



數學入門

現代國民基本知識叢書 第四輯

王澹如譯
索埃爾著

中華文化出版事業委員會出版

現代國民基本知識叢書

第四輯

數學入門

索埃爾著

王澹如譯

現代國民基本知識叢書 第四輯

數 學 入 門

中華民國四十五年三月初版

中華民國四十五年四月再版

定價新臺幣十五元整

(外埠酌加運費匯費)

版權所有
不許翻印

著 者 索 埃 爾

譯 者 王 澹 如

出 版 者 中華文化出版事業委員會

發 行 者 中華文化出版事業委員會

地址：臺北市中正路一七三〇號

電話：二 七 二 九 七

印 刷 者 中國新聞出版公司印刷廠

地址：臺北縣中和鄉中和路二七四號

總經售處 中 央 文 物 供 應 社

地址：臺北市仁愛路一段二號

電話：二 二 九 三 六

譯 序

(一)本書資料雖不十分豐富，但體裁新穎，詞句清暢，與普通數學教科書之乾燥乏味，完全不同。譯者亦本著者原意，在文字上力求通俗，詞句上力求保存原書風趣。

(二)本書第一篇中，指出一般人畏懼數學之原因，及如何免除此畏懼心理之方法，當大有裨益於平素厭惡數學之學校學生。

(三)本書第二篇中，歷述數學中各部門。自最淺近之算學起迄微分方程式止，均歸納於一短篇中，雖有“掛一漏萬”之嫌，但理論上能互相引證貫通（第四章中列有一表指出各章之彼此關係），使讀者增加對於數學各部門之認識。

(四)本書最大優點在能指出數學家用何種思想方法及程序去解答一個問題，因此能啟發初學數學者對於疑難問題之興趣，增強其研究精神，及克服困難之勇氣。

(五)本書可供初中及高中學生補充課室作業之用。因詞句平易，講述清楚，學生可自己閱讀，無須教師講解。

(六)大學生無論所習何科，閱讀此書，可增加對數學之認識。

(七)本書敘述學生心理及教授方法之處甚多，可供數學教師參考及取法。書中關於對數及複數之教法，尤新穎可採。

(八)本書詞句平易通俗，即未習過數學之人，亦能看懂，故可供一般讀者之用。

(九)本書原名“**Mathematician's Delight**”，原著者索埃爾
(**W. W. Sawyer**)，附誌於此。

目 次

第一篇 緒 論

第一章	不要畏懼數學	1
第二章	幾何——房屋和傢俱的科學	6
第三章	理論的性質	15
第四章	學習數學的戰術和戰略	31

第二篇 數學的幾個部門

第五章	算 術	43
第六章	如何忘記乘法表	54
第七章	代數——數學的速寫	63
第八章	擴展的方式	72
第九章	圖解——用圖畫表現出來的思想	87
第十章	微分學——速率的研究	99
第十一章	從速率到曲線	116
第十二章	微積分的其他問題	133
第十三章	三角學——如何建築隧道和製作地圖	145
第十四章	數學的背景	165
第十五章	負一的平方根	179

數學入門

第一篇 緒論

第一章 不要畏懼數學

“最大的罪惡是恐懼。”——依壁鳩魯哲學 (Epicurean Philosophy)

此書之目的在減少學習數學者對於數學的恐懼。許多人認為數學家是屬於特殊的人種，具有特殊能力的人。此種看法對於少數成功的數學家，固然是一種誇讚；但對於許多正在學習數學的人，却是一個很大的威脅。

很多學生有一種自暴自棄的心理，以為他們決對不會明瞭數學，但有些則相信自己或者可能獲得些可以騙騙先生，賺得攷試上成績。他們好像軍隊中的通訊兵，用自己毫不能懂的言語，去傳達訊息——他們常時恐懼會失去記憶，結果造成不可置信的錯誤。

用這種目的去學習數學，是浪費時間的。數學是一種工具。如果你以為將來不會用這工具，就用不着去學。倒不如用時間去作體育運動，鍛練身體，至少可以使身體健康。

進一步說，一個人在任何方面養成了恐懼怯懦的習慣，是最不好

的。心理健康之最高目的，在能應付生命上之任何問題——不盲動，不退避，不至於瞠目不知所從。

爲甚麼有人會覺得數學極端困難呢？是不是數學本身的原因？是不是數學家在生理上確與旁人不同？還是普通教授數學的方法，有很多值得改良的地方？

無疑問的，數學的困難，不是數學本身的問題，因爲人們在日常生活上——當他們做任何事物的時候——其思想方法常常無意的與數學上所用的相同。但如果有人告訴他們，實際上是如此，進而提議要他們學習數學，他們會感覺到極端疑惑了。關於此點，後面還會論及。

畏懼數學的習慣，是從很久以前遺傳下來的。從前多數教師，不明悉學生心理，更不明悉數學本身的性質，他們只是會教授些表面的數學而已。

虛表的學識

差不多每種學科，都有它的陰影或膚淺的類似品。我想如果一個既聾且啞的兒童，要學習鋼琴，也可以辦得到的。他練習錯誤時，教師可以用面目上的表情去糾正他。但此童決對不會知道他所練習的是甚麼，也會全不明白他爲甚麼要作此種奇特的練習的，因爲他所學的只是音樂的虛表。人們畏懼厭惡數學的心理，與此童厭懼練習鋼琴的心理，完全相同。

學習音樂如此，學習其他知識也是如此。一個人可以學習表面的歷史——人名，地名，重要紀年，但全不明白歷史上史蹟的前因後果；表面的文學——連篇累牘的莎士比亞詩文搭記，但完全不能領會到文

學的真實價值。兩個學生同時學習法律：一生只知記憶些條文與成例，一生則想像他是一個農人，有他的妻子，田莊，房屋以及一切有關的事物；假設他要寫篇遺囑，他會說：“我不要忘记我女兒的教育費，或者關於房屋典押的事項等等。”我們可以知道，一生只是在繁文瑣節中移動，而另一生則住在真情實事的境界中。鸚鵡式的學習方式，更可在下面一確實故事中看到。某生在生理攷試卷中寫着：“腹部包括胃及腸，腸爲 A, E, I, O, U。”此生心目中所想像的甚麼？是不是人體標本上銅牌上的字？或許他對於所學的毫無印象，攷試時只有胡寫。可能他平日從教師常聽到無意義的神祕的名詞，而此次所寫的答案，也同樣的無意義。

許多學校中數學試卷，常有如上述之荒謬錯誤。其原因亦大略相同——無意義的字句，無意義的名詞。

鸚鵡式的學習，常常會發生上述結果。學習鋼琴的聾童決不能明白音調是甚麼東西。但真實的教育則不僅不會發生上述錯誤，且能解除學習者之神經緊張，而在其心理上發生安全與自信的感覺。吾人更須知學習真實知識遠比學習虛表知識容易，因為能使學習者發生興趣。教育之良否，只要看學生能否發生興趣，如果學生感覺到枯燥乏味，則可斷定教育方法，已走錯了道路。一切的發明，一切的成功，都從工作上興趣中得來。而發明家成功者，均是正常的人物，決非專事幻想者。愛迪生自小就歡喜實驗，正如普通兒童之喜歡拆弄摩托車或收音機一樣，不過大科學家，大工程師，大探險家之喜歡實驗的故事容易流傳出來而已。實際上，一切學識，莫不從實驗上得來。

一個人要把握住任何事物——從足球到精深學理——都需要工作

上的努力，但此決非不愉快的努力。教師之最重要工作，爲如何使學生對於所學發生興趣。設有一小學生於十歲時離開學校。他雖未能學到詳密的知識，但他如能領會到音樂，閱讀，學習，發明等的興趣，他之成就，遠較僅僅充滿着記憶而缺乏求知興趣的二十二歲大學畢業生爲強，佳良之教育方法，應該在兒童幼小時就施行。小學校中，尤應從事於啓發學生之興趣，且隨時隨地的鼓舞學生好奇心。

學生厭惡學習之心理，可以說完全是不良教授法之結果。任何兒童，都願學習，都願工作。教師們無須另找生活力灌入兒童胸中，因爲活潑潑的生活力，已經在那裏存在，教師們只須設法保持此生活力，引導它不斷的流出來。

不幸的，教師們常有荒謬的見解，以爲成人們爲生活計，必需做乏興趣的工作，所以兒童們最好趕快的養成做無興趣的工作習慣。其結果，使學生厭惡與輕視一切的知識，一切的學習。

現在許多前進教育家及教師們已有反抗和革除此種愚笨教育謬論的意志。吾人從廣播中間常已能聽到極好的教育節目。此項節目，業已在全國（指著者的國家，澳國——譯者註）各處萌芽和成長。實際上，此書意見並非作者所獨創，不過表示贊同其他許多改革者之意見而已。

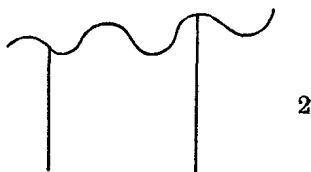
在本書各章中，著者將解述數學是甚麼，教育家是如何思想的，數學有何用處。在此短短篇幅中，自然不能作詳細的解釋。讀者如願學習數學中某一部門，一定需要教科書。但許多教科書中，列着過多的節目，其用處常常不清楚。記憶這些節目，是毫無意義的。這比才一個過重的鋼錘，如不能舉起來，是毫無用處的。數學又好像一箱工

具。善於工作者在用工具以前，一定要先知道每個工具的用途，如何運用，以及在何時何地，才能運用。

第二章 幾何——房屋和傢俱的科學

“因此博士就再行努力的去學習幾何，拉丁文，文法及分數。他的堅強記憶力，使他很容易的懂得文法。分數也不大難。但是幾何就不行了。他簡直不知道書上講的是甚麼東西。最初還好。但到了第一本末了，講到平行四邊形的時候（發掘那著書人的祖墳），他完全失敗了。整個晚上他看那本書，一直看到 AB 線和 CD 線，交附着跳起沙哈拉華爾茲舞來。上床的時候到了，但是他還得不到休息！那可惡的醜惡的四邊形 AH 還在床單上跳着，叫着：‘我不可能也決不會等於那肥胖的四方形 CK！’這樣，誰還能睡得着呢？”——亨利金斯烈著：賈佛烈漢林傳（Henry Kingsley's Geoffrey Hamlyn）

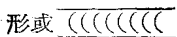
在上章中說過，人們在日常生活常常不知不覺的用數學思想方式去考慮事物。例如你對一個朋友說：“請你用幾何方法畫一個長方形”，他們或者會茫然不解。但你如果說：“請你告訴我一個做桌子的方法”，他們就不會不懂了。一個長方形就是右列圖1的圖形。任何人作桌子都要懂得圖1



第二章 幾何——房屋和傢俱的科學

的圖形。假使桌子做成圖2的圖形，桌上的杯盤碗筷豈不會自相碰碎嗎？大家都明白桌面一定要直的，不要彎的。但桌面如果直而不平，可以變成  形狀；即使桌面又直又平，而桌腿如下列形狀 ，則此桌亦不會牢固。所以桌子必須作成  形，方能穩固。

任何人能明瞭桌子的製法，即能明瞭長方形的作法。長方形為最常見的圖形，但許多較早的教科書却很少敘述長方形的用途。

另外一種利用長方形的手藝是砌磚。普通磚的各面均製為長方形。理由很簡單，因為砌磚要平正，磚才不會滑下，就是砌花牆（表面不光滑的牆），也須平正。假使磚製成右列情形；則砌工必須浪費許多時間，去尋覓大小適宜的磚，用以填滿牆的空隙。即磚成  形或  形，牆壁的兩端，也會留下不需要的空隙，兩牆接合處，不能合縫。因為要解除上述困難，所以普通的磚，都製成長方形。

普通人對於上述理由應該很容易明白。但是為甚麼還有人不喜歡幾何呢？其原因不外：（一）他們誤認幾何是一種神祕的學問。他們不明白，也從沒有人告訴他們，幾何學與人們日常生活是有密切的關係的。（二）數學是一種精密確實的學問。我們可以做成一個馬馬虎虎的桌子或一扇門，但在幾何學裏，却沒有“差不多的三角形”或“差不多的長方形”。這種必須十分確實精密的要求，所謂數學的確實性，往往使學習數學的人發生長懼。但這些人如果能記住幾何與木工術的密切關係，此畏懼心理，應該不會發生；設使對於某一問題，發生

疑惑，儘可先作無數次的實驗；找到一個比較適當的答案以後，再進一步求數學上的精確證明。但此證明是以後的事，實驗則是在前的事。早先的數學家，多半是木工或建築師，都是講求實用的人。我們可以從現在常用的字去證實此點。甚麼叫作直線（straight line）呢？在早的英文詞典中，straight 原意伸展（stretch）。line 則從麻（linen）或亞麻線（linen thread）一字而來。一條直線就是一根伸展的亞麻線。現在種田的農人或砌牆的工人都明白用線扯直線的方法。幾何學始祖歐里幾得（Euclid）却喜歡用另外的字句，述明同樣的意義。他說：“直線是兩點間的最短距離。”他爲甚麼如此說呢？因爲你若用卷尺量兩點間距離，一定要用力將卷尺拉緊，使之伸展。農人砌工所用伸展之長線，也是同樣原因。

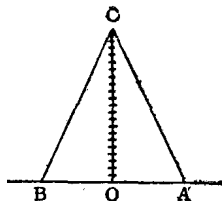
吾人如須寫出某項事物之定義，只須問問自己，在實驗時需要何項辦法，才能製成此項事物。

例如吾人要寫出直角（right angle）之定義。一個直角就是英文字母L之形狀。此頁書之四角，都是直角。 $\angle$ 形和 $\neg$ 形都不是直角。直角形是如何作出來的？將一張紙平分，從中間折疊起來，再將紙依折縫裁下來，折縫與紙之底邊即成一直角形。吾人從此知直角之特點，爲垂直線之兩邊是完全相似的。設紙之一邊有一墨點，在折疊後，此墨點必印在另一邊之同樣位置上。此垂線好像一面鏡子，在垂直線一邊之形狀，投影在另一邊之同樣位置上。

另一例爲持一尺或一手杖立於鏡面上。自尺上端下視，必有一適宜位置，尺與其投影在同一條線上。在此位置時，人與鏡面即成一直角。

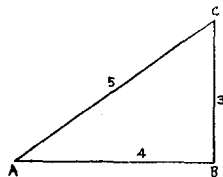
若在地上或球場上作直角，當然不能採用折疊方法。但採尺鏡實驗之原理即可解決此困難。

在右圖中，願為在底線 OA 上，作 OC 與 OA 成直角。今設 OC 為一鏡面，因其與 OA 成直角，故 A 應投影於底線之另一邊，令為 B 。 OB 與 OA 之距離必相等。因此吾人可由下列方法以求 OC 之位置。以 O 為起點，量出 OA 之距離，在 A 之相反方向



，以同等距離在底線上作 B 。再用一繩，取適宜之長度，一端固定於 A ，以另一端作弧形。凡在此弧形上各點，均應與 A 點同等距離。再以此繩之一端固定於 B ，以同一長度另畫一弧形。此兩弧形相交之點，應與 A 及 B 同一距離。此點即為吾人所求之 C 點。作 OC 。 OC 應與 OA 成直角。

此外另有一方法，亦常用於球場上。取木條三根 (AB , BC , CA)



長度 4, 3, 5 公尺，固釘如左圖。圖中 B 角即為直角。此方法在五千年前即已在埃及發明。歷史上雖未載明發明者姓名，但可斷言必係一工人或建築師。迄今吾人仍沿用此法，以作直角，正如埃及人利用以建築寺廟墳墓金字塔等有同樣便利。再吾人不知當時埃及學者已否研究出此方法之原理，惟嗣

後希臘商人將此法傳至希臘時，希臘人亦未能探得此法奧妙之所在。吾人可揣想當時學者一定常時發生疑問；為甚麼三角形之邊長比例必

是 3, 4, 5; 而不是 7, 8, 9? 如果為 7, 8, 9, 或其他三數, 其結果又如何?

希臘學者是喜歡研究的。一定先從比較小的數字入手, 例如 1, 1, 1; 1, 1, 2; 1, 1, 3; 1, 2, 2; 2, 2, 2 等, 作過許多次實驗, 如右列各圖。

在實驗時, 應有很多

原理被發現了。例如

當三數中之一, 大於其他兩數之和時 (如 1, 1, 3; 1, 1, 4 等

), 則三角形不能構成。

又例如兩副三數之比例相同時 (如 1

, 1, 1; 2, 2, 2 等

), 則其構成之三角形

, 雖大小不同, 而形

式相似。又例如 1, 2, 2 三數構成之三角形有一特點, 即兩邊之形

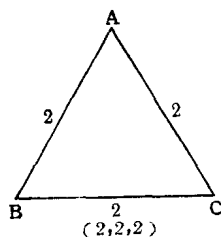
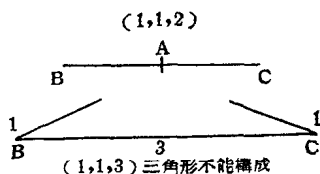
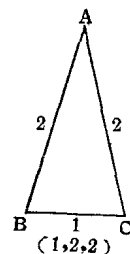
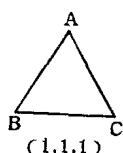
狀相同, 可以互相掉換。試驗圖形愈多則發現之原理亦愈多, 其中亦有同一原理, 只能互相引證的。例如任何三角形 ABC, AB 加 AC 一

定要大於 BC。此原理即同於“兩點間之直線為兩點間之最短距離”

; 因 BC 既為最短距離則從 B 經過 A 再到 C, 一定較 BC 為長。

實驗有兩種功用: (一) 可發現許多事實; (二) 將此許多事實

, 有條理的整理出來, 可得到有利的結論。實際上, 希臘學者研究任



何學問，均用此方法。紀元三百年前，歐里幾得整理出來他觀察的事實，寫出來迄今著名的幾何學。在本書第十三章中，讀者將讀到 3, 4, 5 三數能構成直角三角形之原因，同樣的 (5, 12, 13), (24, 25, 7), (33, 56, 65) 均可構成直角三角形。

但凡原理之研究，皆需要時間。著名的金字塔是紀元前三千九百年前造成的。當時一切工程方法，均從實驗上得來。

關於原理著作，係在金字塔後三千六百年！吾人不能期望現在學童們照歐里幾得的方式去學習幾何，因為三千六百年的成就，不能縮短於一日。學習幾何的方法，為工作，實驗，觀察，整理——然後思索。

此外最要緊的，是不要躁急。數學的進展，是遲緩的。吾人應力求能完全明白所學到的一切，使心中對於每個思想，有清清楚楚，毫不含糊的觀念，才能從容不迫，有條不紊的再求進步。正如作戰，如後面還有敵人——亂雜不明白的觀念——，千萬不要冒失的前進。設吾人於以前所學的，還不能完全明白，寧可從新開始，再從乘法表學起！

幾何學中的幾個實驗

(一) 一木條長 4 英尺。今擬釘一木條於其上，如右圖。再擬於兩木條之各端，圍以長繩，使成長方形。問另一木條之長度應為若干？釘應釘在何處？兩木條間是否應有一定之角度？

