中等气象学校交流讲义

初等数学

下册

北京气象専科学校編

气象、高空气象、海洋气象农业气象 专业用

农业出版社

中等气象学校交流讲义

初 等 數 学

下 册

北京气象専科学校編

气象、高空气象、海洋气象、農业气象 専业用

农 业 出 版 社

中等气象学校交流講义

初 等 数 学

下 册

北京气象专科学校編

农 业 出 版 社 出 版

北京西总布胡同七号

(北京市书刊出版业营业許可証出字第 106 号)

新华书店科技发行所发行　各地新华书店經售

东 單 印刷 厂印刷装訂

统一书号 13144·84

1961年8月北京制型

1961年8月初版

1961年8月北京第一次印刷

印数 1—2,000 册

开本 787×1092 毫米 三十二分之一

字数 185 千字

印张 八又四分之三　插页 二

定价 (5) 六角四分

目 录

第八章　数　　列

§1. 数列的基本概念

在講函数时，自变量在定义域内是可以任意取的。但实际問題中，有些函数的自变量却只限于按次序地取自然数的数值。

例如，邮电局規定本埠平信邮資每封4分。1封信的邮資是4分，那么2封信的邮資是8分，3封信的邮資是12分，依此类推，n封信的邮資是$4n$分。这样交信的封数和邮資之間有下列的函数关系：

封数为 $1, 2, 3, 4, \cdots, n, \cdots$。

邮資的分数为 $4, 8, 12, 16, \cdots, 4n, \cdots$。

又如庄子天下篇上有一段話："一尺之棰，日取其半，万世不竭。"

其意思是一根一尺長的木棍，第一天鋸掉一半之后，剩下$\frac{1}{2}$尺，第二天又鋸掉余下的一半之后，剩下$\frac{1}{4}$尺，第三天又鋸掉余下的一半之后，剩下的$\frac{1}{8}$尺，依此类推，第n次鋸掉以前余下的一半之后，就剩下$\frac{1}{2^n}$尺，这样鋸的天数和棍的剩余之間有下列函数关系：

天数是：$1, 2, 3, 4, \cdots, n\cdots$。

棍的剩余数：$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \cdots, \frac{1}{2^n}\cdots$。

由上面两例可看出自变量的取值，是按一定次序的自然数，而函数值也是有一定次序排列的一串数，为了表达这种函数的特性有如下的规定：

以自然数的次序为自变量取值的定义域的函数，叫做数列。数列中的每一个函数值，叫做数列的项。 数列一般的第一项表示为 x_1；第二项表示为 x_2；$\cdots$ 第 n 项表示为 x_n 等等。第 n 项叫一般项(或通项)。这样数列一般表示为：

$$x_1, x_2, x_3, x_4, \cdots, x_n\cdots,$$

根据数列变化的规律，有的数列的一般项可以用公式表示，这个公式叫做一般项公式(或通项公式)。

例如：例 1 的通项公式是 $x_n = 4n$，例 2 是 $x_n = \frac{1}{2^n}$。反之，如果已知通项公式，依次取 $n = 1, 2, 3\cdots$就得到这个数列的各项。

例 1. 已知数列的通项公式 $x_n = 2n$。

解： 依次取 $n = 1, 2, 3, \cdots$代入通项公式就得数列：

$$2, 4, 6, 8, 10, \cdots, 2n, \cdots,$$

例 2. 写出通项式为 $x_n = \frac{1}{2n-1}$ 的数列各项为：$1, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \cdots, \frac{1}{2n-1}\cdots,$

例 3. 已知数列 $-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \frac{1}{16}, -\frac{1}{32}\cdots$，写出数列的通项公式：

解: 先不考慮数列各項前的符号，其通項公式应为 $x_n=\frac{1}{2^n}$，而負号出現在第一、第三、……奇項时，故通項公式可写为 $x_n=(-1)^n\frac{1}{2^n}$。

以上三例看出在例 1 中**从第二項起，每一項都大于它前面的項，以后叫这一类的数列为递增数列**。如例 2 **則每一項都小于它前面的一項数列叫递减数列**。

又如例 3 **从第二項起，有些項大于它前面的項，有些項又小于前面的項，这样的数列叫做摆动数列**。

§2. 等差数列

1. 公差通項公式：

我們仔細观察下面二个数列：

$$1,3,5,7,9,11\cdots\cdots,$$

$$10,5,0,-5,-10,-15\cdots\cdots。$$

就发現它們組成的規律，有共同性質，即**任意一項与相邻的前一項之差是一常数**。

在上面第一例这个常数等于

$$3-1=5-3=9-7=\cdots\cdots=2。$$

第二例子，

$$15-10=-5=0-5=-10-(-5)=\cdots=-5。$$

我們把这样的数列叫做等差数列，这个常数叫公差，用符号 d 表示。

如上例 1、例 2 的公差分别为 $2,-5$。

上例也看出，如果公差 $d>0$ 数列是递增的，$d<0$ 的数列是递减的。$d=0$ 的数列各项都相等，这样的数列研究等差数列沒有什么意义。

設数列 $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n\cdots$ 是等差数列，它們的公差是 d，由定义可知：

$$a_2-a_1=d, \quad \therefore a_2=a_1+d,$$
$$a_3-a_2=d, \quad \therefore a_3=a_2+d=a_1+d+d=a_1+2d,$$
$$a_4-a_3=d, \quad \therefore a_4=a_3+d=a_1+2d+d=a_1+3d,$$
$$\cdots\cdots\cdots, \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

一般地說，

$$a_n-a_{n-1}=d,$$
$$a_n=a_1+(n-2)d+d=a_1+(n-1)d。$$

把 $a_n=a_1+(n-1)d$ 叫做等差数列的通項公式，利用它可以由首項与公差求等差数的任何一項。

例 1. 求等差数列 20, 17, 14, 11……的第 11 項。

解: 已知 $a_1=20$。$d_2=17-20=-3$。

$$\therefore a_{11}=20+(11-1)(-3)=-10。$$

例 2. 已知一等差数列的第四項等于 -1，第十五項等于 19，試求此数列。

解: 据定义要求通項公式，故先求首項与公差。已知

$$a_4=-1, \ a_{15}=19。$$

据一般通項公式得

$$a_4=a_1+3d_1, \quad a_{15}=a_1+14d$$

所以

$$a_1+3d=-1 \tag{1}$$
$$a_1+14d=19 \tag{2}$$

解①②两式組成的方程組 $a=-7$, $d=2$，故所求等差数列为 $-7, -5, -3, -1\cdots\cdots$。

2. 等差中項：

在不少的应用問題中，知道某一等差数列的第一項和第 n 項，在其中間插入若干个項。对这类的通項叫做等差中項，也就是等差数列中任意两已知項間的各項，都叫做这两項的等差中項。要解此問題，先求出公差 d，然后依次写出各項。

如在任意两数 a 和 b 中，插入 K 个等差中項。則就把 a 看成是所求等差数列的第一項，那么 b 就是它的第 $K+2$ 項。因此据通項公式有：

$$b=a+(K+2-1)d,$$

$$d=\frac{b-a}{K+1}。$$

所插入的各項是

$$a+d,\quad a+2d,\quad a+3d,\cdots,a+Kd。$$

例： 在同一軸承上安装五个滑輪，它們的直径成等差数列，最小和最大的滑輪直径各为 120 厘米与 216 厘米。求中間三个滑輪的直径。

解： 由題已知

$$a_1=120,\quad K=3,\quad a_{K+2}=a_5=216。$$

代入公式

$$d=\frac{b-a}{K+1}\quad \therefore d=\frac{216-120}{4}=24。$$

所以中間三个滑輪的直径是

$$120+24=144\text{ 厘米},$$

$$120+2\times 24=168\text{ 厘米},$$

$$120 + 3 \times 24 = 192 \text{ 厘米。}$$

或者

$$120 + 24 = 144 \text{ 厘米，}$$
$$144 + 24 = 168 \text{ 厘米，}$$
$$168 + 24 = 192 \text{ 厘米。}$$

3. 等差数列前 n 項和的公式：

設有一等差数列

$$2, 5, 8, 11, 14, 17, 20, 23。$$

把此数列中与首末等距离的两項相加，得：

$$2 + 23 = 25, \quad 5 + 20 = 25,$$
$$8 + 17 = 25, \quad 11 + 14 = 25。$$

由此看出**等差級数，与首末两項等距离的两項之和等于首末两項之和**，容易驗証，对一般情形，也是根据此道理，来推得等差数列前 n 項和的公式。設 S_n 表示这个和，則

$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots a_{n-1} + a_n \tag{1}$$

又

$$S_n = a_n + a_{n-1} + \cdots a_2 + a_1 \tag{2}$$

①＋②得

$$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + \cdots$$
$$\cdots (a_{n-1} + a_2) + (a_n + a_1) \tag{3}$$

③式右端每一項都应等于 $a_1 + a_n$ 共有 n 項。

故

$$2S_n = (a_1 + a_n) \times n$$

即

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n) \times n}{2}$$

也就是說，等差數列前 n 項的和等于首末两項和的一半的 n 倍。

如以通項公式 $a_n = a_1 + (n-1)d$ 代入上面公式，則可写成另外一种形式：

$$S_n = \frac{a_1 + a_1 + (n-1)d}{2} \times n = \frac{2a_1 + (n-1)d}{2} \times n。$$

例 1. 求等差数列 $-25, -22, -17, -18, \cdots\cdots$ 前 5 項的和。

解： 已知

$a_1 = -25, \quad n = 21, \quad d = -22 - (-25) = 3,$

代入公式得

$$S_{21} = \frac{2(-25) + (21-1) \times 3}{2} \times 21 = 105。$$

例 2. 一扇形剧院共有 31 排座位，已知每排比它前一排多 2 个座，最后一排有 80 个座位，求此剧院满座时可容納多少人？

解： 由題意知 $d = 2, n = 31, a_n = 80$，代入通項公式与前 n 項和的公式，得：

$$80 = a_1 + (31-1) \times 2, \quad a_1 = 20,$$

$$S_n = \frac{(20 + 80)}{2} \times 31 = 1,550。$$

所以此剧院满座时可容納 1,550 人。

§3. 等比数列

1. 公比与通項公式：

現在再来考察这样二种特殊数列，如：

$$1, -3, 9, -27, 81, \cdots\cdots,$$

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \cdots\cdots, \frac{1}{2^n}\cdots。$$

发現它們組成的規律，有共同的特点，由第二項起**任意一項与它的前面一項的商是一个常数。**

在第一个例子，这个常数是

$$-3 \div 1 = 9 \div -3 = \cdots\cdots = -3。$$

第二个例子中，这个常数是

$$\frac{1}{4} \div \frac{1}{2} = \frac{1}{8} \div \frac{1}{4} = \cdots\cdots = \frac{1}{2}。$$

对于这样的数列叫做等比数列，这常数叫公比。 一般用符号 q 表示，如上面两例公差分別为 -3，与 $\frac{1}{2}$。

与等差数列有一样性質，由公比的正負与大小，可解决是递增、递減数列。

設数列 $a_1, a_2, a_3\cdots\cdots a_n$ 是等比数列，它的公比是 q。由定义可知

$$\frac{a_2}{a_1} = q, \quad \therefore a_2 = a_1q,$$

$$\frac{a_3}{a_2} = q, \quad \therefore a_3 = a_2q = a_1qq = a_1q^2,$$

$$\frac{a_4}{a_3} = q, \quad \therefore a_4 = a_3q = a_1q^2q = a_1q^3,$$

一般地，

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = q\cdots\cdots \therefore \quad a_n = a_{n-1}q = a_1q^{n-2}$$

$$q = aq^{n-1}。$$

把 $a_n = a_1q^{n-1}$ 叫做等比数列的通項公式，利用它可以用

首項与公差求等比数列的任何一項。

例 1. 求等比数列 2, $-\sqrt{2}$, 1, $-\frac{1}{\sqrt{2}}$, ……中的第 10 項。

解: 已知 $a_1=2$, $q=\frac{-\sqrt{2}}{2}$, $n=10$, 代入通項公式。

$$\therefore a_{10}=a_1q^9=2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^9=-\frac{\sqrt{2}}{16}。$$

例 2. 已知一等比数列第一項是 $\frac{1}{8}$,第六項是 4,求此数列。

解: 已知, $a_6=4$, $a_1=\frac{1}{8}$,代入公式得

$$4=\frac{1}{8}q^{6-1},\quad q^5=32,\quad \therefore\quad q=2;$$

故所求数列为 $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, 1, 2……。

2. 等比中項:

等比数列中任意两項間的各項,叫做这两項的等比中項。

如在任意两数 a 和 b 中要插入 k 个等比中項, 只要求出公比, 立即可写出插入的各項。把 a 看成是第一項, 那么 b 是 $k+2$ 項,因此用通項公式有:

$$b=aq^{k+1}\quad\therefore\quad q=\pm\sqrt[K+1]{\frac{b}{a}}$$

插入的各項是:

$$aq,\ aq^2,\ aq^3,\ \cdots\cdots,\ aq^k。$$

例: 設計一套齿輪, 共有五个, 各齿輪的直径依次以相等的倍数增大, 其中最小的齿輪直径为 5 厘米, 最大的为

80 厘米，求其他各齿輪的直径。

解： 由題意知 $a=5$，$b=80$，$k=3$，代入公式得

$$q=\sqrt[4]{\frac{80}{5}}=\sqrt[4]{16}=2$$

所以各齿輪的直径依次为 5，10，20，40，80（厘米）。

3. 等比数列前 n 項和的公式：

用 S_n 来表示等比数列前 n 項的和，那么

$$S_n=a_1+a_2+a_3+\cdots\cdots+a_n=a_1+a_1q+a_1q^2+\cdots\cdots+a_1q^{n-1} \tag{1}$$

(1) 两端同乘以 q，得

$$S_nq=a_1q+a_1q^2+a_1q^3+\cdots\cdots+a_1q^n \tag{2}$$

(1)減(2)得

$$S_n(1-q)=a_1-a_1q^n=a_1(1-q^n),$$

$$\therefore\quad S_n=\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}(q\neq 1)。$$

如 $q=1$ 时，則各項皆相等，沒有研究价值。

例 1. 求等比数列 $2,-1,\frac{1}{2},-\frac{1}{4},\cdots\cdots$ 前 6 項之和。

解： 已知 $a_1=2$，$q=-\frac{1}{2}$，$n=6$，

$$\therefore\ S_n=\frac{2\left[1-\left(-\frac{1}{2}\right)^6\right]}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}=\frac{2\left(1-\frac{1}{64}\right)}{\frac{3}{2}}$$

$$=\frac{\frac{63}{32}}{\frac{3}{2}}=\frac{21}{16}。$$

例 2. 某温度表检定室，在 3 月份检定了温度表 2,500 枝。他們計划在第二季度逐月增产 20%，那末到 6 月底为止的四个月中，他們一共检定了多少支温度表？

解： 逐月增产 20%，說明每月的产量是前一个月的产量的（1 + 20%）倍，所以产量是按等比数列上升的。而且已知 $a_1 = 2{,}500$，$n = 4$，$q = 1 + 20\% = \frac{6}{5}$。

故

$$S_4 = \frac{2{,}500\left[1 - \left(\frac{6}{5}\right)^4\right]}{1 - \frac{6}{5}} = \frac{2{,}500\left[\left(1 + \frac{6}{5}\right)^4 - 1\right]}{\frac{6}{5} - 1}$$

$$= \frac{2{,}500\left[\frac{64 - 54}{54}\right]}{\frac{1}{5}} = 2{,}500 \times \frac{(6^2)^2 - (5^2)^2}{5^3}$$

$$= 20 \times 61 \times 11 = 13{,}420 \text{ 支。}$$

所以这个温度表检定室从 3 月到 6 月底止的四个月中共可检定温度表 13,420 支。

例 3. 等比数列前三項和等于 6，第二，三，四項的和等于 −3，求这个数列。

解： 按題意，得方程組

$$\begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 = 6 \\ a_2 + a_3 + a_4 = -3 \end{cases}$$

用第一項表示数列的各項，上面方程組就可以写成：

$$\begin{cases} a_1 + a_1q + a_1q^2 = 6 \\ a_1q + a_1q^2 + a_1q^3 = -3 \end{cases} \tag{1}$$