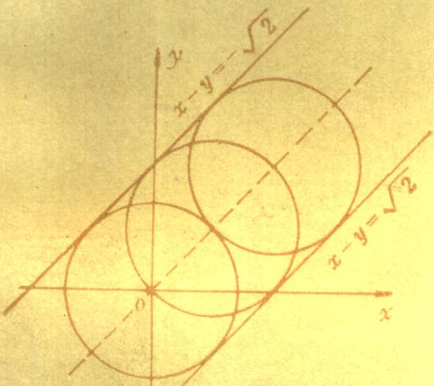
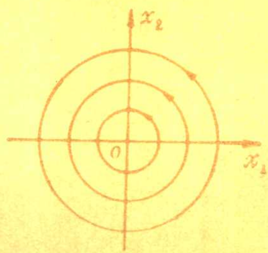
中学课外阅读和教学参考书

包络浅说

BAO LUO QIANSHUO

鲁有专 编著





安徽教育出版社

封面设计：陈文本

包络浅说

鲁有专

安徽教育出版社出版

（合肥市跃进路1号）

安徽省新华书店发行　安徽新华印刷厂印刷

*

开本：787×1092　1/32　印张：5.375　字数：120,000

1984年12月第1版　1984年12月第1次印刷

印数：6,000

统一书号：7276·136　　定价：0.90元

前　　言

本书是一本通俗的中学数学读物。讲的是有关“包络”的基本知识、初等求法以及“包络”在某些方面的应用。内容由浅入深、深入浅出、通俗易懂。书中所涉及的只是中学数学课本中的三角恒等变形、平面解析几何、极限等知识，而不涉及过于高深的数学知识。为了便于课外阅读、书中配有一定数量的习题、书后还附有全部习题的解答或提示。本书对扩大中学生数学知识范围，培养综合运用初等数学知识的能力都有一定的帮助，因此本书可供中学生课外阅读也可供中学数学教师教学时参考。

在本书写作过程中，作者的业师赵遂之老先生自始至终给予亲切关怀和具体指导，并仔细地审阅和修订了全部书稿，特在此表示感谢。

限于作者的水平，书中错误和缺点在所难免，敬请读者批评指正。

鲁有专

一九八三年十一月

目　　录

绪　　言

§1. 什么是包络 假设有一族平面曲线，我们把它叫做$C(t)$，这一族曲线中的每一条曲线都和不在这族曲线中的另一条曲线E相切，并且曲线E上的任何一点必定是它和曲线族$C(t)$中某一条曲线相切的切点，那么，曲线E就叫做曲线族$C(t)$的包络。

这里有两个术语须加以说明如下：

首先，本书中所说的曲线，如无特别声明，都包含直线在内。也就是把直线看做曲线的一种特殊情况。

其次，所谓曲线族$C(t)$，是指以t为参数的一系列的曲线。参数是什么呢？参数就是曲线的表达式中可以任意指定其数值的一个常数。例如：

$$y=\frac{1}{2}x+t, \tag{1}$$

当t的值从$-\infty$变到$+\infty$的时候，(1) 式就表示一切斜率为

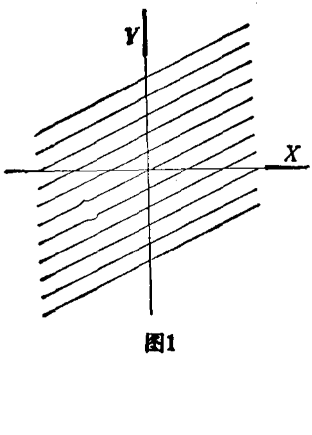


图1

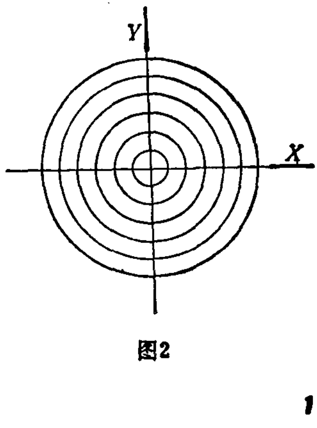


图2

$\frac{1}{2}$的直线。图 1 中画出了曲线族 (1) 的一部分曲线，它对应于 $t=0$、±1、±2、±3。如果全部画出来的话，它将黑压压的盖满整个平面。

又如：

$$x^2+y^2=t^2, \tag{2}$$

当t的值变动时。(2) 式就表示一切圆心在原点的圆。图2中画出了 $t=0$、1、2、……6 的情况。这个曲线族如要全部画出来，也要盖满整个平面。

再如：

$$y=tx, \tag{3}$$

当t取一切实数值时，(3) 式就表示一切通过原点的直线（但 Y 轴除外），图 3 画出了它的一部分图象。这个曲线族也差不多要盖满整个平面，除了Y轴以外。在 Y 轴上，只有原点是被这个曲线族中每一条线所复盖的。因此，原点被这个曲线族中的线复盖了无穷多次。

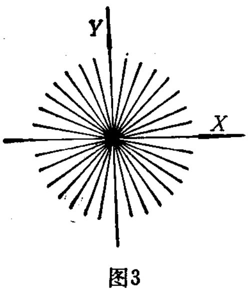


图3

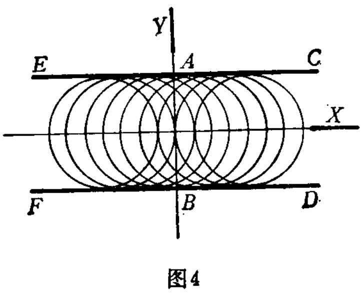


图4

最后，我们来看下面的例子：

$$(x-t)^2+y^2=1, \tag{4}$$

当 t 的值变动时，这个曲线族就是一切圆心在 X 轴上、半

径等于1的圆。这个曲线族不能盖满整个平面，但能盖满直线 $y=1$（图4中的EC）和直线 $y=-1$（图4中的FD）之间的平面，而且每一点被复盖二次。图 4 画出了这个曲线族中部分曲线的图象。

根据上列图象和我们前面讲的包络定义，很容易看出：曲线族(1)和曲线族(2)没有包络，因为从图1和图2可见，没有这样的一条曲线线能和族中的每条曲线相切。而曲线族(4)的包络是两条直 $y=\pm1$，因为曲线族(4)中的每个圆都和这两条直线相切，而且，这两条直线上的任何一点必定是曲线族(4)中的某一个圆和这两条直线中的一条的切点。至于曲线族(3)呢，我们说这是一个特殊情况。这时，曲线族中每一条线都经过一个定点，我们把这个定点也认为是包络，并且把它叫做包络的退化情形。

很明显，如果参数 t 所取的值有限制，那么，包络的范围也要受到限制。例如，曲线族(4)中的参数 t 如果只限于正实数，那么它的包络就只有 Y 轴右面的一部分，即两条射线 AC 和 BD。习惯上，我们总是尽量让参数取一切可能取的实数值。

§2. 怎样求包络

从包络的定义可知，包络 E 上的每一点都是它和曲线族 $C(t)$ 中的一条曲线相切的切点，包络 E 就是曲线族 $C(t)$ 中各曲线和 E 相切的切点的轨迹。要想求包络 E，只要设法求出上述那些切点的轨迹就行了。因此我们有下列三种方法：

第一法 以第一节中讲过的曲线族

$$(x-t)^2+y^2=1, \qquad (4)$$

为例，如果取 $t=0$，就得到以原点0为圆心、半径等于1的圆。在图5中，它和直线 EC 相切于 A 点。如果取 $t=0.1$，那么，所得的圆与以 O 为圆心的圆相交于 G。由图5可以看出，G 点和 A 点距离很近。如果读者高兴，取 $t=0.01$、$t=0.001$……画圆，就可以看出，这些圆和圆 O 的交点愈来

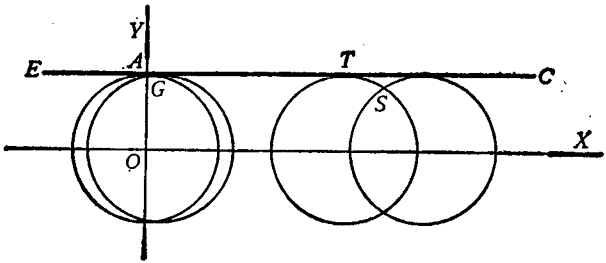


图5

愈接近于 A 点。当 t 趋于0时，G 点就趋于 A 点且以 A 点为极限。这就说明了这里的切点 A 不是别的，正是相邻二圆的交点 G 的极限。在一般的情况下，设两圆相邻，第一个圆的方程为 $(x-t)^2+y^2=1$，第二个圆的方程为 $(x-t')^2+y^2=1$，如果 t' 和 t 相差很小，这两个圆就靠得很近。而它们的交点 S 就和第一圆与直线 EC 相切的切点 T 靠得很近。当 t' 趋于 t 时，第二个圆就趋于第一个圆，它们的交点 S 就要趋于第一个圆与直线 EC 相切的切点 T 且以 T 点为极限。包络 EC 就是这样的切点 T 的轨迹。因此，要想求这些圆的包络，只要求族中相邻两圆的交点的极限，就是族中某一圆与包络的切点，然后再求出这个切点的轨迹就行了。这样，我们得到普遍的方法如下：

设曲线族中相邻两曲线的方程为

$$\begin{cases} f(x,y,t)=0, & (5) \\ f(x,y,t')=0, & (6) \end{cases}$$

将(5)、(6)两式联立，得到一个方程组。解这个方程组，设答案为

$$x=\xi(t,t'), y=\eta(t,t')。\qquad (7)$$

(7)式就是相邻两曲线(5)和(6)的交点坐标。因为曲线(6)要逐渐趋近于曲线(5)，最后重合于曲线(5)，在这个过程中，曲线(6)的方程必然连续地改变，最后与曲线(5)的方程完全相同。因此必须而且只须

$$|t-t'|<e,$$

这里，e 是预先指定的很小的一个正数。为了行文简便，我们把这个过程说成当曲线(6)趋于曲线(5)时，t' 就趋于 t，并以 t 为极限。设此时(7)式变成

$$x=\phi(t), y=\psi(t), \qquad (8)$$

(8)式就是曲线(5)和包络的切点的坐标。从(8)式中消去 t，设结果为

$$F(x, y)=0 \qquad (9)$$

(9)式就是包络的方程了。实际运算时，往往不必将(7)式全部求出，只要先求出其中的一个，例如 $x=\xi(t,t')$，马上就可以求它的极限而得 $x=\phi(t)$。再将 $x=\phi(t)$ 代回(5)式，就可以求出 $y=\psi(t)$ 了。

其实，(8)式就是包络的参数方程。有时参数 t 不容易消去，在这种情况下，可以将(8)式作为所求的答案。

第二法 有时(5)、(6)两式联立所得的方程组比较麻烦，不容易解，我们也可以将它们相减，得

$$f(x,y,t)-f(x,y,t')=0。\qquad (10)$$

容易看出，凡是适合于(5)式和(6)式的 x、y 的值，一定适合于(10)式。所以曲线(10)必然通过曲线(5)和曲线(6)的交点。当 t' 趋于 t 时，设(10)式变为

$$f'(x,y,t)=0,\qquad (11)$$

曲线(11)必然通过曲线(5)与包络相切的切点。因此，将(5)式和(11)式联立，得方程组

$$\begin{cases} f(x,y,t)=0, & (12)\\ f'(x,y,t)=0。 & (13)\end{cases}$$

解这个方程组，设所得答案为

$$x=\phi(t),\quad y=\psi(t)。\qquad (14)$$

(14)式也就是曲线(5)与包络相切的切点的坐标了。以后消去 t 或不消去 t 都可以，道理与第一法相同。

第 三 法 再仔细想一想，就会发现第二法还可以化简。因为(14)式无非是由参数 t 的变化定出 x，y 的轨迹，而(12)及(13)两式中的参数 t 变化时，照样也能定出 x，y 的轨迹。既然这样，又何必先从(12)及(13)两式求出(14)式，多费一番手脚呢？干脆从(12)及(13)两式中消去参数 t 不也是一样吗？所以，只要运算时方便的话，就可以直接从(12)及(13)两式中消去参数 t，所得结果就是所求包络的方程。

§3. 一个常用的极限 在以后各章里，经常遇到求极限的问题。其中大多数的极限，都可以用代入法求得。只有一个极限，即

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{\alpha}{\sin\alpha}=1,$$

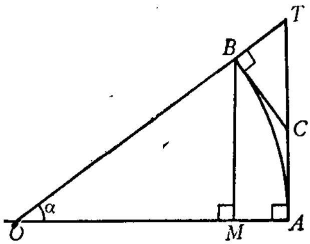


图 6

需要预先证明一下，以便后面应用。

〔**证**〕 作一条半径为1的弧AB（图6），设∠AOB＝α（以弧度计算），则AB的长也等于α。作$BM\perp OA$，又过A作弧AB的切线，交OB的延长线于T。则

$$\sin\alpha=\frac{BM}{OB}=BM,$$

$$tg\alpha=\frac{AT}{OA}=AT,$$

再作BC切弧AB于B，交AT于C。容易看出，

$$BM<\overset{\frown}{AB},$$

$$\overset{\frown}{AB}<AC+BC,\text{而}\quad BC>CT,$$

$$\therefore\ \overset{\frown}{AB}<AC+CT,$$

$$\therefore\ \overset{\frown}{AB}<AT$$

即 $$BM<\overset{\frown}{AB}<AT,$$

也就是 $\sin\alpha<\alpha<tg\,\alpha$。

除以$\sin\alpha$，得

$$1<\frac{\alpha}{\sin\alpha}<\frac{1}{\cos\alpha}$$

就是说，$\frac{\alpha}{\sin\alpha}$的值恒在1和$\frac{1}{\cos\alpha}$之间。但当$\alpha$趋于

0时，$\cos\alpha$ 的值趋于1，所以，当 α 趋于零时，$\frac{\alpha}{\sin\alpha}$的值只能趋于1。

由此可知，$\frac{\theta-\theta'}{\sin(\theta-\theta')}$和$\frac{\frac{\theta-\theta'}{2}}{\sin\frac{\theta-\theta'}{2}}$两式以及它们的倒数，当$\theta'$趋于 θ 时，它们的极限都是1。这个结果是以后常常要用的。

第一章　直线族的包络

§4. **已知方程的直线族的包络** 如果已经知道直线族的方程，并且这个方程中只含有一个参数，那么，我们立刻就可以用绪言中所说的方法求它的包络，而不必先作解析几何方面的其他计算。这种情形是最简单的，所以我们就从这种情况开始。

〔**例1**〕 求直线族

$$y=3t^2x-2t^3 \qquad (1)$$

的包络，t 是参数（图7）。

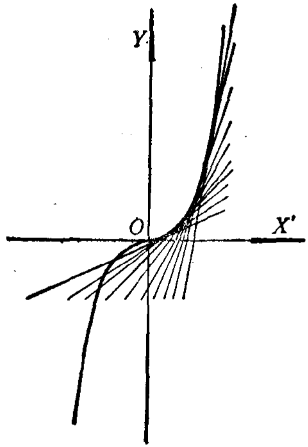


图7

〔**解**〕 设和直线(1)相邻的另一条直线的方程是

$$y=3t'^2x-2t'^3, \qquad (2)$$

将(1)式和(2)式联立起来，就得到一个方程组、解这个方程组，得

$$\begin{cases} x=\dfrac{2(t^2+tt'+t'^2)}{3(t+t')}, & (3)\\[2ex] y=\dfrac{2t^2t'^2}{t+t'}。 & (4)\end{cases}$$

当直线(2)趋近于直线(1)时，t'趋于t，并以t为极限。用t代替(3)、(4)两式中的t'，得

$$\begin{cases} x=t\ ,\\ y=t^3, \end{cases}$$

消去 t，得

$$y=x^3。$$

这就是所求的包络。它是一条立方抛物线。

〔**例2**〕 求直线族

$$y=x\cos\theta+\sin\theta-\theta\cos\theta。\qquad (1)$$

的包络，θ 为参数(图8)。

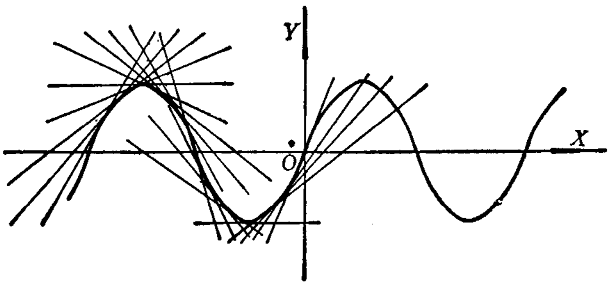


图8

〔**解**〕 设和直线(1)相邻的另一条直线的方程为

$$y=x\cos\theta'+\sin\theta'-\theta'\cos\theta'。\qquad (2)$$

将(1)式和(2)式联立，得一方程组。解这个方程组时，如果直接从(1)式减去(2)式，先消去 y，虽可求出 x，但当 θ' 趋于 θ 时，求

$$\lim_{\theta\to\theta}(\theta\cos\theta-\theta'\cos\theta')$$

比较麻烦(这种方法在例3中再讲)，所以我们现在要先消去x。为此，将(1)式乘以 $\cos\theta'$，将(2)式乘以 $\cos\theta$，得

$$y\cos\theta'=x\cos\theta\cos\theta'+\sin\theta\cos\theta'-\theta\cos\theta\cos\theta',$$

$$y\cos\theta=x\cos\theta\cos\theta'+\cos\theta\sin\theta'-\theta'\cos\theta\cos\theta'。$$

相减，得

$$y(\cos\theta'-\cos\theta)=\sin\theta\cos\theta'-$$

$$-\cos\theta\sin\theta'-(\theta-\theta')\cos\theta\cos\theta',\qquad (3)$$

这时，如果就令θ'趋于θ，用θ代替上式中的θ'，就要得到$y\cdot 0=0$的恒等式。所以，必须先作下列恒等变形：

从三角学中的和差化积公式得知

$$\cos\theta'-\cos\theta=2\sin\frac{\theta+\theta'}{2}\sin\frac{\theta-\theta'}{2}; \tag{4}$$

又从三角学中的二角和差公式得知

$$\sin\theta\cos\theta'-\cos\theta\sin\theta'=\sin(\theta-\theta'); \tag{5}$$

将(4)式和(5)式代入(3)式，得

$$\begin{aligned}2y\sin\frac{\theta+\theta'}{2}\sin\frac{\theta-\theta'}{2}\\=\sin(\theta-\theta')-(\theta-\theta')\cos\theta\cos\theta'。\end{aligned} \tag{6}$$

再从三角学中的半角公式得知

$$\sin(\theta-\theta')=2\sin\frac{\theta-\theta'}{2}\cos\frac{\theta-\theta'}{2}。 \tag{7}$$

将(7)式代入(6)式后，两边除以$2\sin\dfrac{\theta-\theta'}{2}$，得

$$y\cdot\sin\frac{\theta+\theta'}{2}=\cos\frac{\theta-\theta'}{2}-\frac{\dfrac{\theta-\theta'}{2}}{\sin\dfrac{\theta-\theta'}{2}}\cos\theta\cos\theta'。$$

这时y固然可以求出，但将y的值代入(1)式去求x时，仍旧很繁。所以我们先求当θ'趋于θ时，y的极限。

当直线(2)趋近于直线(1)时，θ'趋于θ，并以θ为极限。由绪言第三节可知，上式中$\dfrac{\dfrac{\theta-\theta'}{2}}{\sin\dfrac{\theta-\theta'}{2}}$的极限为1，故上式变为

$$y\cdot\sin\theta=1-\cos^2\theta$$

$$=\sin^2\theta。$$

$$\therefore \quad y=\sin\theta。 \qquad (8)$$

将(8)式代入(1)式，得

$$\sin\theta=x\cos\theta+\sin\theta-\theta\cos\theta,$$

$$\therefore x=\theta。 \qquad (9)$$

将(9)式代入(8)式，得

$$y=\sin x。$$

因此，所求的包络是大家熟知的正弦曲线。

〔**例3**〕 求直线族

$$x(\theta\cos\theta+\sin\theta)+y(\theta\sin\theta-\cos\theta)=a\theta^2 \qquad (1)$$

的包络，θ 为参数(图9)。

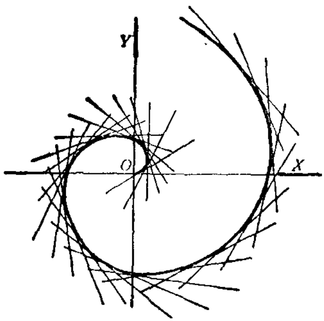


图9

〔**解**〕 设和直线(1)相邻的另一条直线的方程为

$$x(\theta'\cos\theta'+\sin\theta')+$$
$$+y(\theta'\sin\theta'-\cos\theta')$$
$$=a\theta'^2。 \qquad (2)$$

将(1)式和(2)式联立起来，就得到一个方程组。如果用普通的加减或代入消元法解这个方程组，都比较麻烦。因此，我们来用绪言中所说的第二法。

从(1)式减去(2)式，得

$$x(\theta\cos\theta-\theta'\cos\theta'+\sin\theta-\sin\theta')+y[\theta\sin\theta-\theta'\sin\theta'-$$
$$-(\cos\theta-\cos\theta')]=a(\theta^2-\theta'^2)。 \qquad (3)$$

为了使$\theta\cos\theta-\theta'\cos\theta'$和$\theta\sin\theta-\theta'\sin\theta'$化成便于求极限的形式，必须用补项法：

$$\theta\cos\theta-\theta'\cos\theta'=\theta\cos\theta-\theta\cos\theta'+\theta\cos\theta'-\theta'\cos\theta'$$