高等工程专科教学用书

高等数学

上册

山东工业大学高等数学教研室　编

山东科学技术出版社

高等工程专科教学用书

高等数学

上册

山东工业大学高等数学教研室 编

山东科学技术出版社

(鲁)新登字05号

高等工程专科教学用书
高等数学
上册
山东工业大学高等数学教研室 编
*
山东科学技术出版社出版
(济南市玉函路 邮政编码 250002)
山东省新华书店发行
山东新华印刷厂印刷
*
850×1168毫米 32开本 10印张 200千字
1993年5月第1版 1993年5月第1次印刷
印数1—9000
ISBN 7—5331—1217—2/O・50
定价 6.10元

前　言

近年来，我国高等工程专科教育有了很大发展，国家教委对高等工程专科教育的培养目标、制定教学计划的原则，都作了明确的规定，并对一些主要课程制定了教学基本要求．在新形势下，为适应高等工程专科各专业的教学需要，我们编写了这套高等数学教学用书．

本书是编者在总结多年教学实践经验的基础上，参照国家教委1991年颁发的高等工程专科《高等数学课程教学基本要求》进行编写的．根据对高等工程专科基础理论教学"以应用为目的，以必需、够用为度"的原则，在内容的选取上，除保证必要的系统性外，尽量注意到针对性与应用性，力求贯彻减少课堂教学时数的精神，适应精讲与自学相结合的教学改革要求，处理好传授知识与培养能力的关系．在编写过程中，不过分追求理论证明和推导的严密性，而注意加强对处理工程技术问题意义较大的基本知识和基本方法的教学内容，以利于培养运算和应用能力，在基本理论的叙述上，则力求直观简明，通俗易懂，便于教学，便于阅读．鉴于数值方法在工程技术中应用广泛，本书下册专设"数值计算方法"一章，集中介绍微积分学中各种数值计算方法，并增加了部分近似计算内容，以加强数值计算能力的培养．

全书共十一章，分上、下两册。上册五章，内容包括：函数、极限与连续，导数与微分，微分中值定理与导数应用，不定积分，定积分及其应用；下册六章，内容包括：空间解析几何，多元函数微分学，多元函数积分学，无穷级数，微分方程，数值计算方法．每

节后配有习题，每章后配有复习题，书末附有习题答案、初等数学常用公式、几种常用的曲线和积分表，讲完本书的基本内容约需130～150学时，少量注有“*”的内容可供不同专业选用．

本书还可作为成人高校有关专业的教材以及工程技术人员和具有高中水平的读者参考或自学．

本书由陈广桐、陈君华、隋晔熙主编，山东大学数学系许闻天副教授主审，张天德、宫献军、潘建勋、韩国平、王倩、刘华雯、李乐学、郑修才、宋君波、叶宏、杜世田、王玮、单沪军等参加了编写工作．在编写过程中，得到了山东工业大学校系领导和许多老师的关心和指导，承蒙张改荣、王自力、杨昌兰、秦静、王镇英、李莲英、张焕玲、张光明等分别审阅了部分初稿，在此谨表衷心的谢意．

限于水平与经验，不妥或谬误之处难免，恳请使用本书的同行和广大读者批评指正。

编者

1993年2月

目　录

第一章　函数、极限与连续

初等数学研究的对象，基本上是不变的量，而高等数学则以变量为研究对象．所谓函数关系就是变量之间的依赖关系．极限方法则是研究变量的一种基本方法．本章将介绍变量、函数、极限和函数的连续性等基本概念，以及它们的一些性质．

§1　函数的概念

一、函数的概念

1．变量及其变域

在观察自然现象或科学试验的过程中，常常会遇到两种不同的量，一种量在过程进行中不起变化，也就是保持一定的数值，这种量称为常量；另一种量在过程进行中是变化着的，也就是可以取不同的数值，这种量称为变量．通常用字母 a、b、c 等表示常量，用字母 x、y、z 等表示变量．

变量在变化时，它的取值都有一定的范围，这个范围称为变量的取值集合或变量的变域．变域一般都是由实数组成的集合，有时是实数集 R 本身，有时是 R 的子集，最常见的是区间，区间可用数集的记号表示如下：

开区间：　$(a,b)=\{x|a<x<b\}$；

闭区间：　$[a,b]=\{x|a\leqslant x\leqslant b\}$；

左开右闭区间：　$(a,b]=\{x|a<x\leqslant b\}$；

左闭右开区间：　$[a,b)=\{x|a\leqslant x<b\}$；

无穷区间：　$(a,+\infty)=\{x|x>a\}$，

$$[a, +\infty) = \{x \mid x \geqslant a\},$$
$$(-\infty, b) = \{x \mid x < b\},$$
$$(-\infty, b] = \{x \mid x \leqslant b\},$$
$$(-\infty, +\infty) = \{x \mid -\infty < x < +\infty\}.$$

开区间、闭区间、半开半闭区间以及无穷区间统称为区间．图 1--1 是部分区间的几何表示法．

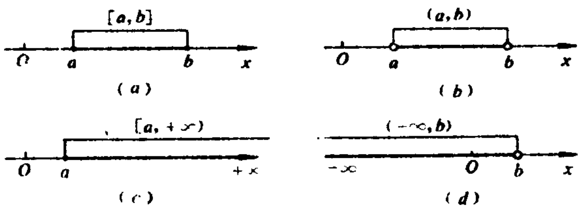

图 1--1

以上各种区间中的 a 和 b 称为区间的端点．a 称为左端点，b 称为右端点，属于区间内而不是端点的点称为区间的内点．

开区间 $(a-\delta, a+\delta) = \{x \mid |x-a| < \delta, \delta > 0\}$ 称为点 a 的 δ 邻域或简称为点 a 的邻域，点 a 称为邻域的中心，δ 称为邻域的半径．不包含点 a 的邻域 $\{x \mid 0 < |x-a| < \delta, \delta > 0\}$ 称为去心邻域．(图 1--2)

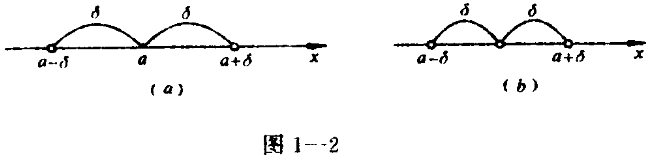

图 1--2

2. 函数的定义

在同一自然现象或工程技术问题中，常常有几个变量同时

在变化，它们并不是孤立的，而是互相依赖的按照一定规则变化着．先看几个例子，然后引出函数的定义．

例 1 圆的面积 A 与它的半径 r 之间的依赖关系由

$$A = \pi r^2$$

表示．这里 A 与 r 都是变量，当半径 r 改变时，面积 A 随着作相应的改变．例如，当 $r = 2$ 时，$A = 4\pi$；当 $r = 3$ 时，$A = 9\pi$ 等．

例 2 气象台用自动记录仪把一天的气温变化情况自动描绘在记录纸上得到如图 1—3 所示的曲线．

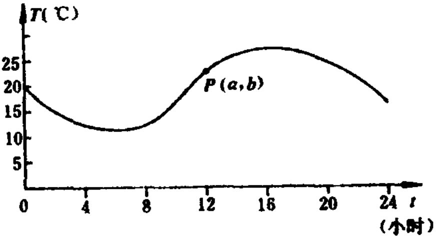

图 1—3

图中横坐标表示时间 t，纵坐标表示温度 T，曲线上任意一点 $P(a,b)$ 表示在时间 $t = a$ 时，测得的气温 $T = b$，所以，图形表示了在 24 小时内(即 $0 \leqslant t \leqslant 24$)时间与温度这两个变量之间的依赖关系，它反映了气温随时间变化的规律．

例 3 考察某河流的一个断面上各处水的深度，每隔 1 米测量一次(图 1—4)，将测得的数据列成表格如下：

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
y	0	0.2	0.5	0.9	1.2	1.5	1.9	2.0	1.8	1.4	1.3	1.0	0.7	0.4	0.2

此表给出了水深 y 与测量点离岸边距离 x 之间的依赖关系.

以上三例的实际意义虽不相同，但却具有共同的特性：每个

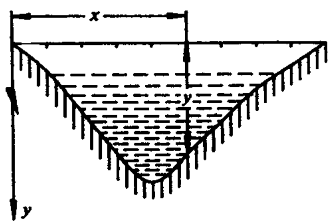

图 1—4

例子中都出现两个变量，当其中一个变量在一定的范围内取定一个数值时，按照某个确定的规则，另一个变量有唯一确定数值与它对应．两个变量取得的数值之间的这种对应关系就是函数概念的实质．

定义 1 设有两个变量 x 与 y，如果变量 x 在其变化范围 D 内任取一个确定数值时，变量 y 按照一定的规则有唯一确定的数值和它对应，则称变量 y 是变量 x 的函数，记为 $y=f(x)$，x 称为自变量，y 也称为因变量，D 称为函数的定义域，f 表示由 x 确定 y 的对应规则．

定义域与对应规则是函数的两个要素，如果两个函数具有相同的定义域和对应规则，则认为它们是相同的函数．

函数常用解析法（如例 1），图像法（如例 2），表格法（如例 3）来表示，在高等数学中主要研究用解析法表示的函数．

如果函数 $f(x)$ 在点 x_0 有对应的函数值 $f(x_0)$，则称函数在点 x_0 有定义，否则称函数 $f(x)$ 在点 x_0 无定义，$y=f(x)$ 在点 x_0 的函数值 $f(x_0)$ 又可记为 $y|_{x=0}$，即 $y|_{x=x_0}=f(x_0)$，显然，函数的定义域也就是使函数有定义的 x 值的全体；而相应的函数值的全体称为函数的值域．

3．函数的图形

在平面直角坐标系中，取 x 为横坐标，y 为纵坐标，称平面点集 $\{(x,y)\mid y=f(x),x\in D\}$ 为函数 $y=f(x)$ 的图形，通常是一条或几条曲线．

值得注意的是：有的函数在整个定义域上不能用一个统一的解析式表示，而是在定义域的一些不相重叠的真子集上用不

同的解析式表示，这样的函数称为分段函数．分段函数在整个定义域上是一个函数而不是几个函数．

例 4 函数

$$y = |x| = \begin{cases} x, \text{当 } x \geqslant 0 \\ -x, \text{当 } x < 0 \end{cases}$$

是一个分段函数，其定义域 $D = (-\infty, +\infty)$，值域 $W = [0, +\infty)$，如图 1—5.

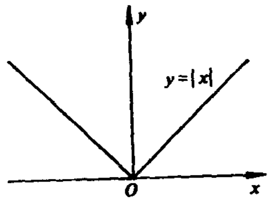

图 1—5

例 5 符号函数

$$y = \mathrm{sgn}(x) = \begin{cases} -1, \text{当 } x < 0 \\ 0, \text{当 } x = 0 \\ 1, \text{当 } x > 0 \end{cases}$$

也是分段函数，它的定义域 $D = (-\infty, +\infty)$，值域 $W = \{-1, 0, 1\}$，如图 1—6.

4. 反函数

定义 2 设函数 $y = f(x)$ 的定义域是 D，值域是 W，若对于 D 中任何两个不同的值 x_1, x_2，都有 $f(x_1) \neq f(x_2)$，则对于 W 中每一个 y 值，在 D 中都恰有一个 x 值与之对应，使得 $y = f(x)$，于是通过 $y = f(x)$ 定义了 x 是 y 的函数，称这个函数为函数 $y = f(x)$ 的反函数，记为 $x = f^{-1}(y)$. 这时，也称 $y = f(x)$ 为直接函数．有时，虽然直接函数 $y = f(x)$ 是单值函数，但其反函数 $x = f^{-1}(y)$ 却不一定是单值函数．

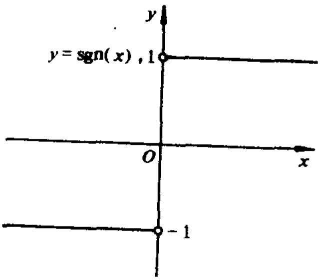

图 1—6

我们只研究单值函数，故当反函数为多值时，须根据需要取它的一个单值分支，例如，$y = x^2$ 的反函数是 $x = \pm\sqrt{y}$，这时可根据需要取 $x = \sqrt{y}$ 或 $x = -\sqrt{y}$.

若 $y = f(x)$ 的反函数是单值的，由定义必有恒等式

$$f^{-1}[f(x)] \equiv x.$$

由于习惯上常用 x 表示自变量，用 y 表示因变量，故常把 $y = f(x)$ 的反函数记为 $y = f^{-1}(x)$. 若把直接函数 $y = f(x)$ 与反函数 $y = f^{-1}(x)$ 的图形画在同一坐标系内，那么这两个图形关于直线 $y = x$ 对称.

5. 隐函数

用解析法给出的函数 $y = f(x)$ 是一个含有 x、y 的二元方程，而且是一个 y 已经解出的二元方程. 但是一个未解出 y 的二元方程 $F(x,y) = 0$ 也常可以确定每个 x 值所对应的 y 值，这时 $F(x,y) = 0$ 也给出了一个以 x 为自变量的函数 y，不过没有明显地表示出 y 如何依赖于 x，我们称它为隐函数，一般地有如下定义：

定义 3 设有方程 $F(x,y) = 0$，如果存在函数 $y = y(x)$，$(x \in (a,b))$ 使

$$F(x,y(x)) = 0$$

则称 $y = y(x)$ 是由方程 $F(x,y) = 0$ 所确定的隐函数，这时也称方程 $F(x,y) = 0$ 定义了 y 是 x 的隐函数. 若函数 y 能通过自变量直接表达为 $y = f(x)$ 的形式，则称为显函数.

例如方程 $x^3 + y^3 = 4$ 定义了 y 是 x 的隐函数，它的显函数

形式为

$$y = \sqrt[3]{4 - x^3}, (-\infty < x < \infty).$$

从方程 $F(x,y) = 0$ 解出 y 的过程称为隐函数的显化过程，但是并非所有隐函数都能显化，例如方程 $x^5 + y^5 + xy = 0$ 所定义的隐函数就不能用代数方法显化.

二、函数的几种特性

1. 函数的有界性

若有正数 M，使函数 $f(x)$ 在某区间 D 内恒满足

$$|f(x)| \leqslant M,$$

则称函数 $f(x)$ 在区间 D 内有界，否则称函数 $f(x)$ 在区间 D 内无界.

例如　$y = \sin x$，对于一切 x 都有

$$|\sin x| \leqslant 1,$$

所以，正弦函数在整个数轴上都是有界的.

又如　$f(x) = \dfrac{1}{x}$ 在 $[1, +\infty)$ 或 $[-3, -1]$ 内有界，这是因为，$x > 1$ 时，$\left|\dfrac{1}{x}\right| < 1$；$-3 \leqslant x \leqslant -1$ 时，$\left|\dfrac{1}{x}\right| \leqslant 1$. 但 $f(x) = \dfrac{1}{x}$ 在 $(0,1)$ 内是无界的，因为不存在一个正数 M，使 $\left|\dfrac{1}{x}\right| \leqslant M$ 对 $(0,1)$ 内的一切 x 都成立. 所以在研究函数的有界性时，一定要注明所论区间.

2. 函数的单调性

设函数 $f(x)$ 在区间 D 内有定义，如果对于 D 内的任意两点 x_1 和 x_2，只要 $x_1 < x_2$ 时，就有不等式

$$f(x_1) < f(x_2) \ (\text{或}\ f(x_1 > f(x_2))$$

成立，则称 $f(x)$ 为区间 D 内的单调增函数(或单调减函数)，单调增函数与单调减函数统称为单调函数，使函数保持单调性的自变量的区间称为该函数的单调区间.

函数的单调增加与单调减少是与区间有关的，如$f(x)=x^2$在$(0,+\infty)$内单调增加，在$(-\infty,0)$内单调减少，在$(-\infty,+\infty)$内既不是单调增函数也不是单调减函数.

单调增(减)函数的图形(图1—7)为沿横轴正向而上升(下降)的曲线.

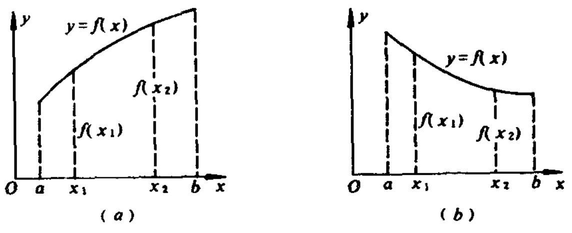

图1—7

3. 函数的奇偶性

设函数$f(x)$的定义域D关于原点对称，如果对于任何$x\in D$，恒有

$$f(-x)=-f(x)\ (\text{或}\ f(-x)=f(x)),$$

则称$f(x)$为奇(偶)函数.

例如$f(x)=x^3$是奇函数，因为$f(-x)=(-x)^3=-x^3=-f(x)$；又如$f(x)=x^2$是偶函数，因为$f(-x)=(-x)^2=x^2=f(x)$.

奇函数的图形关于原点对称；偶函数的图形关于y轴对称.

4. 函数的周期性

设函数$f(x)$的定义域为D，如果存在一个常数$T\neq 0$，使得对任何$x\in D$，有$x+T\in D$，且

$$f(x+T)=f(x),$$

则称$f(x)$为周期函数，T称为$f(x)$的周期，周期函数的周期通

常是指它的最小正周期.

三、初等函数与复合函数

1. 基本初等函数

下列六类函数称为基本初等函数.

常数函数	$y = C$;
幂函数	$y = x^{\mu}$(μ 是实数,$\mu \neq 0$);
指数函数	$y = a^{x}(a > 0, a \neq 1)$;
对数函数	$y = \log_a^x(a > 0, a \neq 1)$;
三角函数	$y = \sin x, y = \cos x, y = \mathrm{tg} x, y = \mathrm{ctg} x$,
	$y = \sec x, y = \csc x$;
反三角函数	$y = \arcsin x, y = \arccos x, y = \mathrm{arctg} x$,
	$y = \mathrm{arcctg} x$.

它们的性质、特点,中学都已讲过,在此不再赘述.

2. 复合函数

先举一个例子,设

$$y = \sqrt{u}, \text{而 } u = 1 - x^2.$$

以 $1 - x^2$ 代替第一式的 u,得

$$y = \sqrt{1 - x^2}.$$

y 是 u 的函数,u 是 x 的函数,所以通过 u,y 也是 x 的函数.

定义 4 设 y 是 u 的函数 $y = f(u)$,而 u 又是 x 的函数 $u = \varphi(x)$,且 $\varphi(x)$ 的值域包含在 $f(u)$ 的定义域内,则通过变量 u,y 就是 x 的函数,称这个函数为 $y = f(u)$ 及 $u = \varphi(x)$ 复合而成的复合函数,记为 $y = f[\varphi(x)]$,其中 u 称为中间变量.

注意,复合函数 $y = f[\varphi(x)]$ 的定义域应该由使 $u = \varphi(x)$ 的函数值属于 $y = f(u)$ 的定义域的那些 x 所组成,因此,通常只是 $u = \varphi(x)$ 的定义域的一部分,如 $y = \sqrt{x + 4}$ 的定义域是

$[-4,+\infty)$，仅是 $u=x+4$ 的定义域的一部分．由此知，不是任意两个函数都能复合成一个函数．例如：$y=\arcsin u$ 与 $u=2+x^2$ 就不能复合成一个函数．

复合函数不仅可以由两个函数，也可以由多个函数相继进行有限次复合而成．例如，$y=\sin u, u=\sqrt{v}, v=1-x$ 复合而成的函数为 $y=\sin\sqrt{1-x}$.

利用复合函数的概念，不仅能将若干简单的函数复合成一个函数，还可将较复杂的函数分解为若干个简单的函数，这对今后的许多运算是很有用的．

3．初等函数

定义 5 凡是由基本初等函数经过有限次四则运算与有限次复合步骤所构成，并可用一个数学式子表示的函数，称为初等函数．例如

$$y=\sqrt{1-x^2}, y=\sin^2 x, y=x^4+3x^3+x^2+1,$$

$$y=\left(\frac{2-(1-\sqrt{x})^2}{2+(1-\sqrt{x})^2}\right)^2$$ 等都是初等函数．

在本书中所讨论的函数绝大多数都是初等函数．

但是分段函数，例如

$$y=\begin{cases} e^x, & \text{当 } x\geqslant 0 \\ x^2, & \text{当 } x<0 \end{cases}$$

虽然它的每一个分支都是基本初等函数，但就整个函数来说它是用几个数学公式表示的，根据定义，分段函数不是初等函数．

4．双曲函数

在工程技术中常用的一种初等函数，叫双曲函数，其定义为

$$\mathrm{sh}x=\frac{e^x-e^{-x}}{2}, \mathrm{ch}x=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$$

分别称为双曲正弦函数与双曲余弦函数，其中 e 是无理数，$e=2.71828\cdots$．它们的图形很容易用“叠加”法作出来(图 1—8).