

DEPINGMIANNEIWENDING

钢结构 的平面内稳定

童根树 著

中国建筑工业出版社
CHINA ARCHITECTURE & BUILDING PRESS

钢结构的平面内稳定

童根树 著

中国建筑工业出版社

图书在版编目 (CIP) 数据

钢结构的平面内稳定/童根树著. —北京: 中国建筑工业

出版社, 2005

ISBN 7-112-07317-0

I. 钢... II. 童... III. 钢结构—结构稳定性—研究 IV. TU391

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2005) 第 026559 号

钢结构的平面内稳定

童根树 著

中国建筑工业出版社出版、发行 (北京西郊百万庄)

新华书店经销

世界知识印刷厂印刷

*

开本: 787 × 1092 毫米 1/16 印张: 22 $\frac{3}{4}$ 字数: 550 千字

2005年10月第一版 2005年10月第一次印刷

印数: 1—3000 册 定价: 43.00 元

ISBN 7-112-07317-0

(13271)

版权所有 翻印必究

如有印装质量问题, 可寄本社退换

(邮政编码 100037)

本社网址: <http://www.china-abp.com.cn>

网上书店: <http://www.china-building.com.cn>

本书通过简单模型系统地阐述了判断结构稳定性的基本原理、方法和过程。通过压杆弹性稳定性的研究,介绍了轴力作用后构件刚度的变化,钢结构构件截面的弹塑性性能,截面发生塑性流动的现象,压杆弹塑性失稳的数值积分方法,各种变分原理和基于变分原理的近似解析法和有限单元法;详细讲述了框架稳定、剪切失稳、弯曲失稳的相互作用,变截面构件的弹性和弹塑性稳定,双重抗侧力结构体系的稳定性,框架结构分类,压弯杆的稳定性,框架柱按照整层失稳进行平面内稳定计算的方法,非线性分析基础,框架结构几何和材料非线性分析的拖动坐标法,非线性分析单元刚度矩阵的刚体检验,增量一迭代计算的广义刚度参数法。对拱的稳定性也进行了研究。

本书可作为结构工程专业的硕士和博士研究生教材,前13章可以作为本科生选修课教材。其中很多章节涉及《钢结构设计规范》部分内容的理论背景,还包含了大量钢结构设计规范没有纳入、在实际工程中却经常遇到的内容,可供工程技术人员和广大师生参考。

* *

责任编辑:赵梦梅

责任设计:赵 力

责任校对:刘 梅 张 虹

前 言

钢材强度高、延性好，是优良的建筑结构材料。由于经过复杂炼制工艺才能获得钢材，因此钢材的应用应该精打细算，在满足安全性要求的前提下，减小单位建筑面积的用钢量应该是每一个结构设计人员追求的目标。为了节省用钢量，实际工程中的钢构件相对混凝土构件要细长和壁薄。细长和薄壁的结构容易发生失稳现象，对稳定理论的掌握是做好钢结构设计的关键。

材料力学有压杆稳定内容，结构力学则包含了框架稳定的章节。但是这两门专业基础课中的结构稳定知识远远不能满足解决实际工程问题的需要。结构稳定理论作为一门专业基础课，其学科内容或知识量非常丰富，而且还在不断完善中。

由于历史的原因，与钢结构有关的课程，特别是稳定理论，在我国各高校中的课时都比较少。知识掌握得不全面，作为解决实际工程问题的工具，应用起来就不那么得心应手。其结果是，很多人认为结构稳定理论比较难。通过系统的学习，读者会发现结构稳定理论是很容易理解和掌握的，而且只有掌握稳定理论知识，才能正确掌握和判断实际工程钢结构的性能。

近十年来钢结构在我国得到广泛的应用，作为钢结构应用基础的《钢结构稳定理论》也得到快速的发展。有些成果已经反映在《钢结构设计规范》GB 50017—2003 中，有些则只能在国内外的期刊学报上零星地呈现，有必要进行较为系统的总结。作者自 1996 年起在浙江大学讲授《钢结构稳定理论》课程，根据实际应用需要和新的研究成果，讲课内容不断更新和补充。本书是这门课程部分教学内容的总结，它包含了近几年作者紧密结合大量工程实际和《钢结构设计规范》编制所进行的理论上新的思考和研究成果。读者会发现，即使对于非常经典的稳定理论和方法，作者也以更为透彻的方式进行了讲解和诠释。书中还包含了很多工程实际中遇到、但规范未列入或未及时列入的内容，可以直接在设计工作中应用。

本书共分 16 章，第 1 章介绍判断结构稳定性的静力准则和能量准则，论证了静力准则中的干扰和能量准则中的变分的等价性，介绍了不同结构体系的屈曲后性能和有缺陷体系的稳定性，最后还介绍了验证近代稳定理论的实验结果。

第 2 章介绍杆件的弹性稳定，特别强调静力准则的应用，通过对理想体系的干扰和对有缺陷体系的干扰来研究它们的稳定性，指出弯矩对无限弹性压杆的稳定没有影响的论断。重点考察了轴力作用下构件各种刚度的变化，论述了杆件弯曲的弓弦效应对轴压刚度的影响。

第 3 章论述钢截面的极限承载力，提出双向弯矩和轴力作用下求极限屈服面的一个方法，解释了截面上的塑性流动现象，提供了常见截面的极限屈服曲面。

第 4 章研究压杆的弹塑性失稳，介绍了对 Shanley 模型改进的论述和考虑残余应力影响的切线模量法，提出了目前最为详尽的数值积分法计算步骤，论述了稳定设计公式的构

建方法。

第5章对有限变形下的应变计算方法进行了探讨,介绍了研究结构稳定性的变分原理,包括初应力问题变分原理、屈曲问题变分原理和压杆弯曲失稳的正统变分原理。以最小篇幅对能量法近似计算屈曲荷载和屈曲波形的过程进行了介绍。特别介绍了变截面构件的有限单元法,为第8、10章的应用作好了初步准备。

第6章介绍了框架弹性稳定,由简单到复杂,从模型的建立到规范方法,再考虑实际工程情况,介绍了同层各柱的相互作用和层与层的相互作用,研究了带摇摆柱的框架的稳定性,最后指出单跨两层框架可能发生对称失稳现象。

第7章通过研究框架结构层与层相互作用的特点,提出了一个代数方法求解阶形柱上下柱的相互支援和多层框架中层与层相互作用,这个方法可以用于框架的有侧移失稳和无侧移失稳的计算。作者认为,通过本章的学习,对框架的稳定性才有真正深入的掌握。

第8章研究有剪切变形影响的柱子和格构式柱子的弯曲失稳,特别提出柱子剪切失稳的概念,强调剪切失稳和弯曲失稳的相互作用,研究了变截面柱子考虑剪切失稳作用的临界荷载,为第10章的应用打好了基础。最后研究了格构式压杆单肢失稳和整体失稳的相互作用,提出了格构式压杆设计的新方法。

第9章研究压弯杆的弹塑性失稳。研究了等效弯矩系数,通过经典的Jezek法阐述了在压弯杆弹塑性弯曲失稳中弯矩发挥的作用,论述了用二阶分析的强度计算来推导压弯杆平面内稳定计算公式的方法,并对这个方法在框架柱中的应用进行了评论。介绍了采用平面内稳定的二阶分析设计法,对与这个方法有关的规定进行了详细解释。提出了按照层整体失稳计算框架平面内稳定性的一个新方法。

双重抗侧力结构的稳定性一直是一个空白,第10章首次系统地介绍了框架—剪切型支撑结构,框架—弯曲型支撑结构和框架—弯剪型支撑结构的稳定性,提出了使框架发生无侧移失稳的支撑门槛刚度计算式,以及对弱支撑框架的稳定性计算方法。系统地总结了与稳定计算相关的框架的各种分类方法和多高层钢结构的稳定性设计技术。

第11章介绍楔形变截面工字钢杆件的应力分布和稳定性计算。介绍了变截面压杆的弹性和弹塑性稳定以及变截面压弯杆的弹塑性稳定,提出了新的设计公式。变截面梁对变截面柱子提供的转动约束,本章也给出了详细的计算公式。

第12章对工业厂房中的各种稳定问题给出了计算公式,特别是对于阶形柱柱脚铰接以及柱顶弹性转动约束的情况,给出了计算公式。对厂房纵向抽撑的情况,也进行了研究。第13章介绍了增强结构稳定性的支撑的设计要求。

非线性分析是钢结构设计方法的一个发展方向。第14章采用了便于工程技术人员和初学者容易理解的方式介绍了非线性分析的基本知识。第15章则详细地介绍框架几何和材料非线性分析的一个新方法。引入横向正应力的非线性势能,对刚度矩阵进行刚体检验,采用广义刚度参数法控制增量—迭代过程,考虑计算过程中的虚假卸载,提出了弹塑性阶段不平衡力的计算方法,列出了详细的计算步骤,给出了计算例题。

第16章介绍一个新的拱的稳定理论,研究了各种假定带来的影响,为进一步研究拱的稳定提供了一个完整的基础。

经过最近几年的发展,结构稳定理论学科的知识内容得到很大的充实和发展。本书只讲授钢结构构件和框架的平面内稳定,通过研究简单构件和结构,对结构失稳的本质进行

深入剖析，对稳定性研究的方法进行详细介绍。根据教学的要求，本书适宜的学时安排为35（本科生）~45（研究生）个学时，本科生只学习前面13章的内容。

在本书出版之际，在此向陈婷、王金鹏、季渊、陈海啸、张磊和程鹏同学表示感谢。在作者指导下，他们对本书部分章节涉及的内容进行了仔细研究，获得的成果对于完善结构稳定理论、拓展稳定理论的应用、促进人们对特定结构体系稳定性的认识、改善钢结构构件和结构的设计方法具有重要的价值。

童根树

2004年11月6日于浙江大学

目 录

前言

第 1 章 绪论	1
1.1 平衡的稳定性准则及平衡稳定性的基本概念	1
1.1.1 静力准则	1
1.1.2 能量准则	2
1.1.3 光滑表面上钢球的平衡稳定性	2
1.1.4 静力准则的扰动和能量准则的变分的关系, 大变形理论	3
1.1.5 小变形理论	5
1.1.6 势能驻值原理和最小势能原理的区别及联系	6
1.2 屈曲后性质	6
1.2.1 不稳定分枝失稳的例子	6
1.2.2 不对称分枝现象	7
1.2.3 Von Mises 桁架—跳跃屈曲	9
1.3 有缺陷结构体系的稳定性分析	10
1.3.1 具有对称稳定屈曲后性能的结构体系	10
1.3.2 具有对称不稳定后屈曲性能的结构体系	11
1.3.3 具有不对称屈曲后性能的体系	12
1.3.4 有缺陷体系下的势能驻值原理和最小势能原理	13
1.4 失稳的类型及其实验验证	14
1.4.1 失稳类型的总结	14
1.4.2 稳定性的实验验证	16
1.5 本书的学习要求	22
参考文献	23
第 2 章 杆件的弹性稳定	25
2.1 理想轴压杆的屈曲	25
2.1.1 两端铰支轴心压杆的屈曲	25
2.1.2 任意支承条件下的轴压杆	25
2.2 有初始弯曲的压杆	27
2.3 有弯矩或横向荷载作用的压杆	28
2.4 Elastica 问题	29
2.5 带轴压力杆件的转角—位移方程	31
2.6 带拉力杆件的转角位移方程	34
2.7 杆件的轴压(拉)刚度	36

2.8 有侧移失稳及轴力等效负刚度的概念	39
2.9 轴压杆的切线刚度矩阵	42
参考文献	45
第3章 钢截面的弹塑性性能	46
3.1 钢材的弹塑性性质	46
3.2 钢构件内的残余应力	47
3.3 截面在压力和弯矩作用下的弹塑性性能和极限承载力	49
3.4 双向弯矩和轴力联合作用下截面的极限承载力	54
参考文献	60
第4章 压杆的弹塑性稳定	61
4.1 理想直压杆的弹塑性弯曲失稳:切线模量理论和双模量理论	61
4.2 Shanley 模型——经过改进的阐述	62
4.2.1 理想 Shanley 模型	62
4.2.2 有初始弯曲 Shanley 模型的分析	65
4.3 理想直杆的弹塑性屈曲—残余应力的影响	68
4.4 真实压杆的弹塑性稳定	70
4.5 真实压杆的计算长度系数	72
4.6 设计公式的构建	73
4.7 强度问题和稳定问题的区别和联系	75
参考文献	76
第5章 能量原理和基于能量原理的数值计算方法	77
5.1 稳定问题的变分原理	77
5.1.1 有限变形下的应变	77
5.1.2 初应力问题的变分原理	80
5.1.3 初应力物体的屈曲问题	81
5.2 压杆弯曲失稳的正统能量原理	82
5.3 压杆弯曲失稳的 Ritz 法	83
5.4 压杆弯曲失稳的 Galerkin 法:一种加权残数法	86
5.4.1 Galerkin 法	86
5.4.2 Galerkin 法与虚位移原理	87
5.5 有限单元法—Ritz 法的应用	88
参考文献	92
第6章 框架的弹性稳定 (1)	93
6.1 引言,分析模型	93
6.2 简单框架的稳定性:位移法和线性抗侧刚度	95
6.3 多跨多层框架的稳定性:无侧移屈曲的简化模型	98
6.4 多跨多层框架的稳定性:有侧移屈曲的简化模型	99
6.5 同层各柱轴力不等时框架的有侧移失稳:各柱的相互支援作用	101

6.6	设有摇摆柱的框架的稳定性	103
6.7	单跨两层框架的屈曲: 层与层的相互支援	105
6.8	多层框架有侧移失稳的计算长度系数: 柱子抗侧刚度的指标	106
6.9	梁柱半刚性连接的影响	112
6.10	单跨两层框架的稳定性: 纯框架无侧移失稳的情况	113
	参考文献	115
第7章	框架的弹性稳定 (2)	117
7.1	考虑层与层相互作用的框架柱计算长度: 二层框架有侧移失稳	117
7.2	考虑层与层相互作用的框架柱计算长度: 三层框架有侧移失稳	120
7.3	不对称框架的屈曲: 合并解法	122
7.3.1	合并方法	122
7.3.2	底层柱脚连接方式不同的一般问题	123
7.4	多层框架有侧移失稳的柱子计算长度	124
7.5	多跨框架的稳定性	127
7.6	框架无侧移失稳的计算长度系数: 两层框架	129
7.7	框架无侧移失稳的计算长度系数: 三层框架	132
7.8	计算长度系数法的总结	135
	参考文献	136
第8章	格构式压杆和 Timoshenko 梁的稳定性	137
8.1	引言: 格构式杆件的计算模型	137
8.2	Timoshenko 梁的稳定性	139
8.3	格构式压杆的稳定	141
8.4	纯剪切失稳	142
8.5	考虑截面剪切变形影响时变截面柱的稳定性	143
8.6	考虑剪切变形影响时柱的屈曲模态	147
8.7	格构式压杆单肢失稳和整体失稳的相互作用	151
	参考文献	155
第9章	压弯构件的平面内稳定	157
9.1	引言	157
9.2	横向荷载作用下压弯杆的二阶弹性分析	158
9.2.1	两端铰支横向均布荷载作用下的压弯杆	158
9.2.2	两端铰支跨中集中荷载作用下的压弯杆	159
9.2.3	两端固支横向均布荷载作用下的压弯杆	160
9.2.4	两端固支跨中集中荷载作用下的压弯杆	161
9.2.5	端弯矩作用下两端简支压弯杆的二阶弹性分析	162
9.3	矩形截面压弯杆的承载力: Jezek 解法	162
9.4	工字形截面压弯杆的极限承载力: 设计公式的构建	165
9.5	等效弯矩系数	169

9.5.1	两端铰支横向均布荷载作用下的压弯杆	169
9.5.2	两端铰支跨中集中力作用下的压弯杆	169
9.5.3	非均匀弯矩的作用	170
9.5.4	两端固支横向均布荷载作用下的压弯杆	171
9.5.5	两端固支跨中集中荷载作用下的压弯杆	171
9.5.6	平面内稳定性计算的一般公式	171
9.6	竖向荷载作用下无侧移失稳的框架柱	172
9.7	有侧移失稳的框架柱的等效弯矩系数	173
9.7.1	竖向荷载作用下	173
9.7.2	水平荷载作用下	174
9.8	受拉侧先屈服的压弯杆	175
9.9	框架柱按照整层失稳的模式计算稳定性	175
9.10	按照二阶分析方法进行内力分析的框架柱的设计	177
9.10.1	近似的二阶分析	177
9.10.2	二阶分析下框架柱的平面内稳定设计	178
9.10.3	为什么内力采用二阶分析时框架柱计算长度系数取 1.0	179
	参考文献	180
第 10 章	双重抗侧力结构的稳定性	181
10.1	引言	181
10.2	剪切型支撑框架的稳定性	181
10.2.1	临界方程	181
10.2.2	支撑的门槛刚度	183
10.2.3	弱支撑框架的稳定性	184
10.3	弯曲型支撑框架的稳定性	185
10.3.1	刚性柱模型的研究	186
10.3.2	框架—弯曲型支撑柱双重结构的失稳模态	189
10.3.3	变刚度变轴力框架临界荷载与支撑柱刚度的关系	191
10.4	弯剪型支撑框架结构的稳定性	193
10.4.1	变截面弯剪支撑柱的抗侧刚度	193
10.4.2	弯曲型、弯剪型和剪切型支撑的分类	194
10.4.3	弯剪型支撑下框架的临界荷载与支撑刚度的关系	194
10.4.4	支撑的门槛刚度	197
10.4.5	弱支撑框架的临界荷载	198
10.5	多高层钢结构的分类及其稳定性设计	198
10.5.1	有侧移框架和无侧移框架的概念	199
10.5.2	支撑架的分类	199
10.5.3	侧移敏感结构和侧移不敏感结构	200
10.5.4	强支撑框架和弱支撑框架、纯框架	201
10.5.5	强支撑框架的判定准则	202

10.5.6	弱支撑框架柱的稳定性计算	202
10.5.7	钢结构分类的进一步说明	203
	参考文献	205
第 11 章	楔形变截面压杆的稳定性	206
11.1	变截面构件的应力	206
11.1.1	横向荷载作用下应力	206
11.1.2	横向荷载作用下的剪应力	208
11.2	楔形变截面柱子的稳定性	209
11.3	变截面梁对柱子提供的约束	211
11.3.1	楔形构件的转角位移方程	211
11.3.2	单段楔形梁的四个约束刚度	212
11.3.3	多段变截面梁的转动约束刚度	213
11.3.4	有侧移失稳时楔形梁在刚架平面内对柱的约束刚度	214
11.3.5	框架无侧移失稳时变截面梁对柱的转动约束刚度	215
11.4	楔形变截面压杆的弹塑性稳定	217
11.4.1	变截面柱在刚架平面内的等效计算长度	217
11.4.2	楔形变截面压杆极限荷载求解	218
11.4.3	变截面压杆与弹性等效的等截面压杆的弹塑性承载力比较	219
11.4.4	按大头截面及其内力为准的变截面压杆稳定承载力计算	220
11.5	楔形变截面压弯构件的平面内弹塑性稳定	222
	参考文献	225
第 12 章	工业厂房框架的稳定性	227
12.1	柱脚固接单阶柱的计算长度系数	227
12.2	柱脚铰接有吊车厂房门式钢架柱的计算长度	231
12.3	柱脚平面外铰支时阶形柱的平面外计算长度系数	232
12.4	柱脚平面外固支时阶形柱的平面外计算长度系数	234
12.5	厂房纵向抽撑时柱子的平面外计算长度	237
12.6	单层厂房双阶柱的平面内计算长度系数	239
12.7	单层厂房双阶柱的平面外计算长度系数	242
12.8	交叉支撑杆系的计算长度系数	244
12.8.1	交叉点处两根杆都连续时	245
12.8.2	交叉点处一根杆中断时	246
12.9	再分式腹杆的计算长度	246
	参考文献	247
第 13 章	增强结构稳定性的支撑	249
13.1	厂房纵向柱列减小压杆计算长度的支撑	249
13.1.1	引言	249
13.1.2	单根柱子的情况	250

13.1.3	柱列支撑的刚度要求	252
13.1.4	柱列支撑的强度要求	253
13.1.5	单柱多道支撑的情况	257
13.1.6	多柱多道支撑的情况	258
13.1.7	规范 GB 50017—2003 的规定	259
13.2	保证厂房几何不变性的支撑	261
13.2.1	单根柱子的情况	261
13.2.2	柱列支撑的刚度要求	262
13.2.3	有初始缺陷体系的强度要求	263
13.3	平台梁设计的刚度和强度要求	265
13.3.1	刚度要求	265
13.3.2	强度要求: 平台梁上的支撑力	267
	参考文献	270
第 14 章	非线性分析基础	272
14.1	引言	272
14.2	应变定义	272
14.2.1	Green 应变张量和 Green 应变增量张量	272
14.2.2	现时 (updated) Green 应变增量张量	273
14.2.3	Almansi 应变张量	277
14.3	应力定义	277
14.3.1	欧拉应力	277
14.3.2	Kirchhoff 应力	278
14.3.3	现时 Kirchhoff 应力张量	280
14.3.4	各种应力转换关系	281
14.3.5	在梁的平面弯曲问题中理解各种应力	282
14.4	应力应变关系	283
14.5	虚位移原理	284
14.6	增量变分原理: TL 法	286
14.7	增量变分原理: UL 法	287
	参考文献	289
第 15 章	平面框架的非线性分析——拖动坐标法	290
15.1	引言	290
15.2	平面梁柱非线性分析的变分原理	291
15.2.1	位移、位移增量和应变、应变增量	291
15.2.2	单向拉伸应力应变关系	293
15.2.3	变分原理	294
15.3	单元刚度矩阵—有限单元法	296
15.3.1	位移函数	296
15.3.2	物理刚度矩阵	297

15.3.3	初应力矩阵	298
15.3.4	单元刚度矩阵的坐标变换	302
15.4	弹塑性非线性分析的若干问题	303
15.4.1	小位移下的刚体检验	303
15.4.2	求解非线性平衡方程的增量—迭代技术	304
15.4.3	弹性结构不平衡力的计算	309
15.4.4	虚假卸载与弹塑性结构不平衡力的计算	312
15.5	几何非线性和材料非线性的广义位移控制法 (广义刚度参数法, GSP 方法)	316
15.5.1	双非线性分析问题的表述	316
15.5.2	算法实现的步骤	316
15.5.3	算例分析	317
	参考文献	319
	附录: 刚度系数矩阵	323
第 16 章	圆弧拱平面内弯曲失稳	325
16.1	引言	325
16.2	基本理论	325
16.2.1	应变—位移关系, 应力和截面内力	326
16.2.2	虚功方程和平衡微分方程	327
16.2.3	线性分析的方程	329
16.2.4	线性化屈曲方程	330
16.3	径向压力下圆环的屈曲	331
16.3.1	屈曲前变形	331
16.3.2	屈曲方程	331
16.3.3	中面不可伸长假定下的解	332
16.4	两端铰支拱平面内稳定方程	333
16.4.1	均布径向力下铰支拱的线性分析	333
16.4.2	两铰拱的屈曲	335
16.5	结束语	338
	附录 A 单轴对称工字型截面拱的剪应力和横向正应力及其影响	340
	参考文献	347

第 1 章 绪 论

房屋和桥梁等建筑结构及其组成构件在荷载作用下，外力和内力必须保持平衡。作为结构稳定理论学习必备知识的材料力学和结构力学，主要讲述构件处于平衡状态时的应力、内力和相应的变形。但这种平衡状态是否能长久保持，即这种平衡状态是否稳定，却很少提到，即使有这些内容，其叙述的深度也是不够的，教师的讲授也对其一带而过。

平衡状态是否能长期保持，是平衡状态的性质。平衡状态具有稳定的和不稳定的两种不同的性质。当平衡状态具有不稳定的性质时，轻微的扰动就会使结构或其组成构件产生很大的变形而最后丧失承载力，这种现象就称为失去稳定性或简称失稳。建筑结构因失稳而造成的事故在工程历史上并不是个别的，人们通过这些事故，对结构稳定这门学科也更加重视，结构稳定理论作为一门学科也得到了长足的发展。近几十年来由于结构形式的不断发展和高强度材料的应用，特别是建筑钢结构的快速发展，使结构趋于轻型和薄壁，结构和构件的刚度趋于下降，更容易出现失稳现象，因而对结构稳定性的研究及对结构稳定知识的加深和掌握也更有必要。本书主要为高等学校土建类专业在学习材料力学和结构力学后进一步加深结构稳定的基本知识而编写，可供高年级和研究生使用。

1.1 平衡的稳定性准则及平衡稳定性的基本概念

为了判断结构在已知荷载作用下的平衡状态是否稳定，这里介绍判断平衡稳定性的最常用的两个准则——静力准则和能量准则。

1.1.1 静力准则

满足静力平衡条件的某结构体系，当受到微小的扰动使其偏离原来的平衡位置时：若因此在该结构体系上产生一指向原来平衡位置的力（恢复力），因而当此扰动去除后，能使该体系迅速回复到原来位置，则原来的平衡状态是稳定的，或称稳定平衡；如产生背向原来平衡位置的力（负恢复力），因而使偏离越来越大，则原来的平衡状态是不稳定的，或称不稳定平衡；若受扰动后不产生任何作用于该体系的力，因而当扰动去除后，既不能恢复原来的平衡位置又不继续增大偏离时，则为中性平衡。这就是稳定的静力准则。

玩具不倒翁，在受到干扰后永远会回复到原来的平衡位置，它的平衡位置是稳定的。

人踩高跷只能在动态状态下进行，它是在静力状态下不能保持稳定的例子。

用手压缩一根有一定长度的弹簧，一不小心，弹簧就从侧面弹出，这是不能保持稳定平衡的又一个例子。

图 1-1 所示为理论力学中研究刚体平衡状态稳定性的一例子，它是解释平衡状态性质的最好的例子，也是理解上

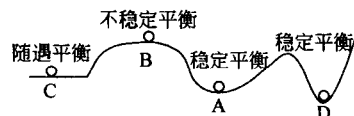


图 1-1 光滑小球在光滑表面的平衡

述静力准则的最好例子。

一个几何不变的结构体系，如果作用的荷载足够小，有理由认为它处在稳定的平衡状态。但是随着荷载的增加，可能会在某一时刻，它的平衡状态会从稳定的变成不稳定的。计算它从稳定平衡转化为不稳定平衡的荷载值，是研究结构稳定性的目的和任务。这个荷载称为临界荷载。

1.1.2 能量准则

结构体系的平衡稳定性还可以用体系的总势能 Π 来判别。总势能是结构体系内的应变能 U 和外荷载势能 V 两者的和。如果结构体系受到微小扰动而变形，体系的总势能 Π 是增加的（原来的总势能具有极小值），则原来的平衡状态是稳定的；如果总势能 Π 是减少的（原来的总势能具有极大值），则原来的平衡状态是不稳定的；假如总势能保持不变，则为中性平衡。这是稳定的能量准则。

对照图 1-1，回想刚体体系的总势能的计算方法，上述能量准则是显而易见的。

在结构力学中，我们知道弹性体系的应变能是体系在外力作用下储藏在体系内的已知能量，它标志着外力去除后回复到原来状态的能力。变形后应变能增加，因而始终为正值；而外荷载的势能 V （在荷载为保守力系的假定下，它等于荷载所做的功的负值）在变形后往往是减小的，因而始终为负值。由此我们看出上述两个稳定准则在物理意义上的联系。当为稳定平衡时，由能量准则可知，微小的扰动必须使总势能 Π 增加，这就要求微小扰动后应变能的增加大于外荷载势能的减小，因而扰动去除后，体系有一恢复力，这与静力准则中要求稳定平衡时在微小扰动去除后体系有一个正恢复力是完全一致的。

1.1.3 光滑表面上钢球的平衡稳定性

作为静力准则和能量准则的应用和阐释，现以一个小钢球在光滑面上的三种不同位置来说明平衡的稳定性。图 1-2 所示为一个小钢球分别支承在凹面（图 1-2a）、凸面（图 1-2b）和平面（图 1-2c）上。图中小钢球的初始位置用球心 A 表示，三种情况下钢球的重力 P 与支承反力 R 都使钢球处在静力平衡状态。今给以微小扰动使钢球偏离原来位置，球心由 A 点移到 B 点。当钢球支承在凹面上时，微小扰动后产生指向原来平衡位置的分力 $P\sin\theta$ ；当在凸面上时，则产生背向原来平衡位置的分力 $P\sin\theta$ ；当在平面上时，不产生任何分力。由静力准则可知，它们分别为稳定平衡、不稳定平衡和中性平衡。

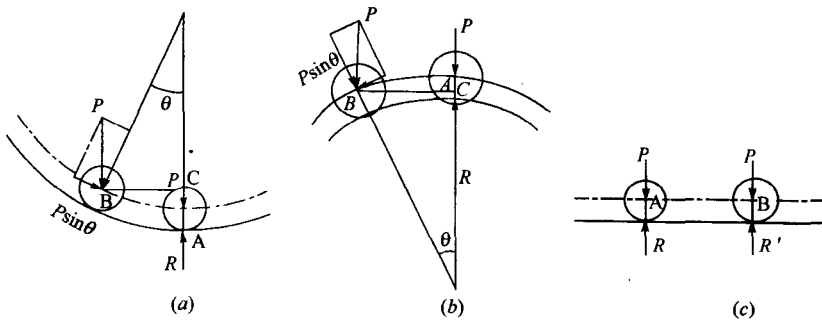


图 1-2 小钢球平衡位置的稳定性

(a) 稳定平衡；(b) 不稳定平衡；(c) 随遇平衡

再以能量的观点来解释。如设钢球在凹面时的总势能为 Π_0 ，当钢球球心从 A 点移到 B 点时，由于球心位置的提高，总势能将增大为：

$$\Pi = \Pi_0 + P \overline{AC} = \Pi_0 + P \overline{OA}(1 - \cos\theta)$$

总势能对位移 θ 的一阶和二阶导数（变分）分别为：

$$\frac{d\Pi}{d\theta} = P \overline{OA} \sin\theta, \quad \frac{d^2\Pi}{d\theta^2} = P \overline{OA} \cos\theta$$

可见当 $\theta=0$ 时， $d\Pi/d\theta=0$ ， $d^2\Pi/d\theta^2=P \overline{OA}$ 为正值，说明 Π_0 为极小值，因而是稳定平衡。

同样，不难证明钢球在凸面上时，当 $\theta=0$ 时， $d\Pi/d\theta=0$ ， $d^2\Pi/d\theta^2$ 为负值，此时 Π_0 为极大值，因而是稳定平衡。当钢球在平面上时，势能为一常量，总势能的一阶和二阶及高阶导数都为零，此时为中性平衡。

在应用上述静力准则时，要注意到，使钢球发生微小位移的微小扰动力是不进入研究的过程，即不进入平衡条件的，因为静力准则要求研究的是，扰动去除后的体系能否回复到原来状态。

在应用上述能量准则中，要注意 $d\Pi/d\theta=0$ 仅说明小球处在平衡状态，要判断这个平衡状态的性质，则需要看总势能是否是极大值、极小值。由高等数学的知识可知，当 $d^2\Pi/d\theta^2>0$ 时，总势能为极小，平衡状态是稳定的；当 $d^2\Pi/d\theta^2<0$ 时总势能为极大值，平衡状态是不稳定的；当 $d^2\Pi/d\theta^2=0$ 时，还要看总势能的高阶导数是大于零、小于零还是等于零才能判断出总势能在该平衡状态的极值性质，才能确定平衡状态的性质。

1.1.4 静力准则的扰动和能量准则的变分的关系，大变形理论

实际结构平衡状态的稳定性的判别当然没有上面刚体平衡状态的稳定性判别那么简单，上述的简单例子也不足以说明研究结构稳定性的方法。因此下面对图 1-3 所示的带支承的刚体—弹簧结构体系在轴心力 P 作用下的稳定性进行研究，这个例子已经具备了实际构件的与稳定性有关的所有要素，因而用它来说明稳定性的研究方法非常合适。

图 1-3 (a) 中的 AC 和 BC 是刚性链杆，在 C 点铰接，但在 C 点有一转动弹簧，转动系数为 k ，当 AC 和 BC 在一直线上时，弹簧不受力。研究此杆系在轴压力 P 作用下的稳定性。

设杆系发生如图 1-3 (b) 所示的变形，变形后的形状可用角位移 θ 一个变量来表示，因此这杆系具有一个自由度。变形后弹簧中的应变能为

$$U = \frac{1}{2}(2\theta)k(2\theta) = 2k\theta^2$$

式中 2θ 为 C 处两杆的相对转角， $k(2\theta)$ 为弹簧中的抵抗力矩，由于两者是同时由零逐渐加大的，故式中取两者乘积的 1/2。

变形后 B 点向左移动了 $l(1 - \cos\theta)$ ，荷载 P 的势能减小了，其值为

$$V = -Pl(1 - \cos\theta)$$

杆系的总势能为

$$\Pi = U + V = 2k\theta^2 - Pl(1 - \cos\theta)$$

总势能对角位移 θ 的导数依次为

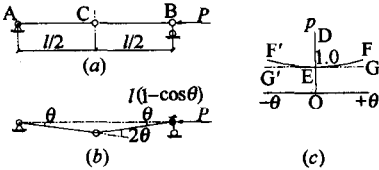


图 1-3 弹性连接刚性链杆系
在轴力作用下的稳定性

(a) 刚性链杆；(b) 屈曲模式；(c) 平衡路径