

中等气象学校交流讲义

初等数学

下 册

北京气象专科学校编

气象、高空气象、
海洋气象农业气象 专业用



农业出版社

中等气象学校交流讲义

初 等 数 学

下 册

北京气象专科学校編

气象、高空气象、
海洋气象、农业气象 专业用

农 业 出 版 社

中等气象学校交流讲义
初等数学
下 册

北京气象专科学校编

农 业 出 版 社 出 版

北京西总布胡同七号

(北京市书刊出版业营业登记证出字第 106 号)

新华书店科技发行所发行 各地新华书店经售

东 单 印 刷 厂 印 刷 装 订

统一书号 -13144·84

1961年8月北京翻型

开本 787×1092毫米

1961年8月初版

三十二分之一

字数 185千字

1961年8月北京第一次印刷

印张 八又四分之三 纸张二

印数 1—2,500册

定价 (5) 六角四分

目 录

第八章 数列	275
§ 1. 数列的基本概念	275
§ 2. 等差数列	277
§ 3. 等比数列	281
小 结	286
思考题	287
习题	287
第九章 指数函数及对数函数	289
§ 1. 无理指数幂的概念	289
§ 2. 指数函数和对数函数	290
§ 3. 指数函数的图象及对数函数的图象	294
§ 4. 底大于 1 的指数函数和对数函数的性质	297
§ 5. 积、幂、分式及根的对数及对数式的还原	298
§ 6. 对数换底公式	301
§ 7. 十进常用对数的性质	302
§ 8. 对数的变形	306
§ 9. 对数表的结构和使用	307
§ 10. 首数是负数的对数的运算及应用对数进行计算	310
§ 11. 指数方程和对数方程	317
小 结	320
思考题	320
习题	321
第十章 近似计算方法	326

I. 近似計算的一般概念	326
§ 1. 近似計算中的几个术语	326
§ 2. 近似数的四则运算	331
小結	335
习题	336
II. 計算尺	337
§ 3. 計算尺的构造和简单原理	338
§ 4. 計算尺的基本运算方法	341
小結	351
习题	351
III. 計算图(諾模图)	352
§ 5. 图尺方程与图尺的繪制	356
§ 6. 平行图尺的算图	357
§ 7. 几个初等几何定理的算图	365
小結	368
习题	369
第十一章 加法定理及其推广; 解斜三角形	370
§ 1. 余弦定理及加法定理	370
§ 2. 倍角的三角函数	382
§ 3. 半角的三角函数	388
§ 4. 变换三角函数的和与差为乘积	394
§ 5. 三角函数的积化和差	398
§ 6. 三角方程	404
§ 7. 三角函数对数表	407
§ 8. 斜三角形基本元素間的相互关系	409
§ 9. 斜三角形的解法	413
§ 10. 斜三角形的应用問題	417
小結	421
习题	422

第十二章 三角函数的基本性质及其图象	430
§ 1. 自变量用数表示的三角函数和它们的定义域	430
§ 2. 三角函数的周期性与奇偶性	431
§ 3. 三角函数的递增和递减	435
§ 4. 三角函数的图象	438
§ 5. 反三角函数的概念	452
小结	470
习题	473
第十三章 复数	476
§ 1. 虚数与复数	476
§ 2. 复数的几何表示	477
§ 3. 复数的运算	480
§ 4. 复数的三角形式及化复数 $a + bi$ 为三角形式	485
§ 5. 三角形式复数的运算	488
小结	498
习题	500
第十四章 排列、组合、二项式定理和概率初步	503
§ 1. 排列	503
§ 2. 组合	508
§ 3. 数学归纳法	512
§ 4. 二项式定理	516
§ 5. 概率的基本概念	517
§ 6. 互斥事件与加法法则	521
§ 7. 条件概率与乘法法则	523
小结	526
思考题	527
习题	527
习题答案	530

第八章 数 列

§ 1. 数列的基本概念

在讲函数时,自变量在定义域内是可以任意取的。但实际问题中,有些函数的自变量却只限于按次序地取自然数的数值。

例如,邮电局规定本埠平信邮资每封4分。1封信的邮资是4分,那么2封信的邮资是8分,3封信的邮资是12分,依此类推, n 封信的邮资是 $4n$ 分。这样交信的封数和邮资之间有下列的函数关系:

封数为 $1, 2, 3, 4, \dots, n, \dots$ 。

邮资的分数为 $4, 8, 12, 16, \dots, 4n, \dots$ 。

又如庄子天下篇上有一段话:“一尺之棰,日取其半,万世不竭。”

其意思是一根一尺长的木棍,第一天锯掉一半之后,剩下 $\frac{1}{2}$ 尺,第二天又锯掉余下的一半之后,剩下 $\frac{1}{4}$ 尺,第三天又锯掉余下的一半之后,剩下的 $\frac{1}{8}$ 尺,依此类推,第 n 次锯掉以前余下的一半之后,就剩下 $\frac{1}{2^n}$ 尺,这样锯的天数和棍的剩余之间有下列函数关系:

天数是: $1, 2, 3, 4, \dots, n \dots$ 。

棍的剩余数: $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots, \frac{1}{2^n} \dots$ 。

由上面两例可看出自变量的取值,是按一定次序的自然数,而函数值也是有一定次序排列的一串数,为了表达这种函数的特性有如下的规定:

以自然数的次序为自变量取值的定义域的函数,叫做数列。数列中的每一个函数值,叫做数列的项。数列一般的第一项表示为 x_1 ; 第二项表示为 x_2 ; \dots 第 n 项表示为 x_n 等等。第 n 项叫一般项(或通项)。这样数列一般表示为:

$$x_1, x_2, x_3, x_4, \dots, x_n \dots,$$

根据数列变化的规律,有的数列的一般项可以用公式表示,这个公式叫做一般项公式(或通项公式)。

例如:例1的通项公式是 $x_n = 4n$, 例2是 $x_n = \frac{1}{2^n}$ 。反之,如果已知通项公式,依次取 $n = 1, 2, 3 \dots$ 就得到这个数列的各项。

例1. 已知数列的通项公式 $x_n = 2n$ 。

解: 依次取 $n = 1, 2, 3, \dots$ 代入通项公式就得数列:

$$2, 4, 6, 8, 10, \dots, 2n, \dots,$$

例2. 写出通项式为 $x_n = \frac{1}{2n-1}$ 的数列各项为: $1, \frac{1}{3},$

$$\frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \dots, \frac{1}{2n-1} \dots,$$

例3. 已知数列 $-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \frac{1}{16}, -\frac{1}{32} \dots$, 写出数列的通项公式:

解：先不考虑数列各项前的符号，其通项公式应为 $x_n = \frac{1}{2^n}$ ，而负号出现在第一、第三、……奇项时，故通项公式可写为 $x_n = (-1)^n \frac{1}{2^n}$ 。

以上三例看出在例 1 中从第二项起，每一项都大于它前面的项，以后叫这一类的数列为**递增数列**。如例 2 则每一项都小于它前面的一项数列叫**递减数列**。

又如例 3 从第二项起，有些项大于它前面的项，有些项又小于前面的项，这样的数列叫做**摆动数列**。

§ 2. 等差数列

1. 公差通项公式：

我們仔細觀察下面二个数列：

$$1, 3, 5, 7, 9, 11, \dots,$$

$$10, 5, 0, -5, -10, -15, \dots$$

就发现它們組成的規律，有共同性質，即任意一項与相邻的前一項之差是一常数。

在上面第一例这个常数等于

$$3-1=5-3=9-7=\dots=2。$$

第二例子，

$$15-10=-5=0-5=-10-(-5)=\dots=-5。$$

我們把这样的数列叫做**等差数列**，这个常数叫**公差**，用符号 d 表示。

如上例 1、例 2 的公差分别为 2，-5。

上例也看出,如果公差 $d > 0$ 数列是递增的, $d < 0$ 的数列是递减的。 $d = 0$ 的数列各项都相等,这样的数列研究等差数列没有什么意义。

设数列 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n \dots$ 是等差数列,它们的公差是 d , 由定义可知:

$$\begin{aligned} a_2 - a_1 &= d, & \therefore a_2 &= a_1 + d, \\ a_3 - a_2 &= d, & \therefore a_3 &= a_2 + d = a_1 + d + d = a_1 + 2d, \\ a_4 - a_3 &= d, & \therefore a_4 &= a_3 + d = a_1 + 2d + d = a_1 + 3d, \\ & \dots\dots\dots, & & \dots\dots\dots, \end{aligned}$$

一般地说,

$$\begin{aligned} a_n - a_{n-1} &= d, \\ a_n &= a_1 + (n-2)d + d = a_1 + (n-1)d. \end{aligned}$$

把 $a_n = a_1 + (n-1)d$ 叫做等差数列的通项公式,利用它可以由首项与公差求等差数的任何一项。

例 1. 求等差数列 20, 17, 14, 11……的第 11 项。

解: 已知 $a_1 = 20$, $d_2 = 17 - 20 = -3$ 。

$$\therefore a_{11} = 20 + (11-1)(-3) = -10。$$

例 2. 已知一等差数列的第四项等于 -1, 第十五项等于 19, 试求此数列。

解: 据定义要求通项公式, 故先求首项与公差。已知

$$a_4 = -1, a_{15} = 19。$$

据一般通项公式得

$$a_4 = a_1 + 3d, \quad a_{15} = a_1 + 14d$$

所以

$$a_1 + 3d = -1 \quad (1)$$

$$a_1 + 14d = 19 \quad (2)$$

解①②两式组成的方程组 $a = -7, d = 2$, 故所求等差数列为 $-7, -5, -3, -1, \dots$ 。

2. 等差中项:

在不少的应用问题中, 知道某一等差数列的第一项和第 n 项, 在其中间插入若干个项。对这类的通项叫做等差中项, 也就是等差数列中任意两已知项间的各项, 都叫做这两项的等差中项。要解此问题, 先求出公差 d , 然后依次写出各项。

如在任意两数 a 和 b 中, 插入 K 个等差中项。则就把 a 看成是所求等差数列的第一项, 那么 b 就是它的第 $K+2$ 项。因此据通项公式有:

$$b = a + (K + 2 - 1)d,$$

$$d = \frac{b - a}{K + 1}.$$

所插入的各项是

$$a + d, a + 2d, a + 3d, \dots, a + Kd.$$

例: 在同一轴承上安装五个滑轮, 它们的直径成等差数列, 最小和最大的滑轮直径各为 120 厘米与 216 厘米。求中间三个滑轮的直径。

解: 由题已知

$$a_1 = 120, K = 3, a_{K+2} = a_5 = 216.$$

代入公式

$$d = \frac{b - a}{K + 1} \quad \therefore d = \frac{216 - 120}{4} = 24.$$

所以中间三个滑轮的直径是

$$120 + 24 = 144 \text{ 厘米},$$

$$120 + 2 \times 24 = 168 \text{ 厘米},$$

$$120 + 3 \times 24 = 192 \text{ 厘米。}$$

或者

$$120 + 24 = 144 \text{ 厘米,}$$

$$144 + 24 = 168 \text{ 厘米,}$$

$$168 + 24 = 192 \text{ 厘米。}$$

3. 等差數列前 n 項和的公式:

設有一等差數列

$$2, 5, 8, 11, 14, 17, 20, 23。$$

把此數列中與首末等距離的兩項相加,得:

$$2 + 23 = 25, \quad 5 + 20 = 25,$$

$$8 + 17 = 25, \quad 11 + 14 = 25。$$

由此看出等差級數,與首末兩項等距離的兩項之和等於首末兩項之和,容易驗證,對一般情形,也是根據此道理,來推得等差數列前 n 項和的公式。設 S_n 表示這個和,則

$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + a_n \quad (1)$$

又

$$S_n = a_n + a_{n-1} + \cdots + a_2 + a_1 \quad (2)$$

①+②得

$$\begin{aligned} 2S_n &= (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + \cdots \\ &\quad \cdots + (a_{n-1} + a_2) + (a_n + a_1) \end{aligned} \quad (3)$$

③式右端每一項都應等於 $a_1 + a_n$ 共有 n 項。

故

$$2S_n = (a_1 + a_n) \times n$$

即

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n) \times n}{2}$$

也就是說，等差數列前 n 項的和等於首末兩項和的一半的 n 倍。

如以通項公式 $a_n = a_1 + (n-1)d$ 代入上面公式，則可寫成另外一種形式：

$$S_n = \frac{a_1 + a_1 + (n-1)d}{2} \times n = \frac{2a_1 + (n-1)d}{2} \times n。$$

例 1. 求等差數列 $-25, -22, -17, -12, \dots$ 前 5 項的和。

解： 已知

$$a_1 = -25, \quad n = 21, \quad d = -22 - (-25) = 3,$$

代入公式得

$$S_{21} = \frac{2(-25) + (21-1) \times 3}{2} \times 21 = 105。$$

例 2. 一扇形劇院共有 31 排座位，已知每排比它前一排多 2 個座，最後一排有 80 個座位，求此劇院滿座時可容納多少人？

解： 由題意知 $d = 2, n = 31, a_n = 80$ ，代入通項公式與前 n 項和的公式，得：

$$80 = a_1 + (31-1) \times 2, \quad a_1 = 20,$$

$$S_n = \frac{(20+80)}{2} \times 31 = 1,550。$$

所以此劇院滿座時可容納 1,550 人。

§ 3. 等比數列

1. 公比與通項公式：

現在再來考察這樣二種特殊數列，如：

$$1, -3, 9, -27, 81, \dots, \\ \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots, \frac{1}{2^n} \dots$$

发现它们组成的规律,有共同的特点,由第二项起任意一项与它的前面一项的商是一个常数。

在第一个例子,这个常数是

$$-3 \div 1 = 9 \div -3 = \dots = -3。$$

第二个例子中,这个常数是

$$\frac{1}{4} \div \frac{1}{2} = \frac{1}{8} \div \frac{1}{4} = \dots = \frac{1}{2}。$$

对于这样的数列叫做等比数列,这常数叫公比。一般用符号 q 表示,如上面两例公差分别为 -3 ,与 $\frac{1}{2}$ 。

与等差数列有一样性质,由公比的正负与大小,可解决是递增、递减数列。

设数列 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ 是等比数列,它的公比是 q 。由定义可知

$$\frac{a_2}{a_1} = q, \quad \therefore a_2 = a_1 q,$$

$$\frac{a_3}{a_2} = q, \quad \therefore a_3 = a_2 q = a_1 q q = a_1 q^2,$$

$$\frac{a_4}{a_3} = q, \quad \therefore a_4 = a_3 q = a_1 q^1 q = a_1 q^3,$$

一般地,

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = q \cdots \therefore a_n = a_{n-1} q = a_1 q^{n-2}$$

$$q = a q^{n-1}。$$

把 $a_n = a_1 q^{n-1}$ 叫做等比数列的通项公式,利用它可以用

首項与公差求等比数列的任何一項。

例 1. 求等比数列 $2, -\sqrt{2}, 1, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \dots$ 中的第 10 項。

解: 已知 $a_1 = 2, q = \frac{-\sqrt{2}}{2}, n = 10$, 代入通項公式。

$$\therefore a_{10} = a_1 q^9 = 2 \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^9 = -\frac{\sqrt{2}}{16}.$$

例 2. 已知一等比数列第一項是 $\frac{1}{8}$, 第六項是 4, 求此数列。

解: 已知, $a_6 = 4, a_1 = \frac{1}{8}$, 代入公式得

$$4 = \frac{1}{8} q^{6-1}, \quad q^5 = 32, \quad \therefore q = 2;$$

故所求数列为 $\frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1, 2, \dots$ 。

2. 等比中項:

等比数列中任意兩項間的各项, 叫做这两項的等比中項。

如在任意两数 a 和 b 中要插入 k 个等比中項, 只要求出公比, 立即可写出插入的各项。把 a 看成是第一項, 那么 b 是 $k+2$ 項, 因此用通項公式有:

$$b = aq^{k+1} \quad \therefore q = \pm \sqrt[k+1]{\frac{b}{a}}$$

插入的各项是:

$$aq, aq^2, aq^3, \dots, aq^k.$$

例: 設計一套齒輪, 共有五个, 各齒輪的直径依次以相等的倍数增大, 其中最小的齒輪直径为 5 厘米, 最大的为

80 厘米,求其他各齒輪的直徑。

解: 由題意知 $a = 5$, $b = 80$, $k = 3$, 代入公式得

$$q = \sqrt[4]{\frac{80}{5}} = \sqrt[4]{16} = 2$$

所以各齒輪的直徑依次為 5, 10, 20, 40, 80 (厘米)。

3. 等比數列前 n 項和的公式:

用 S_n 來表示等比數列前 n 項的和, 那麼

$$\begin{aligned} S_n &= a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n = a_1 + a_1q \\ &\quad + a_1q^2 + \cdots + a_1q^{n-1} \end{aligned} \quad (1)$$

(1) 兩端同乘以 q , 得

$$S_nq = a_1q + a_1q^2 + a_1q^3 + \cdots + a_1q^n \quad (2)$$

(1) 減 (2) 得

$$\begin{aligned} S_n(1 - q) &= a_1 - a_1q^n = a_1(1 - q^n), \\ \therefore S_n &= \frac{a_1(1 - q^n)}{1 - q} \quad (q \neq 1). \end{aligned}$$

如 $q = 1$ 時, 則各項皆相等, 沒有研究價值。

例 1. 求等比數列 $2, -1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, \cdots$ 前 6 項之和。

解: 已知 $a_1 = 2$, $q = -\frac{1}{2}$, $n = 6$,

$$\begin{aligned} \therefore S_n &= \frac{2\left[1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^6\right]}{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{2\left(1 - \frac{1}{64}\right)}{\frac{3}{2}} \\ &= \frac{\frac{63}{32}}{\frac{3}{2}} = \frac{21}{16}. \end{aligned}$$

例 2. 某温度表检定室, 在 3 月份检定了温度表 2,500 枝。他们计划在第二季度逐月增产 20%, 那末到 6 月底为止的四个月中, 他们一共检定了多少支温度表?

解: 逐月增产 20%, 说明每月的产量是前一个月的产量的 $(1 + 20\%)$ 倍, 所以产量是按等比数列上升的。而且已知 $a_1 = 2,500$, $n = 4$, $q = 1 + 20\% = \frac{6}{5}$ 。

故

$$\begin{aligned} S_4 &= \frac{2,500 \left[1 - \left(\frac{6}{5} \right)^4 \right]}{1 - \frac{6}{5}} = \frac{2,500 \left[\left(1 + \frac{6}{5} \right)^4 - 1 \right]}{\frac{6}{5} - 1} \\ &= \frac{2,500 \left[\frac{64 - 54}{54} \right]}{\frac{1}{5}} = 2,500 \times \frac{(6^2)^2 - (5^2)^2}{5^3} \\ &= 20 \times 61 \times 11 = 13,420 \text{ 支。} \end{aligned}$$

所以这个温度表检定室从 3 月到 6 月底止的四个月中共可检定温度表 13,420 支。

例 3. 等比数列前三项和等于 6, 第二, 三, 四项的和等于 -3, 求这个数列。

解: 按题意, 得方程组

$$\begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 = 6 \\ a_2 + a_3 + a_4 = -3 \end{cases}$$

用第一项表示数列的各项, 上面方程组就可以写成:

$$\begin{cases} a_1 + a_1q + a_1q^2 = 6 \\ a_1q + a_1q^2 + a_1q^3 = -3 \end{cases} \quad (1)$$