中等医药学校試用教科書

供各專業用

数　学

（下册）

三　角

鄒定仪　編

北京市中等医葯卫生学校数学教研組　修訂

人民卫生出版社

数学
（下册）
三角

开本：787×1092/32　印張：1 3/4　字数：43千字

鄒定仪 編

人民卫生出版社出版
（北京書刊出版業營業許可證出字第〇四六號）
·北京崇文區綫子胡同三十六號·

人民卫生出版社印刷厂印刷

新华书店科技发行所发行·各地新华书店經售

統一书号：14048·2592
定价：0.14元

1961年7月第1版—第1次印刷
1961年8月第1版—第2次印刷
（北京版）印数：10,001—50,000

目　　录

三　　角

三　　角

緒　　言

三角学是在人們的实踐过程中形成和發展起来的，其內容可分为兩部分：**第一部分是关于三角函数性質的研究；第二部分是三角形解法的研究。**

三角学在生产实踐与日常生活中有着广泛的应用，很多实际問題，如有关天文、測量、机械、力学以及建筑工程等問題，都要用到三角函数的知識。

如果我們想要知道一塊布或桌子的長度，那只要拿尺子量一下就可以了。但是，要想量出旗杆的高度，河流的寬度，我們用尺子量就不行了，这时，我們就可以利用三角函数的理論来进行測量。

所以，进行三角函数的研究，是有很大实际意义的。

第十三章　三角函数的概念

§ 105　角的概念的推广

在初中几何里，我們曾把角規定为从一点引出的兩条射綫所組成的几何圖形(圖 13-1)。但是我們在实际生活中，常常遇到时針的旋轉，齿輪的轉动，飞机螺旋槳的旋轉等，也使我們形成角的概念。这时，若再以初中里关于角的定义来解釋，就行不通了。所以，有必要給以新的定义来代替它。

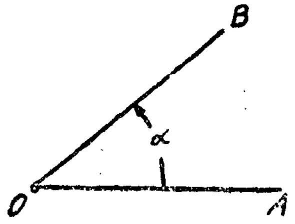

圖 13-1

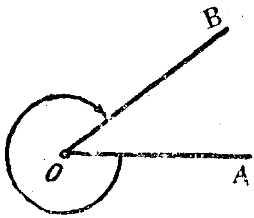

圖 13-2

任意一个角 α 可以看成是由一条射綫繞着它的端点旋轉而产生的圖形。

例如：射綫 OA 繞着它的端点 O 从开始位置 OA 旋轉到終止的位置 OB，就形成了角 α（圖 13-2）。端点 O 叫做角 α 的**頂点**，射綫旋轉的开始位置OA叫做角 α 的**始边**，而射綫旋轉的終止位置 OB 叫做角 α 的**終边**。

射綫旋轉时，可以有兩个相反的方向。我們規定：終边沿逆时針方向旋轉产生的角为**正角**；沿順时針方向旋轉产生的角为**負角**。

由于終边可以在各种不同的位置，所以，一个角可以小于、等于或大于 360°；如果射綫沒有作任何旋轉，仍留在开始位置，那末就說，射綫旋轉的角等于零度。

当射綫由始边按任何方向第一次到达已知角α的終边以后，不問从那一方向，繼續旋轉任何整周，終边仍然在同一位置，也就是說，具有共同的始边、終边和頂点的角可以有無限多个。如圖13-3中指出的四个角Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ、Ⅳ，它們具有共同的始边 OA、終边OB

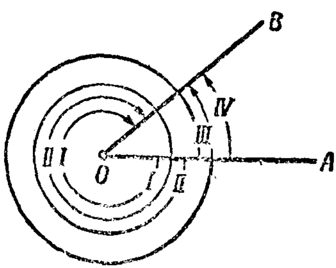

圖 13-3

和頂点 O. 因为旋轉一整周是 360°，所以如果 k 为任何整数，那末角 α 和角 $360°k+\alpha$ 有共同的始边和終边；也就是說，和角 α 有共同始边和終边的角的一般形式为： $360°k+\alpha$（k 为任何整数）。

§ 106 弧度制及度与弧度的换算

我們在过去常常采用“度”作为單位来度量角的大小，这种度量方法，在物理或其他科学技术問題中会感到不够方便；因此，我們来介紹另一种度量角的大小的方法。

1. 弧度制

在平面几何中，我們知道，对于一个已知为 $n°$ 的圆心角 α，它所对的弧長 l（也就是含有 $n°$ 的弧長）。可由下面的式子表示（圖 13-4-1）：

$$l=\frac{\pi Rn}{180}。（R 为圓半徑）$$

由这个算式，可以求得这个圓心角所对的弧長与半徑的比为：

$$\frac{l}{R}=\frac{\pi n}{180}$$

如果圓心角 α 的大小不变（仍为 $n°$），我們取不同的半徑 R_1，那末 α 所对弧長相应的是 l_1，这样应有

$$l_1=\frac{\pi R_1 n}{180}。$$

显然，这时弧長与半徑之比仍为

$$\frac{l_1}{R_1}=\frac{\pi n}{180} \quad（圖 13-4-2）$$

这就說明了，在圓心角相同的时候，圓心角所对的弧長和半徑的比相同，只有在圓心角的大小改变的时候，这个比才改变。

由此可知，角 α 所对的弧長与半徑之比仅决定于角 α 的大小，而与半徑的長短無关。

根据以上所述，所以我們**可以用圓心角所对的弧長 l 与半徑 R**

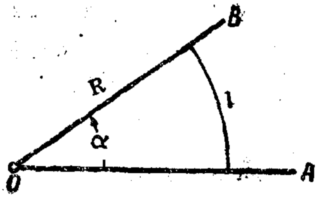

圖 13-4-1

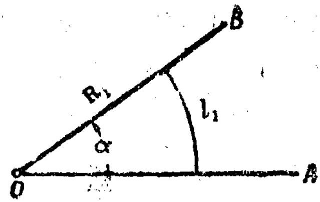

圖 13-4-2

的比$\left(\frac{l}{R}\right)$来表示角的大小，用这个比值来表示角的大小的方法，叫**做弧度法**。当圓心角所对的弧長与半徑相等，那末比值$\frac{l}{R}$就等于1，我們取这样的角作为用弧度法度量角的單位，这个單位叫做**弧度**。所以1弧度的角就是弧長等于半徑的圓心角。

如果用α表示以弧度为單位的角，那末它的量数有下面的式子：

$$\alpha=\frac{l}{R}。$$

2．度与弧度的相互換算

我們知道，1周角为360°，一个圓周長为$2\pi R$，所以1周角含有$\frac{2\pi R}{R}=2\pi$（弧度）。

由此可知　360°$=2\pi$（弧度）；180°$=\pi$（弧度）。

所以推得　$1°=\frac{\pi}{180}$（弧度）。

反之　1（弧度）$=\frac{180°}{\pi}$。

因此，要把若干度化成弧度，应当把已知的度数乘以$\frac{\pi}{180}$（弧度）；要把若干弧度化成度，应当用已知的弧度数乘以$\frac{180°}{\pi}$。

例1：把67°30′化成弧度。

解：$\because 67°30' = (67\frac{1}{2})°$

$\therefore 67°30' = \frac{\pi}{180}$(弧度)$\times 67\frac{1}{2} = \frac{135\pi}{360}$(弧度)$= \frac{3\pi}{8}$(弧度)

例 2：把$-\frac{3\pi}{5}$(弧度)化成度。

解：$-\frac{3\pi}{5}$弧度$=\frac{180°}{\pi}\times\left(-\frac{3\pi}{5}\right)=-108°$。

为了方便起見，我們將常用的度与弧度的換算关系用下表表示出来。

表 I

度	360°	270°	180°	90°	60°	45°	30°	18°
弧　　度	2π	$\frac{3\pi}{2}$	π	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{10}$

同时，为了使用方便，我們規定：用弧度表示角的大小时，可以略去"弧度"兩字。也就是說，α 等于 0.3、$\frac{1}{2}$等是分別表示 α 等于 0.3(弧度)、$\frac{1}{2}$(弧度)等。

§ 107　三角函数的定义

設 α 是任意一个正角或負角，以这个角的始边为横軸，角的頂点为原点，建立直角坐标系（如圖 13-5）。在角 α 的終边上任意取一点 P，它的坐标是(x,y)；則 $OP=\sqrt{x^2+y^2}=r$ 总是正的；对于每一个給定的角 α 都有六个比值，即$\frac{y}{r}$，$\frac{x}{r}$，$\frac{y}{x}$，$\frac{x}{y}$，$\frac{r}{x}$，$\frac{r}{y}$与角 α 对应。当角 α 变动时，六种比值都依着角 α 的变动而变动，并有如下定理。

定理：对于已知角α，比值$\frac{y}{r}$，$\frac{x}{r}$，$\frac{y}{x}$，$\frac{x}{y}$，$\frac{r}{x}$ 和 $\frac{r}{y}$仅决定于角α的大小，与所取M点的位置無关。

証明：在角α的終边上再任取一点$P'(x',y')$(圖13-5)，并設$OP'=r'$，从P及P'分别向x軸引垂綫PM和$P'M'$，則得兩相似三角形POM和$P'OM'$，而x'与x，y与y'的符号相同。

$$\therefore\quad \frac{y'}{r'}=\frac{y}{r};\ \frac{x'}{r'}=\frac{x}{r};\ \frac{y'}{x'}=\frac{y}{x};\ \frac{x'}{y'}=\frac{x}{y};\ \frac{r'}{x'}=\frac{r}{x};\ \frac{r'}{y'}=\frac{r}{y}。$$

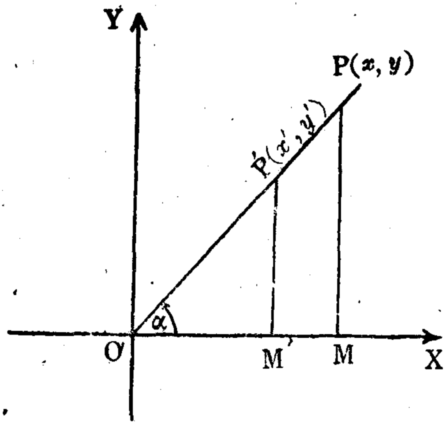

圖 13-5

由上証明，**說明了对于每一个已知角α都有完全确定的比值**$\frac{y}{r}$，$\frac{x}{r}$，$\frac{y}{x}$，$\frac{x}{y}$，$\frac{r}{x}$**和**$\frac{r}{y}$(比的后項不能是零)**和它对应，所以这些比值是角α的函数，这些函数叫做三角函数。**

定义：如果在角α終边上任取一点P，設P点的横坐标为x，縱坐标为y，原点O到P的距离是$r=\sqrt{x^2+y^2}$。

(1) y与r之比叫做**角α的正弦**，用$\sin\alpha$表示，即：

$$\sin\alpha=\frac{y}{r}。$$

(2) x 与 r 之比叫做角 α 的**余弦**，用 $\cos\alpha$ 表示，即：

$$\cos\alpha=\frac{x}{r}。$$

(3) y 与 x 之比叫做角 α 的**正切**，用 $\operatorname{tg}\alpha$ 表示，即：

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{y}{x}。$$

(4) x 与 y 之比叫做角 α 的**余切**，用 $\operatorname{ctg}\alpha$ 表示，即：

$$\operatorname{ctg}\alpha=\frac{x}{y}。$$

(5) r 与 x 之比叫做角 α 的**正割**，用 $\sec\alpha$ 表示，即：

$$\sec\alpha=\frac{r}{x}。$$

(6) r 与 y 之比叫做角 α 的**余割**，用 $\csc\alpha$ 表示，即：

$$\csc\alpha=\frac{r}{y}。$$

由定义看出如下諸关系式：

$$\sin\alpha=\frac{1}{\csc\alpha};\qquad \cos\alpha=\frac{1}{\sec\alpha};$$

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{1}{\operatorname{ctg}\alpha};\qquad \operatorname{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha};$$

$$\operatorname{ctg}\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha};\qquad \sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1。$$

由于正割与余割用的不多，所以我們以后只着重研究正弦，余弦，正切和余切。

例：設角 α 的終边上一点的坐标是(3,4)，求各三角函数值。

解：$\because x=3, y=4$，又 $r=\sqrt{x^2+y^2}$，

$\therefore r=\sqrt{3^2+4^2}=5$。

$\therefore\quad \sin\alpha=\frac{4}{5};\ \cos\alpha=\frac{3}{5};\ \operatorname{tg}\alpha=\frac{4}{3}=1\frac{1}{3};$

$$\operatorname{ctg}\alpha=\frac{3}{4};\quad \sec\alpha=\frac{5}{3}=1\frac{2}{3};\quad \csc\alpha=\frac{5}{4}=1\frac{1}{4}。$$

§ 108　三角函数在各象限內的符号

由于各象限內点的坐标的符号有正有負，而点到原点間的距离总看做是正的；因此，根据三角函数的定义，三角函数的值也应該有正有負，它們的符号則要看角的終边在哪一个象限而定。現在列表說明如下：

表 Ⅱ

符号 函数 / 角所在的象限	x	y	r	$\sin\alpha=\frac{y}{r}$	$\cos\alpha=\frac{x}{r}$	$\operatorname{tg}\alpha=\frac{y}{x}$	$\operatorname{ctg}\alpha=\frac{x}{y}$
Ⅰ	+	+	+	+	+	+	+
Ⅱ	−	+	+	+	−	−	−
Ⅲ	−	−	+	−	−	+	+
Ⅳ	+	−	+	−	+	−	−

注：(1) 表中的 x、y、r 分別代表角 α 的終边上任一点的橫坐标、縱坐标、和到原点的距离。

(2) 我們按終边在第几象限，就說角 α 是第几象限的角。

(3) 三角函数的符号經常要用，因此必須熟記。为便于記忆，还可以利用(圖 13-6)来帮助記忆。

圖13-6的意思是：角 α 的終边在第一象限时，全体函数都是正号；角 α 的終边在第二象限时，$\sin\alpha$ 是正号，其它函数都是負号；角 α 的終边在第三象限时，$\operatorname{tg}\alpha$ 与 $\operatorname{ctg}\alpha$ 是正，其它函数都是負；角 α 的終边在第四象限时，$\cos\alpha$ 是正号，其它函数都是負号。

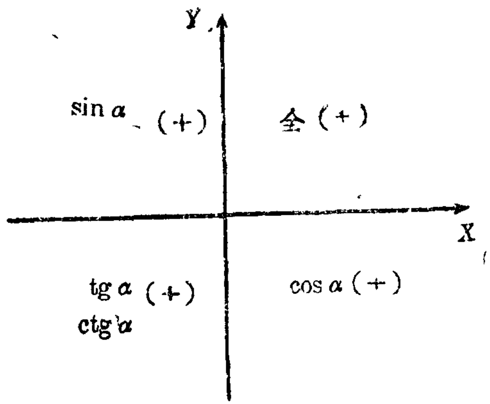

圖 13-6

§ 109 三角函数的几何解釋

根据§107中所下的定义，三角函数是用两条綫段的比来表示的；例如：$\sin\alpha=\frac{y}{r}$，$\cos\alpha=\frac{x}{r}$等等，其中x、y、r都是綫段。为了便于三角函数性質的研究，我們可以用一条綫段来表示一个三角函数。下面就来討論这个問題。

在直角坐标系中，以原点为圓心，以單位長为半徑作圓，这圓叫做**单位圓**。

單位圓与正半軸Ox和Oy相交于A点和B点，过A点和B点分别作單位圓的切綫(称作**正切軸**和**余切軸**)，并指定角α的終边与單位圓的交点为P；延長OP(或PO)与正切軸和余切軸的交点为T和S，然后作$PM\perp Ox$(圖 13-7)。

为了更正确地表示三角函数值，我們把圖中的綫段都看成是帶有符号的。我們規定：横(縱)綫段的符号与横(縱)坐标的符号一样，即向右(上)为正，向左(下)为負，从原点出發的綫段OP总是当作正的。設P点的坐标(x, y)，$r=OP=1$，于是，根据三角函数的定义：

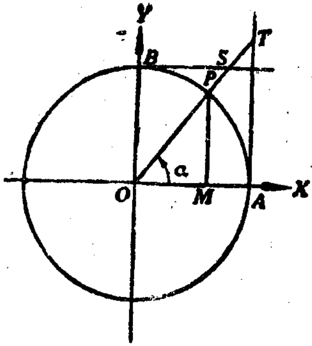

圖 13-7-1

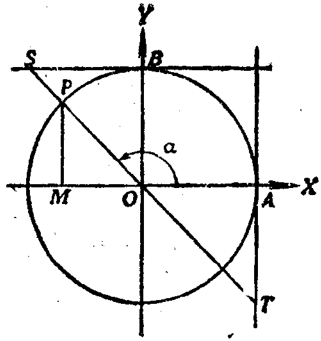

圖 13-7-2

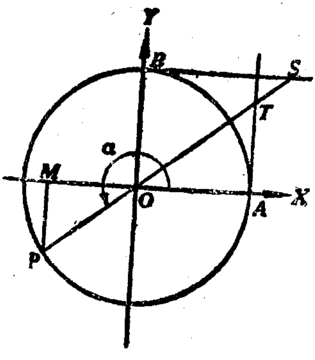

圖 13-7-3

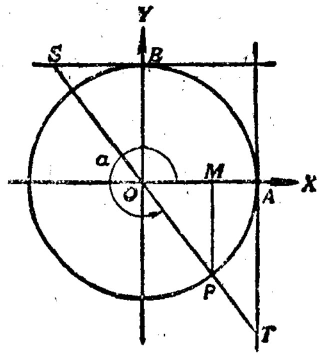

圖 13-7-4

$$\sin\alpha=\frac{y}{r}=\frac{MP}{OP};$$

$$\cos\alpha=\frac{x}{r}=\frac{OM}{OP};$$

$\because$ $OP=1$，并且是正的，

$\therefore$ $$\sin\alpha=\frac{MP}{OP}=\frac{MP}{1}=MP;$$

$$\cos\alpha=\frac{OM}{OP}=\frac{OM}{1}=OM;$$

無論 α 在哪个象限內，上述等式总是成立的。因为，当 MP 为正时(如圖 13-7-1,2)，$\sin\alpha$ 也是正；MP 为負时(圖 13-7-3,4)，$\sin\alpha$ 也是負(与§4所講一致)。另外，MP 的長度就是 $\sin\alpha$ 的值。

所以，$\sin\alpha$ 可用綫段 MP 来表示。

同理可知，$\cos\alpha$ 可用綫段 OM 来表示。

再看 $\operatorname{tg}\alpha$，無論角 α 的終边在哪一象限，在直角三角形 OMP 和 OAT 中，$\because \angle MOP=\angle AOT$，則 $\triangle OMP\sim\triangle OAT$，

$$\therefore \frac{OA}{OM}=\frac{AT}{MP}，\text{則}\frac{MP}{OM}=\frac{AT}{OA}=AT，$$

$$\text{但 } \operatorname{tg}\alpha=\frac{y}{x}=\frac{MP}{OM}，\ \therefore \operatorname{tg}\alpha=AT.$$

在(圖 13-7-1,3)中，AT 是正的，$\operatorname{tg}\alpha$ 也是正的，在(圖 13-7-2,4)中，AT 是負的，$\operatorname{tg}\alpha$ 也是負的。

同理我們有 $\operatorname{ctg}\alpha=\frac{x}{y}=\frac{OM}{MP}=\frac{BS}{OB}=\frac{BS}{1}=BS$。

由此可見，三角函数 $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$ 可以分別用單位圓上帶有符号的綫段 MP, OM, AT 和 BS 来表示。这些綫段分別叫作**正弦綫**，**余弦綫**，**正切綫**和**余切綫**。

§ 110 銳角 α 在 $0°$—$90°$ 之間变化时，三角函数值的变化

根据三角函数的几何解釋，我們看出当銳角 α 在 $0°$—$90°$ 之間变化时，对应于各角的正弦綫与正切綫是随着角度的增大而增大，而余弦綫与余切綫是随着角度的增大而减小(如圖 13-8)，这也就是說，

(1) 对于正弦和正切，角增大，函数值也增大。

(2) 对于余弦和余切，角增大，函数值反减小。

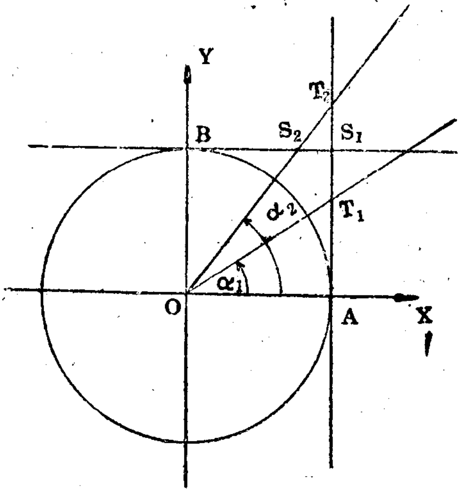

圖 13-8

§ 111 特殊角的三角函数值

根据§109的討論，我們可以利用三角函数值在單位圓上的表示法，求得几个經常用到的**特殊角**（0°，30°，45°，60°，90°，180°，270°）的三角函数值。

(1) 取 $\alpha=0°$，这时角的終边和正半軸 Ox 重合，終边和單位圓、正切軸都交于 $A(1,0)$点，但与余切軸不能相交（圖 13-9）；

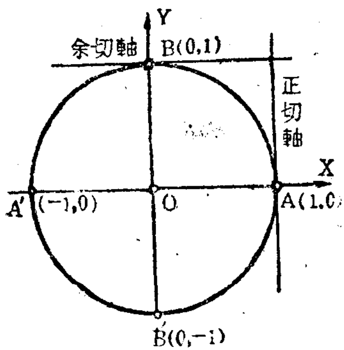

圖 13-9

所以，

$\sin 0° = \sin 0 = 0$；

$\cos 0° = \cos 0 = 1$；

$\operatorname{tg} 0° = \operatorname{tg} 0 = 0$；

$$\operatorname{ctg}0^\circ=\operatorname{ctg}0 \text{ 其值不存在。}$$

(2) 取 $\alpha=90^\circ$，这时角的終边和正半軸 Oy 重合，終边和單位圓、余切軸都交于 $B(0,1)$点，但不能和正切軸相交(圖13-9)；

所以，

$$\sin 90^\circ=\sin\frac{\pi}{2}=1;$$

$$\cos 90^\circ=\cos\frac{\pi}{2}=0;$$

$$\operatorname{tg} 90^\circ=\operatorname{tg}\frac{\pi}{2} \text{ 其值不存在；}$$

$$\operatorname{ctg} 90^\circ=\operatorname{ctg}\frac{\pi}{2}=0;$$

(3) 取 $\alpha=180^\circ$，这时角的終边和負半軸 Ox' 重合，終边和單位圓相交于 $A'(-1,0)$ 点，它的反向延長綫和正切軸相交于 $A(1,0)$点，但和余切軸不能相交(圖 13-9)；

所以，

$$\sin 180^\circ=\sin\pi=0;$$

$$\cos 180^\circ=\cos\pi=-1;$$

$$\operatorname{tg} 180^\circ=\operatorname{tg}\pi=0;$$

$$\operatorname{ctg} 180^\circ=\operatorname{ctg}\pi \text{ 其值不存在。}$$

(4) 取 $\alpha=270^\circ$，这时角的終边和負半軸 Oy' 重合，終边和單位圓相交于 $B'(0,-1)$ 点，它的反向延長綫和余切軸相交于 $B(0,1)$点，而与正切軸不能相交(圖 13-9)；

所以，

$$\sin 270^\circ=\sin\frac{3\pi}{2}=1;$$

$$\cos 270^\circ=\cos\frac{3\pi}{2}=0;$$

$$\operatorname{tg} 270^\circ=\operatorname{tg}\frac{3\pi}{2} \text{ 其值不存在；}$$

$$\text{ctg}\,270^\circ=\text{ctg}\frac{3\pi}{2}=0。$$

(5) 取 $\alpha=45^\circ$，这时角的終边与單位圓交于 P 点，过 P 作 $PM\perp OX$(圖13-10)，$\because\alpha=45^\circ$，$\therefore\angle OPM=45^\circ$，又$\because OP=1$，故由勾股定理得 $MP=OM=\frac{\sqrt{2}}{2}$；所以，

$$\sin 45^\circ=\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$\cos 45^\circ=\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$\text{tg}\,45^\circ=\text{tg}\frac{\pi}{4}=1;$$

$$\text{ctg}\,45^\circ=\text{ctg}\frac{\pi}{4}=1。$$

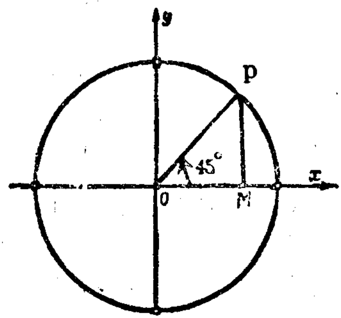

圖 13-10

(6) 取 $\alpha=30^\circ$，这时角的終边与單位圓的交点 P，作 $PM\perp OX$(圖 13-11)，$\because OP=1$，

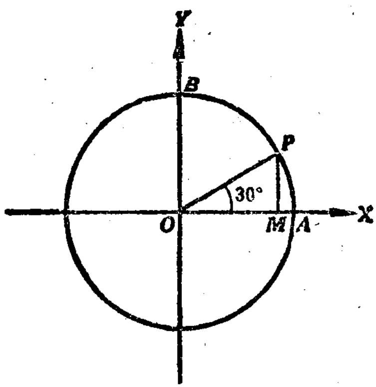

圖 13-11

$$\therefore\ PM=\frac{1}{2},\quad OM=\frac{\sqrt{3}}{2};$$

所以

$$\sin 30^\circ=\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2};$$

$$\cos 30^\circ=\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$\text{tg}\,30^\circ=\text{tg}\frac{\pi}{6}=\frac{1}{\sqrt{3}};$$

$$\text{ctg}\,30^\circ=\text{ctg}\frac{\pi}{6}=\sqrt{3}。$$