法的结合律，得

$$\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{AB})=(\boldsymbol{\alpha A})\boldsymbol{B}=(a\boldsymbol{\alpha})\boldsymbol{B}=a(\boldsymbol{\alpha B})=a(b\boldsymbol{\alpha})=(ab)\boldsymbol{\alpha},$$

即行向量 $\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{AB})$ 的每一个分量都为 ab，所以 $\boldsymbol{AB}$ 的每列元素之和都为常数 ab。

1.2.4 矩阵的转置

定义 1.6 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$为一个 $m\times n$ 矩阵,如果以矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行为列(也就是以 $\boldsymbol{A}$ 的列为行),则得一个 $n\times m$ 矩阵。称此矩阵为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的**转置矩阵**,记为 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$(T 就是转置的英文 Transpose 的字头)。

由定义可知,$\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 是互为转置矩阵,$\boldsymbol{A}$ 中的第 i 行第 j 列元素恰为 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 中的第 j 行第 i 列元素。矩阵的转置满足下面的运算律:

(1) 对任何矩阵 $\boldsymbol{A}$,$(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}$;

(2) $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$;

(3) $(\lambda\boldsymbol{A})^{\mathrm{T}}=\lambda\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$;

(4) $(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$。

证明: 性质(1),(2),(3)的证明都相对简单,在此只给出性质(4)的证明。

由于 $\boldsymbol{AB}$ 有意义,可设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$为 $m\times n$ 矩阵,而 $\boldsymbol{B}=(b_{ij})$为 $n\times k$ 矩阵。这样 $(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}}$ 和 $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 都是 $k\times m$ 矩阵。$(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}}$ 的第 i 行第 j 列元素恰为 $\boldsymbol{AB}$ 中的第 j 行第 i 列元素:

$$a_{j1}b_{1i}+a_{j2}b_{2i}+\cdots+a_{jn}b_{ni}=\sum_{l=1}^{n}a_{jl}b_{li}, \tag{1-3}$$

而 $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 的第 i 行第 j 列元素为 $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$ 的第 i 行与 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 的第 j 列,亦即 $\boldsymbol{B}$ 的第 i 列与 $\boldsymbol{A}$ 的第 j 行对应元素乘积之和:

$$b_{1i}a_{j1}+b_{2i}a_{j2}+\cdots+b_{ni}a_{jn}=\sum_{l=1}^{n}b_{li}a_{jl}. \tag{1-4}$$

显然,式(1-3)和式(1-4)相等,从而$(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$。

定义 1.7 如果 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}$,矩阵 $\boldsymbol{A}$ 称为**对称矩阵**。

由定义知,若 $\boldsymbol{A}$ 为对称矩阵,则 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 与 $\boldsymbol{A}$ 须为同型矩阵,从而 $\boldsymbol{A}$ 必为方阵,并且其元素满足 $a_{ij}=a_{ji}$ 对所有下标 i,j 成立。

定义 1.8 如果 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=-\boldsymbol{A}$,矩阵 $\boldsymbol{A}$ 称为**反对称矩阵**。

反对称矩阵也必为方阵,其元素满足 $a_{ij}=-a_{ji}$ 对所有下标 i,j 成立。特别地,如果取 $i=j$,反对称矩阵对角线上的元素必为零。

例 1.6 试证明:每一个方阵必可唯一表示为一个对称矩阵与一个反对称矩阵之和。

证明: **存在性** 设 $\boldsymbol{A}$ 为任意一个方阵,如果 $\boldsymbol{A}$ 能表示成一个对称矩阵 $\boldsymbol{G}$ 和一个反对称矩阵 $\boldsymbol{H}$ 之和,即 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{G}+\boldsymbol{H}$,则 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{G}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{H}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{G}+(-\boldsymbol{H})$。两式相加,得 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=2\boldsymbol{G}$,即 $\boldsymbol{G}=\dfrac{\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}}{2}$;两式相减,得 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=2\boldsymbol{H}$,即 $\boldsymbol{H}=\dfrac{\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}}{2}$。显然,

$\boldsymbol{G}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{G}, \boldsymbol{H}^{\mathrm{T}}=-\boldsymbol{H}$,并且 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{G}+\boldsymbol{H}$。

唯一性 由上面的讨论,如果 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{G}+\boldsymbol{H}$,并且 $\boldsymbol{G}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{G}$, $\boldsymbol{H}^{\mathrm{T}}=-\boldsymbol{H}$,则 $\boldsymbol{G}=\frac{\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}}{2}, \boldsymbol{H}=\frac{\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}}{2}$完全由矩阵 $\boldsymbol{A}$ 确定。所以 $\boldsymbol{A}$ 分解成一个对称矩阵 $\boldsymbol{G}$ 和一个反对称矩阵 $\boldsymbol{H}$ 之和的方式唯一。

习题 1.2

1. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&3&5&4\\3&2&3&2\\4&2&0&1\end{pmatrix}, \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&1&2\\1&1&2\\0&1&0\end{pmatrix}$,试求 $\boldsymbol{AB}, \boldsymbol{BA}, \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$。

2. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&2\\3&4\end{bmatrix}, \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}4&3\\2&1\end{bmatrix}$,试求$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^2$ 以及 $\boldsymbol{A}^2+2\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{B}^2$。

3. 若矩阵 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}$ 满足条件 $\boldsymbol{AC}=\boldsymbol{CB}$,试证明:$\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 必为方阵;问 $\boldsymbol{C}$ 如何?

4. 设 $\boldsymbol{\alpha}=(a_1 \quad a_2 \quad \cdots \quad a_n), \beta=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_n\end{pmatrix}$,如果 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\beta\alpha}$,试求矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的所有元素之和。

5. 如果 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$,则称 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 可交换,试求所有与$\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix}$可交换的矩阵。

6. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&\lambda&0\\0&1&\lambda\\0&0&1\end{pmatrix}$,试求 $\boldsymbol{A}^n$(n 为非负整数)。

7. 试证明:对任意矩阵 $\boldsymbol{A}_{m\times n}$,$\boldsymbol{AA}^{\mathrm{T}}$ 恒为对称矩阵。

8. 设 $\boldsymbol{A}$ 为对称矩阵,$\boldsymbol{B}$ 为反对称矩阵,试证明:

 (1) $\boldsymbol{A}^2$ 为对称矩阵;

 (2) $\boldsymbol{AB}-\boldsymbol{BA}$ 为对称矩阵;

 (3) $\boldsymbol{AB}$ 为反对称矩阵,当且仅当 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$。

1.3 初等变换与矩阵的标准形

矩阵的初等变换在行列式的计算、求逆矩阵、解线性方程组以及求二次型的标准形等计算中具有重要作用;而初等矩阵则在诸多证明中起着重要作用。