SHUXUE JIANMO YU SHIYAN

数学建模与实验

宋来忠　王志明　主编

科学出版社
www.sciencep.com

数学建模与实验

宋来忠　王志明　主编

科学出版社
北京

内 容 简 介

本书为高等院校数学建模与实验课程教材，集应用数学知识、数学建模和数学实验为一体，共三篇 18 章. 第一篇为 MATLAB 基础，包括 MATLAB 入门与作图；第二篇为模型及实验，包括大学几门基础数学课程主要内容和知识点的数学模型与数学实验；第三篇为多元分析法建模. 有些章节增加了“补充知识”部分，各章内容相对独立，便于不同学时、不同层次的院校和专业选修不同的内容.

本书结构新颖，具有创意，教学实践性和可操作性强，是普通工科院校数学实验课程的理想教材，也可作为其他类别学生的相同课程教材，还可作为相关教研工作者的参考书.

图书在版编目（CIP）数据

数学建模与实验/宋来忠，王志明主编. – 北京：科学出版社，2005
ISBN 7-03-016220-X

Ⅰ.数… Ⅱ.①宋…②王… Ⅲ.①数学建模②高等数学 – 实验
Ⅳ.①O22②O13-33

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2005）第 100859 号

责任编辑：张颖兵
责任印制：高 嵘／封面设计：李梦佳

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

武汉大学出版社印刷总厂印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2005 年 8 月第 一 版 开本：787×1092 1/16
2005 年 8 月第一次印刷 印张：15
印数：1~5 000 字数：361 000

定价：22.80 元

（如有印装质量问题，我社负责调换）

前　言

数学建模(mathematical modeling)并不是新生事物(尽管过去很长时间这一术语很少用). 实际上，有了数学并要用数学去解决实际问题，就一定要用数学的语言、方法去刻画实际问题，而这种刻画的数学表述就是数学模型.

例如实际问题：甲乙两地相距 750 公里，船从甲到乙顺水航行需 30 小时，从乙到甲逆水航行需要 50 小时. 问船速、水速各若干?

设：x—— 船速；y—— 水速，可列出方程组(数学模型)：

$$30(x+y)=750 \qquad 50(x+y)=750$$

原问题转化为纯粹的数学问题. 方程的解 $x=20$(公里/时)， $y=5$(公里/时)，最终给出了航行问题的答案.

由于实际的需要，人类的数学建模活动从未停止过. 问题的关键是：当一个数学模型表达出来以后，就要用一定的技术手段(例如推理、计算等)来求解. 如果中间有一步完不成，整个数学建模的过程就很难完成，其中最难跨越的就是大量的计算. 千百年来，人们一直被计算问题所困扰，一刻也没有停止过对计算工具的改进，终于到了 20 世纪 80 年代，计算机的发展完善为此铺平了道路.

数学实验(mathematical experiments)主要是指应用现代计算机技术和软件包来进行数学模型求解，数学实验是建立数学模型的一个重要环节.

本书集应用数学知识、数学建模和数学实验为一体，既简要介绍一些最常用的解决实际问题的应用数学知识，又联系实例介绍如何应用相应的数学知识建立(可行的)数学模型以及数学软件包(主要用 MATLAB 6.5)来求解模型. 考虑到不同层次的需要，有些章节增加了“补充知识”部分，章与章之间的内容相互独立，以便使用时取舍. 不同的学时、不同的层次院校和专业，可以从中选修不同的内容.

参加本书编写的同志，大多是近年来指导学生参加全国大学生数学建模竞赛的教练. 本书在内容的选取和编排上体现了作者们的经验与教法创新. 本书由宋来忠、王志明主编，李德宜、余杨任副主编，绪论部分和第 1、2、6、8、13 章由宋来忠编写，第 3、12 章由王高峡编写，第 4、9、17、18 章由王志明、李德宜、李明、陈贵词、陈建发、鄂学壮、俞长春编写，第 5、11 章由黄公瑾编写，第 7、16 章由余杨编写，第 10 章由姜峰、宋来忠编写，第 14 章由俞辉编写，第 15 章由许松林编写. 最后由宋来忠统稿、定稿.

本书是工科类高校数学实验课的教材，也可作为其他类别学生的相同课程教材，还可作为相关教研工作者的参考书.

编写和出版本书得到了有关院校教育行政部门的支持，在此表示感谢.

限于编者的水平，不妥和不足之处在所难免，殷切期望同行、专家和读者批评指正，以便再版时予以修订.

编　者

2005 年 6 月

目　　录

第三篇 多元分析法建模

第0章　绪　　论

原型(prototype)和**模型**(model)是一对对偶体．原型是指人们在现实世界里关心、研究或者从事生产、管理的实际对象．在科技领域原型通常用系统(system)、过程(process)等词汇来描述，如机械系统、电力系统、生态系统，又如钢铁冶炼过程、导弹飞行过程、化学反应过程等等．原型也被称之为现实对象、研究对象、实际问题等．模型则指为了某个特定的目的将原型的某一部分信息简缩、提炼而构造的原型替代物．

特别要强调的是构造模型的目的性，模型绝不是原型原封不动的复制品，原型有不同方面和不同层次的特征，而模型只要求反映与某种目的有关的那些方面和层次．同一个原型，为了不同的目的可以构造许多不同的模型．模型的基本特征是由构造模型的目的决定的．模型可按如下方式分类：

- 模型
  - 具体模型
    - 直观模型
    - 物理模型
  - 抽象模型
    - 思维模型
    - 符号模型
    - 数学模型
      - 数式模型
      - 图形模型

0.1　什么是数学模型

数学模型(mathematical model)是对于现实世界的一个特定对象、特定目的，根据特有的内在规律，做出一些必要的假设，运用适当的数学工具，得到一个数学结构．简单地说：就是系统的某种特征的本质的数学表达式，或是用数学术语对部分现实世界的描述，即用如函数、图形、代数方程、微分方程、积分方程、差分方程等的数学式子来描述(表述、模拟)所研究的客观对象或系统在某一方面的存在规律．

0.2　什么是数学建模

数学建模(mathematical modeling)是利用数学方法解决实际问题的一种实践．即通过抽象、简化、假设、引进变量等处理过程后，将实际问题用数学方式表达，建立起数学模型，然后运用先进的数学方法及计算机技术进行求解．数学建模其实并不是什么新生事物，可以说有了数学并需要用数学去解决实际问题，就一定要用数学的语言、方法去近似地刻画该实际问题，这种刻画的数学表述的就是一个数学模型，其过程就是数学建模的过程．数学模型一经提出，就要用一定的技术手段(计算、证明等)来求解并验证，其中大量的计算往往是必不可少的．高性能计算机的出现使数学建模如虎添翼，得到了飞速发展，掀起了一个应用数学建模手段解决实际问题的高潮，以至现在有一种观点：“所谓高科技就是一种数学技术”．

由于实际的需要，人类的数学建模活动从未停止过．问题的关键是：当一个数学模型表

达出来以后，就要用诸如推理、计算等技术手段来求解. 如果中间有一步完不成，整个数学建模的过程就很难完成，而这中间最难跨越的就是大量的计算. 千百年来，人们一直被计算问题所困扰，一刻也没有停止过对计算工具的改进，到了20世纪80年代，计算机技术的发展完善为数学建模过程铺平了道路.

数学的特点不仅在于它概念的抽象性、逻辑的严密性和结论的正确性，而且在于它应用的广泛性. 因此，马克思说："一门科学只有成功地运用数学时，才算达到了完善的地步." 通常，凡需要对现实对象提供分析、预报、决策、控制等定量结果时，往往离不开数学的应用，而建立数学模型则是这个过程的关键环节. 应用现代计算机技术和软件包来进行数学模型求解称为**数学实验**(mathematical experiments)，数学实验是建立数学模型的一个重要环节. 本课程集应用数学知识、数学建模和数学实验为一体，既简要介绍一些最常用的解决实际问题的应用数学知识，又联系实例介绍应用相应的数学知识建立数学模型，并用合适的数学软件包(如MATLAB)来求解模型.

数学建模将各种知识综合应用于解决实际问题中，是培养和提高人们应用所学知识分析问题、解决问题的能力的必备手段之一.

0.3 数学建模的一般方法和步骤

建立数学模型的方法和步骤并没有一定的模式，但一个理想的模型应能反映系统的全部重要特征，实践中应特别注重模型的可靠性和模型的实用性.

0.3.1 建模的一般方法

1) **机理分析法**. 根据对现实对象特性的认识，分析其因果关系，找出反映内部机理的规律，所建立的模型常有明确的物理或现实意义.

2) **测试分析法**. 将研究对象视为一个"黑箱"系统，内部机理无法直接寻求，通过测量系统的输入输出数据，并以此为基础运用统计分析方法，按照事先确定的准则在某一类模型中选出一个数据拟合得最好的模型. 测试分析法也叫做**系统辨识法**.

将这两种方法结合起来使用，即用机理分析法建立模型的结构，用测试分析法确定模型的参数，也是常用的建模方法. 在实际过程中用哪一种方法建模主要是根据对研究对象的了解程度和建模目的来决定. 机理分析法建模的大致步骤如图0.1所示.

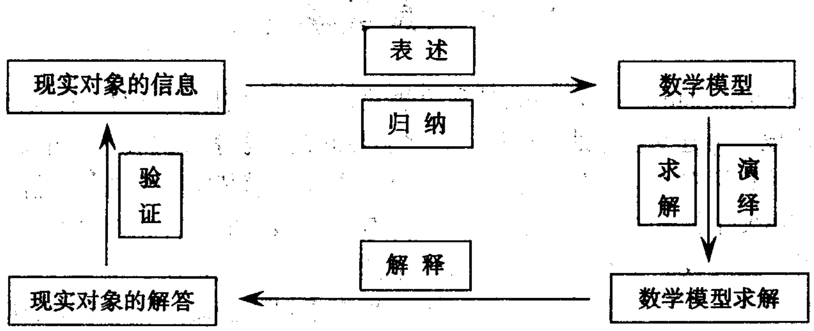

图 0.1

表述(formulation)过程是把实际问题翻译成数学问题；求解(solution)过程是解数学模型；

解释(interpretation)过程是把数学语言表述的结果(解答)，翻译回现实对象，给出实际问题的解答；验证(verification)过程是用现实对象的信息检验得到的解答，以确定结果的正确性.

在解决实际问题时，上述过程可能要重复多次.

0.3.2 建模的一般步骤

1. 模型准备

首先要了解问题的实际背景，明确建模的目的，搜集建模必需的各种信息，如现象、数据等，尽量弄清对象的特征，由此初步决定用哪一类模型.

2. 模型假设

根据对象的特征和建模的目的，对问题进行必要的、合理的简化. 用精确的语言作出假设，是建模的关键一步. 通常，一个实际问题不经过简化假设，就很难翻译成数学问题，即使可能，也很难求解. 不同的简化假设会得到不同的模型. 假设作得不合理或过分简单，会导致建模失败；假设作得过分详细，可能很难甚至无法继续下一步的工作. 对实际问题的了解程度、知识面的宽度以及经验在这里常常起着重要作用.

3. 模型构成

根据所作的假设分析对象的因果关系，利用对象的内在规律和适当的数学工具，构造各个量(常量和变量)之间的等式(或不等式)关系或其他数学结构. 这不仅需要一些相关学科的专门知识，还需要较广阔的应用数学方面的知识，以开拓思路.

4. 模型求解

可采用解方程、画图形、证明定理、逻辑运算、数值计算等各种传统的和现代数学方法，特别是计算机技术以及数学软件.

5. 模型分析

对模型解答进行数学上的分析.

6. 模型检验

把数学上分析的结果翻译回实际问题，并用实际的现象、数据与之比较，检验模型的合理性和实用性. 这一步是建模成败的关键. 模型检验的结果如果不符合或者部分不符合实际，问题通常出在模型假设上，应该修改、补充假设，重新建模. 有些模型要经过多次反复，不断完善，直到检验结果获得某种程度上的满意.

7. 模型应用

应用的方式取决于问题的性质和建模的目的.

上述步骤如图 0.2 所示，应当指出，建模活动是多样性的，不应拘泥于形式.

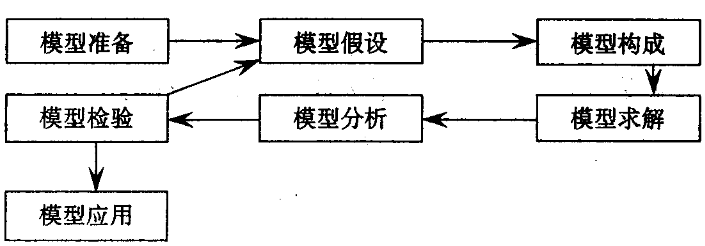

图 0.2

0.4 数学模型分类

1) 按研究方法和对象的数学特征可分为：初等模型、几何模型、优化模型、微分方程模型、图论模型、逻辑模型、稳定性模型、扩散模型等等.

2) 按研究对象的实际领域或所属学科可分为：人口模型、交通模型、环境模型、生态模型、生理模型、城镇规划模型、水资源模型、污染模型、经济模型、社会模型等等.

0.5 建模需要注意的几个问题

1. 合理假设

一个原型，常有众多的特性，这些特性所具有的数量特征常与众多的因素有关. 在一定条件下，有的因素是主要的和本质的；有的是次要的和非本质的；有的有某种理论规律可循；有的无理论规律可循. 为了获得可靠的并且通过计算机可以得到必要解答的数学模型，必须对原形作出适当的假设. 例如，为了突出主体或者为易于求解，可以略去那些次要的非本质的因素，以达到简化的目的；又如，将那些没有理论规律可以遵循的关系，作出明确的假设，达到确定化目的. 所有假设都必须是合理的，即符合或近似地符合自然规律.

2. 恰当地使用数学方法

很多数学方法可以用来建立实际问题的数学模型，但对于一个给定的原型，并非一切数学方法都适用. 通常，对于不确定性问题常适宜于用概率统计等数学方法；对于确定性问题常适宜于用微分方程和代数方程等数学方法. 特别地，因为计算机的发展，直接就原型建立起离散模型(如差分方程方法)或对已建立起来的连续性模型寻求合理的离散方法，达到能使用计算机进行计算的目的，已成为当今科学计算的一个热门课题.

3. 模型的分析和检验

怎样断定在建模过程当中所作假设是合理的，使用的数学方法也是恰当的呢？一种有效的方法就是对建立起来的模型进行分析检验. 当使用不确定性数学方法建模时，对方法本身的适用性要进行检验. 例如，使用层次分析法建模，要进行一致性检验；使用回归分析方法建模，要进行效果显著性检验；使用判别分析法建模，要进行判别效果检验；使用微分方程和差分方程方法建模，要对平衡解作稳定性检验，等等.

0.6 一个实例：逻辑斯谛(Logistic)模型

某地区正在流行某种传染病，设 $x(t)$ 为 t 时刻已感染的人数占居民总人数的比率 ($x(t)\in[0,1]$)，那么未受感染的人数占居民总人数的比率就为 $1-x(t)$；设 x_0 为初始感染的人数占居民总人数的比率；又可设 $x'(t)$ 正比于 $x(t)[1-x(t)]$，得微分方程定解问题：

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}=\lambda x(t)[1-x(t)]\\&x(0)=x_0\end{aligned}\right\}\tag{0.1}$$

模型(0.1)的解为

$$x(t)=\frac{1}{1+\left(\frac{1}{x_0}-1\right)e^{-\lambda t}}$$

式中：λ，$x_0>0$为常数；λ为固有传播率. 显然$\lim\limits_{t\to\infty}x(t)=1$，这说明：天长日久，人人都要得这病. 这与事实不符，问题在于模型(0.1)没有考虑被治愈的，用μ表示治愈率，则模型(0.1)可改为

$$\left.\begin{aligned}&\frac{dx(t)}{dt}=\lambda x(t)[1-x(t)]-\mu x(t)\\&x(0)=x_0\end{aligned}\right\}\tag{0.2}$$

求解得

$$x(t)=\begin{cases}\left[\dfrac{\lambda}{\lambda-\mu}+\left(\dfrac{1}{x_0}-\dfrac{\lambda}{\lambda-\mu}\right)e^{-(\lambda-\mu)t}\right]^{-1}, & \lambda\neq\mu\\ \left(\lambda t+\dfrac{1}{x_0}\right)^{-1}, & \lambda=\mu\end{cases}$$

从而

$$\lim_{t\to\infty}x(t)=\begin{cases}1-\dfrac{\mu}{\lambda}, & \lambda\neq\mu\\ 0, & \lambda\leqslant\mu\end{cases}$$

这说明：$\lambda\leqslant\mu$时，疾病总会完全消失；反之，总有一部分人要得这种病，且这部分人所占总数的比率随治愈率增大而减少，随固有传播率增大而增大. 这一模型才合乎情理. 另外，有的传染病治愈后有免疫力，有的传染病会引起二次感染，对如此一些情形，模型(0.2)就要作进一步的改进.

可见数学模型总是在不断地修改、完善，使之能符合实际情况的变化.

0.7 为什么数学建模与数学实验会进入大学课堂

在当今的大学中，大多为理工科学生开设了数学建模、数学实验课程. 美国从1985年开始，我国也从1992年开始在大学生中开展了一年一度的大学生数学建模竞赛.

为什么数学建模与数学实验会进入大学课堂？大致的原因有如下五点：

1. 时代的特点

有史以来，人们一直被一些计算问题所困扰，一刻也没有停止过对计算工具的改进，终于到了20世纪80年代，计算机技术的发展完善迎来了划时代的计算机革命时代. 有人把当今的时代称之为**信息时代**或**数字时代**. 计算机朝着高速、智能、小型、廉价的方向迅速发展. 计算机的计算速度达10亿次/秒甚至几万亿次/秒以上；智能化的数学软件包，如Matlab、Mapple、Mathematic、Mathcad等，可以准确无误进行代数运算、分析运算、制图、仿真等，大大降低了人们学习使用计算机的难度. 而计算机的微型化、便携化和廉价，使得对一般人来说，拥有和携带计算机是一件很普通的事情.

2. 各行各业日益依赖于数学

随着信息时代的到来，地球相对于人的活动来讲变得越来越“小”，激烈竞争要求人们的

活动必需越来越“精细”，凡是需要定量分析、数据处理的地方，都需要数学．不仅传统的工程、物理等学科更依赖于数学，而且还出现了许多新的学科，如数学化学、数学生物学、数学地质学、数理语言学等等．美国 E. E. David Jr. 就曾说道：“太少人认识到当今如此受到称颂的‘高新技术’，本质上是一种数字技术．”

3. 新型人才的素质要求

数学语言被称之为与科技交流的语言．具有创新能力的新型人才必需掌握三类语言：其一是与人交流的语言，如汉语、英语等；其二是与计算机交流的语言，如 C 语言、Java、Matlab 等；其三就是与科技交流的语言，即数学语言．数学建模与数学实验正好能够培养第三种语言能力．

4. 解决实际问题的需要

著名数学家吴文俊在《数学教育不能从培养数学家的要求出发》中指出：“任何数学都要讲逻辑推理，但这只是问题的一个方面．更重要的是用数学去解决问题，解决日常生活中、其他学科中出现的数学问题．学校的数学题目都是有答案的，已知什么，求证什么都是清楚的，题目也一定做得出来．但是将来在社会中的问题大多是预先不知道答案的，甚至不知道是否有答案．这就要求培养学生的创造能力，学会处理各种实际问题的能力．”

5. 数学是一种工具

即使对于非数学专业或不从事数学研究的人来说，数学也是一种工具，就像现在每个专业的学生都要学外语、计算机一样．

正是基于上述原因，数学建模与数学实验不仅热了起来，而且还进入了大学课堂．

第一篇　MATLAB 基础

第 1 章　MATLAB 入门

MATLAB 作为线性系统的一种分析和仿真工具，是理工科大学生应该掌握的技术工具，它作为一种编程语言和可视化工具，可解决工程、科学计算和数学学科中许多问题. MATLAB 建立在向量、数组和矩阵的基础上，使用方便，人机界面直观，输出结果可视化. 矩阵是 MATLAB 的核心.

1.1　变量与函数

1.1.1　变量与数据

1. 变量类型

MATLAB 最常用的变量有**数值数组**(double array)和**字符串**(char array)两类. 所有数值数组变量均以双精度(double)方式存储，不区分整数、实数、复数等，变量类型和数组大小也无需定义. 例如：

```
>> a=2+3i
a =
   2.0000 + 3.0000i          %复数

>> a1='This is a string'
a1 =
    This is a string         %字符串

>> A=[1  2;3  4]
A =
   1     2
   3     4                   %二维数组，即矩阵
```

2. 变量命名规则

MATLAB 中变量的命名规则是：① 变量名必须是不含空格的单个词；② 变量名区分大小写；③ 变量名最多不超过 31 个字符，第 31 个字符之后的字符将被忽略；④ 变量名必须以字母打头，之后可以是任意字母、数字或下划线，变量名中不允许使用标点符号.

3. 特殊常量和变量

MATLAB 中的特殊常量和变量见表 1.1.

4. 用户变量名的查询

MATLAB 命令窗口中用户变量名可用 who 或 whos 查寻，例如：

```
>> who
Your variables are:
A     a     a1     ans     c
>> whos
```