1977年—1986年高考十年回顾丛书

数学命题规律分析

辽宁教育出版社

7年—1986年高考十年回顾丛书

数学命题规律分析

（附：标准化练习）

高文生　吴振奎　侯华祥　编

辽 宁 教 育 出 版 社

一九八六年·沈阳

数学命题规律分析

高文生　吴振奎　侯华祥 编

辽宁教育出版社出版　辽宁省新华书店发行
（沈阳市南京街6段1里2号）　沈阳市第二印刷厂印刷

字数：400,000　开本：787×1092 1/32　印张：17
印数：1—23,100
1986年12月第1版　1986年12月第1次印刷

责任编辑：俞晓群　责任校对：李晓晶
封面设计：谭成荫　插　图：夏兰兰

统一书号：7371·267　定价：2.65元

前　　言

翻阅近年来（主要是1978—1985年）全国高等学校招生统一考试数学试题，可以发现[illegible]律[illegible]正是基于这一点，我们编写了本书。

这几年的试题，虽然每年具体题目变化很大，但主要题型的变化并不大，试题中反映出来的对考生能力的要求变化并不大，数学各单元所占的比例变化也不大。为便于考生复习与应试，我们认为熟悉这些高考题型是十分必要的。

本书编写的宗旨是：依照近几年高考试题的内容，即在高考命题范围内举例和编选练习。对高考不作要求的部分（例如概率和数理统计）不再选入；对于高考中要求较少的部分（例如体积面积计算）只选编部分基本题放到选择题或计算题中；对高考要求较高的部分（例如不等式、数列、参数方程和复数的几何意义等）则有所侧重。在习题配置上，选入了一些函数（变量观点）类型题和一些讨论常数、参系数的类型题，以期在处理相应问题方面提高能力。

由于这本小册子的编写目的是为应试作准备，所以凡现行教材中出现过的概念、定理、公式和符号不再另加说明。又由于某些高考试题超出教材的要求，为使读者对这样的试题有充分的理解，我们又适当地引进了一些概念。

内容（各种类型题）排列的顺序是按照在高考试卷中出现的先后为依据。

在编写过程中，我们参阅了不少有关的资料，这里不再一一列举。

编写这本小册子只是作为一种尝试，至于效果如何，敬请读者评鉴。

由于我们水平有限，定有不少的缺点和错误，欢迎读者批评指正。

编　者

目　　录

第一题型　选　择　题

选择题由于其涉及的内容广泛、知识覆盖面大，有利全面考查知识掌握的深度和广度；又由于选择题具有较强的针对性，可以考查对基本概念理解和基本运算的能力，所以近年来选择题在各类考试中被广泛采用。

在全国高考数学试题中，从1983年开始采用一部分选择题，1983、1984、1985三年试卷中选择题分别占10分、15分、15分。估计在今后的考试中，选择题仍将占一定比重．所以，了解选择题的题型和掌握选择题的解法是很有必要的。

选择题大致可以分成两种类型：

正误型　在选择题所列各答案中，只有一个答案是正确的，其它都是错误的，这一类选择题，即所谓正误型选择题。现在，在高考试题中出现的选择题，大部分是这一类型．因此，在下面的讨论中，我们也仅限于这一类题型．

比较型　在选择题所列各答案中，有一个答案是最佳的，其余答案次之（但并没有原则的错误），这类选择题即所谓比较型选择题。

从内容上分，选择题也可以按各学科、各单元分类，还可以按基本概念、基本运算和推理进行分类。但由于这样分类，对于解题意义不大，所以我们只准备在解法方面略谈一下。

由于选择题出现较晚，题型较新，所以在解法上也与传

统题有些差别。下面，我们略举几例，简单概括一下选择题的各种解法思路。

一 直 接 法

这种解法将选择题当作一般的习题，直接从条件出发，通过准确的运算，严密的推理，导出正确的结果，然后作出判断。这种方法又叫正推法，适用的范围很广，当题目较为简单或结论较为复杂时，往往应用此法。

例 1 如果$\log_{11}[\log_5(\log_3 x)]=0$，那么$x^{-\frac{1}{2}}$等于

(A)243；(B)1/243；(C)$\sqrt{3}/27$；(D)$9\sqrt{3}$。

解 由 $\log_{11}[\log_5(\log_3 x)]=0 \Rightarrow \log_5(\log_3 x)=1$

$$\Rightarrow \log_3 x = 5 \Rightarrow x = 3^5.$$

$$\therefore \quad x^{-\frac{1}{2}} = 1/\sqrt{243} = \sqrt{3}/27.$$

故应选择(C)。

例 2 若 $T=\dfrac{\sin\alpha+\mathrm{tg}\alpha}{\cos\alpha+\mathrm{ctg}\alpha}$ $(\alpha \neq k\pi/2, k\in z)$，那末

(A)T为负值；(B)T为非负值；(C)T为正值；(D)T值可正可负。

解 $T=\dfrac{\sin\alpha+\mathrm{tg}\alpha}{\cos\alpha+\mathrm{ctg}\alpha}=\dfrac{\sin^2\alpha(\cos\alpha+1)}{\cos^2\alpha(\sin\alpha+1)}$.

由 $\alpha \neq k\pi/2$ $(k\in Z)$，

$\therefore$ $\sin^2\alpha$、$\cos^2\alpha$、$(\cos\alpha+1)$、$(\sin\alpha+1)$均为正数，从而T值为正。

故应选择（C）。

例 3 若a、b、c均为正数，$x=\frac{a}{b+c}=\frac{b}{c+a}=\frac{c}{a+b}$，则x的值一定是

(A) $\frac{1}{2}$；(B) -1；(C) $\frac{1}{2}$或-1；(D) $\frac{3}{2}$。

解 由等比定理，得

$$x=\frac{a+b+c}{2(a+b+c)}=\frac{1}{2},$$

故应选择（A）。

注 当去掉"a、b、c均为正数"的条件时，如$a=b=1$，$c=-2$，则结论显然应选（C），这是由于分母中含$a+b+c$，当$a+b+c\neq 0$时，应用等比定理是可以的；但当是$a+b+c=0$时，有$c=-(a+b)$，$b=-(a+c)$和$a=-(b+c)$.

当题目较为复杂时，除了直接计算外，有时还需要进行较为详尽的讨论和分析。

例 4 数$3^{1001}\cdot 7^{1002}\cdot 13^{1003}$的个位数字是

(A) 1；(B) 3；(C) 5；(D) 7；(E) 9.

解 由于同底数n次方幂个位数均有以4为周期的性质．若记自然数k的个位数为R(K)，则$R(k^{4n+1})=R(k)$（例如$R(17^5)=R(7)=7$）.

$$\begin{aligned}&R(3^{1001}\cdot 7^{1002}\cdot 13^{1003})\\&=R(3^{1001})\cdot R(7^{1002})\cdot R(13^{1003})\\&=R(3)\cdot R(7^2)R(3^3)=R(3\times 9\times 7)=9.\end{aligned}$$

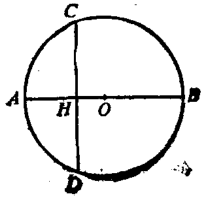
故应选择（E）。

例 5 一个圆的直径AB的长是两位（十进制）整数，将两位数字颠倒顺序便得到与AB垂直的弦CD的长，它们的交点H到圆心O的距离是正有理数（如图），则AB的长是

(A)58;(B)65;(C)47;(D)89.

解 设AB的长的十位数字为x，个位数字为y，HO的长为z，则AB的长为$10x+y=2r$，CD的长为$10y+x=2\sqrt{r^2-z^2}$，消去r，得

$$(10y+x)^2=4(5x+y/2)^2-4z^2,$$



即 $$4z^2=99(x^2-y^2)=3^2\cdot 11(x+y)(x-y).$$

由$x+y$、$x-y$均为正整数，从而$4z^2$是正整数，又z是有理数，从而2z应为正整数。

令 $x+y=11m, x-y=m(m\in N)$，解得$x=6m$，$y=5m$，又由x,y均为1位正整数，可得$x=6$，$y=5$，即AB的长为65.

故应选择（B）.

例6 三个正整数a、b、c，满足条件：$a<b<c<30$；且以某一正整数为底，$a(2b-a)$与$c^2+60b-11a$的对数分别为9和11，则$a+c-2b$的值为

(A)4;(B)2;(C)0;(D)-4.

解 设作底的正整数为x，据题意

$$\log_x a(2b-a)=9, x^9=a(2b-a), \quad ①$$

$$\log_x(c^2+60b-11a)=11, x^{11}=c^2+60b-11a. \quad ②$$

由$a<b<c<30$，知$b\leqslant 28$，当$b=28$时，令$y=a(2b-a)=-a^2+56a$，此时y最大值为784。又由①，若$x>2$，取最小$x=3$，有$3^9=19683$，显然$x\neq 3$，再根据对数定义，得$x=2$。从而$a(2b-a)=2^9=2^4\cdot 2^5$，只能得出$a=2^4=16$，$2b-a=2^5=32$，进一步解出$b=24, c=28$.

$\therefore\ a+c-2b=-4.$

故应选择（D）。

例 7 当 $k \in (0, 1/2)$ 时，方程 $\sqrt{|1-x|} = kx$ 的解的个数是

(A)0;(B)1;(C)2;(D)3;(E)4.

解：由题设可知 $x \geqslant 0$，将原方程变形，得

$$k^2x^2 = |1-x|, \text{即} k^2x^2 = 1-x (x \leqslant 1) \quad ①$$

或 $$k^2x^2 = x-1 (x>1) \quad ②$$

解①，有 $\Delta>0$，且 $x_1x_2<0$，有一正根，一负根；

解②，有 $\Delta>0$，且 $x_1+x_2>0, x_1x_2>0$，有两正根.

据题意，将负根舍去，可得出三个正根。

故应选择（D）。

当题目的叙述较为生僻时，我们还可以将原题条件适当转化。

例 8 在空间四点中，无三点共线是无四点共面的。

（A）充分而必要条件；（B）充分而不必要条件，（C）必要而不充分条件；（D）不充分且不必要条件。

解 将原题变成等价的逆否命题，即“四点共面是三点共线的什么条件？”显然是必要而不充分条件。

故应选择（C）。

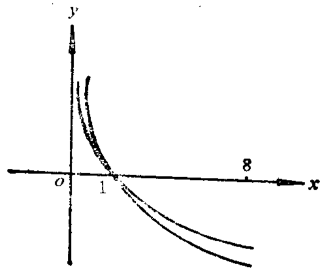
在某些情况下，依题意画出相应的图形，再根据有关的定理、性质去寻找正确的答案，是较为方便的。

例 9 已知 $\log_m 8 < \log_n 8 < 0$（m、n 为不等于 1 的正数），则m、n应满足

(A)$1<n<m$;(B)$m<n<1$;(C)$1<m<n$;(D)$n<m<1$.

解 由已知，当真数大于 1 时，对数取负值，故m、n两数均小于 1。

在同一直角坐标系内，任意画出两条底小于1的对数曲线，例如$y=\log_{0.1}x$和$y=\log_{0.5}x$，明显看出当$x>1$时，底越大，曲线越向下（从而函数值越小），即可得出$m>n$。



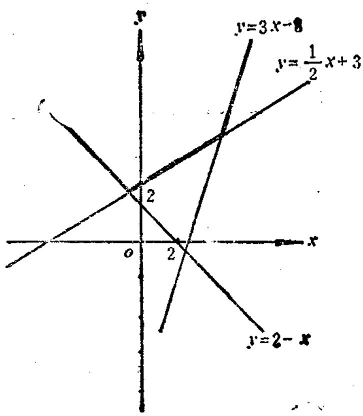
故应选择（D）。

注　若取$\log_n 8=-1$，$\log_m 8=-3$，仍可得出结论.

例10　若对于任何实数x，函数f(x)都是下到三个函数$2-x$，$\frac{1}{2}x+3$，$3x-8$的最大值，则f(x)的最小值为。

(A)$\frac{3}{2}$；(B)$\frac{2}{3}$；(C)$-\frac{3}{2}$；(D)$\frac{8}{3}$　.

解　由于$y=2-x$，$y=\frac{1}{2}x+3$，$y=3x-8$在坐标系中均表示直线（如图），相应地，它们之中的最大值即组成一折线（图中粗线部分）.



从图中可以看出，f(x)的最小值应是直线$y=2-x$与$y=\frac{1}{2}x+3$的交点的纵坐标即$y=\frac{8}{3}$.

故应选择（D）。

二 逆 推 法

这种解法是相对于直接法而言的，由于选择题中，一般都提供了答案，故可以从答案或结论出发逆推之。对于方程类选择题，逆推只是将结果代入原方程，仅相当于一个验根过程，所以，逆推也就成了解选择题的一种思想方法。

例1 $\sqrt{7x-3}+\sqrt{x-1}=2$的解是

(A)$x=3$;(B)$x=3/7$;(C)$x=2$;(D)$x=1$;(E)$x=0$

解 分别将3、3/7、2、1代入，只有$x=1$适合原方程。

故应选择（D）。

例2 一凸多边形，除一个内角外，其余内角之和是2570°，则这个内角是

(A)90°;(B)105°;(C)120°;(D)130°;(E)144°.

解 由于凸多边形内角和是180°的倍数，将所有各角分别与2570°求和，进行验证。不难得出仅有130°满足要求。

故应选择（D）。

例3 若$\sin x+\cos x=7/13(0\leqslant x\leqslant\pi)$，则$\mathrm{tg}x$的值为

(A)5/12;(B)12/5;(C)−12/5;(D)−5/12.

解 由于$0\leqslant x\leqslant\pi/2$时，有$1\leqslant\sin x+\cos x\leqslant\sqrt{2}$，故只需验证$\pi/2<x<\pi$时（$\mathrm{tg}x<0$）的（C）、（D）。若$\mathrm{tg}\,x=-12/5$，则$\sin x=12/13,\cos x=-5/13$，从而$\sin x+\cos x=7/13$。

故应选择（C）。

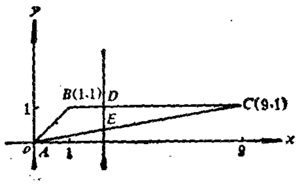
例4 满足等式$1983=1982x-1981y$的一组自然数是

(A) $x=12785, y=12768$; (B) $x=12784$, $y=12770$; (C) $x=11888, y=11893$; (D) $x=1984, y=1987$.

解 将供选择的答案代入验证，注意到题目的特点，只需验证末位，且只验证y为奇数的两组. $2\times8-3\times1=3$，$4\times2-7\times1=1$，故仅有(C)是正确的。

故应选择（C）。

例5 一个三角形以(0,0)，(1,1)及(9,1)为三个顶点，一条与x轴互相垂直的直线将三角形划分成面积相等的两部分，则该直线的方程为 $x=$



(A) 2.5; (B) 3.0; (C) 3.5; (D) 4.0; (E) 4.5.

解 先画出图形，然后进行估计，$x=3.0$正确的可能性较大，再检验，此时$S_{\triangle CDE}=(1/2)\times6\times2/3=2$，而$S_{\triangle ABC}=8\times1/2=4$。

故应选择（B）.

例6 当$a\neq b$ $a^3-b^3=19x^3$，并且$a-b=x$，下面哪个结论是对的?

(A) $a=3x$; (B) $a=3x$或$a=-2x$; (C) $a=-3x$ 或 $a=2x$; (D) $a=3x$或$a=2x$; (E) $a=2x$.

解 当$a=3x$ 时，$b=2x$，$a^3-b^3=19x^3$. 但此时并不能马上断定（A）正确，因为（B）、（D）都包含$a=3x$，再验证$a=-2x$时，有 $b=-3x$，仍满足 $a^3-b^3=19x^3$。

故应选择（B）。

注 区分对待上面两例的情况，例5中几个结论互不相容，但例6中几个结论中有些是相容的，所以验证也不能一次完成.

三 否 推 法

否推法即对所给的错误结论加以否定，从而作出正确的选择，这也是基于选择题的特点：在大多数情况下都明确指出有唯一正确的答案，所以在否定了错误答案后，剩下的就算是正确解答．根据命题定量和定性的差异，可分为分析否定与特例否定，可以一次否定几个错误答案，也可以分几次否定错误答案．

首先来看分析否定．

例 1　如果凸n边形$F(n\geq 4)$的所有对角线都相等，那么

（A）$F\in$｛四边形｝；（B）$F\in$｛五边形｝；

（C）$F\in$｛四边形｝$\cup$｛五边形｝；

（D）$F\in$｛等边多边形｝$\cup$｛等（内）角多边形｝．

解　由于所有对角线相等的凸 n边形只有：正方形、矩形、等腰梯形、正五边形，从而可否定（A）、（B）、（D）．

故应选择（C）．

例 2　与$\lg(\cos x-1)^2$相等的是

（A）$[\lg(\cos x-1)]^2$；（B）$2\lg(\cos x-1)$；

（C）$2\cos(\lg x)$；（D）$4\lg|\sin x/2|+2\lg 2$．

解　根据对数真数大于 0 这一点，否定（A）、（B），又$\lg(\cos x-1)^2$与$2\cos(\lg x)$显然不等，否定（C）．

故应选择（D）．

例 3　对于任何$\varphi\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，下列不等式成立的是：