北京市成人高等院校统编试用教材

微 积 分

（修 订 本）

《经济应用数学基础》编写组

同心出版社

北京市成人高等院校统编试用教材

微积分

（修订本）

《经济应用数学基础》编写组

同心出版社

(京)新登字 214 号

图书在版编目(CIP)数据
微积分:修订本/《经济应用数学基础》编写组编/—北京:同心出版社,1995.6
ISBN 7-80593-131-3
Ⅰ.微… Ⅱ.经… Ⅲ.微积分-成人教育:高等教育-教材
Ⅳ.O172
中国版本图书馆 CIP 数据核字(95)第 03375 号

同心出版社出版、发行
(100734 北京市东单西裱褙胡同 34 号)
有色曙光印刷厂印刷 新华书店经销
1995 年 6 月第 1 版 1996 年 7 月第 2 次印刷
850×1168 毫米 32 开本 7.75 印张
字数:201 千字 印数:11100—18100 册
定价 7.80 元

前　言

在北京市成人教育局的指导下，中国职工教育数学学会北京分会部分教师承担了成人高等院校统编教材《经济应用数学基础》的编写工作。本套教材分为《微积分》、《线性代数与线性规划》和《概率论与数理统计》共三册，每册都配有相应的“学习指导与习题解答”。

在编写过程中，我们认真研究并讨论了教学大纲，广泛征求了成人高校数学教师的意见，力求编出一套具有大专水平、理论联系实际、基础理论充实便于自学的教材，以适合目前北京市成人高等院校财经类核心课程的需要。

由于时间短，编者水平有限，书中定有很多不妥之处，望广大教师与学员在使用本教材过程中不吝指正，使之不断完善。

本套教材由于仲云副教授任主编，王培根、张学忠、何嗣玫三位副教授任副主编，刘德荫教授、励金华教授、林士中教授主审，刘书田副教授修订。

本书由于仲云、张学忠编著。

北京市成人高等院校

《经济应用数学基础》统编试用教材编写组

目　录

第一章　极限与连续

极限的概念是微积分学的基本概念，它在微积分学中占有极重要的地位，它是微积分学的基础.

本章首先复习微积分学的研究对象——函数，然后通过实例介绍无穷小量和无穷大量以及极限的概念和函数的连续性概念.

§1.1　函　　数

（一）函数的概念

在日常生活、科学技术和生产中，有两类不同的量，一类是它的值在所研究的问题中始终保持不变的，我们把它叫常量. 例如，某产品的长度，在一段时间内某人的基本工资等都是不变量；另一类是它的值在所研究的问题中是变化的，我们把它叫变量. 例如，某人的计件工资，在一天中的气温等都是变量.

常量习惯用字母 a、b、c 等表示；变量习惯用字母 x、y、z、u、v 等表示.

为了引入函数的概念，我们先介绍下面的引例：

例 1　生产某种产品的固定成本 $C_1=10000$ 元，每生产一件产品，成本增加 30 元，求该产品的总成本 y 与产量 x 的数量关系.

解：　$y=10000+30x$

由上式可以看出，产量 x 取定某一值时，总成本 y 按照上述数量关系式就随之取一个确定的值与之对应. 例如，当产量 $x=100$(件)时，总成本 $y=10000+30\times100=13000$(元).

例 2　某种产品共有 10000 件，开始销售时每件售价为 10 元；待销售量超过 5000 件时，每件售价为 8 元. 求该产品的销售收入 y 与销售量 x 之间的数量关系.

解： 当销售量 x 小于等于 5000 件时，即 $0 \leqslant x \leqslant 5000$ 时，有

$$y=10x$$

当销售量 x 大于 5000 件且少于或等于 10000 件时，即 $5000 < x \leqslant 10000$ 时，有

$$\begin{aligned} y &= 5000 \times 10 + (x-5000) \times 8 \\ &= 10000 + 8x \end{aligned}$$

上述数学关系可整理为

$$\begin{cases} y=10x & (0 \leqslant x \leqslant 5000) \\ y=10000+8x & (5000 < x \leqslant 10000) \end{cases}$$

为了表示得更简单，上面的数学关系式常写成下面的形式：

$$y=\begin{cases} 10x & (0 \leqslant x \leqslant 5000) \\ 10000+8x & (5000 < x \leqslant 10000) \end{cases}$$

当销售量 x 取某一定值时，总收入 y 就按照上述关系取一确定的值与之对应，例如，当 $x=100$ 时，$y=10 \times 100=1000$；$x=1000$ 时，$y=10 \times 1000=10000$；$x=6000$ 时，$y=10000+8 \times 6000=58000$；$x=8000$ 时，$y=10000+8 \times 8000=74000$.

定义 1.1　设有两个变量 x 和 y，x 的取值范围为某实数集合 D，如果 x 在 D 中任取一个值，按照某种对应关系，y 都取一个确定的值与之对应，我们就说变量 y 是变量 x 的函数. 记作 $y=f(x)$ 其中，x 叫自变量，y 叫因变量或函数，x 的取值范围 D 叫函数的定义域，y 的取值范围叫函数的值域.

当自变量 x 在其定义域内取定某确定值 x_0 时，因变量 y 按照所给函数关系 $y=f(x)$ 求出的对应值 y_0 叫当自变量 $x=x_0$ 时的函数值，记作 $y|_{x=x_0}$ 或 $f(x_0)$.

例 3　已知 $f(x)=3x^2-2x-1$，求 $f(0)$，$f(1)$，$f(a)$，$f(-x)$ 及 $f(x+1)$.

解： $f(0)=3 \times 0^2-2 \times 0-1=-1$

$f(1)=3 \times 1^2-2 \times 1-1=0$

$f(a)=3a^2-2a-1$

$$f(-x)=3(-x)^2-2(-x)-1$$
$$=3x^2+2x-1$$
$$f(x+1)=3(x+1)^2-2(x+1)-1$$
$$=3x^2+4x$$

例 4 求下列函数的定义域：

(1) $f(x)=\dfrac{x}{3x+1}$

解： 在分式$\dfrac{x}{3x+1}$中，分母不能为零，所以 $3x+1\neq 0$ 解得

$x\neq -\dfrac{1}{3}$ 即$-\infty<x<-\dfrac{1}{3}$或$-\dfrac{1}{3}<x<+\infty$

(2) $f(x)=\sqrt{1-2x}$

解： 在偶次根式中，被开方式必须大于等于零，所以有

$1-2x\geqslant 0$ 解得 $x\leqslant\dfrac{1}{2}$ 即$-\infty<x\leqslant\dfrac{1}{2}$

(3) $f(x)=\lg(x-1)$

解： 在对数式中，真数必须大于零，所以有 $x-1>0$，解得

$x>1$

即 $1<x<+\infty$

(4) $f(x)=\arcsin(x+1)$

解： 取反正弦或反余弦的式子的绝对值必须小于等于 1，所以有： $-1\leqslant x+1\leqslant 1$

即 $-2\leqslant x\leqslant 0$

（二）函数的简单性质

1. 函数的奇偶性

定义 1.2 给定函数 $y=f(x)$，其定义域为 D.

(1) **如果对于任意的 $x\in D$，都有 $f(-x)=-f(x)$，则称 $f(x)$为奇函数；**

(2) **如果对于任意的 $x\in D$，都有 $f(-x)=f(x)$，则称 $f(x)$ 为偶函数.**

对于偶函数：因为 $f(-x)=f(x)$，所以若点 $P(x,f(x))$在函

数 $y=f(x)$的图形上，则点 $P'(-x,f(x))$也在该图形上，因而偶函数的图形关于 y 轴对称，如图 1-1：

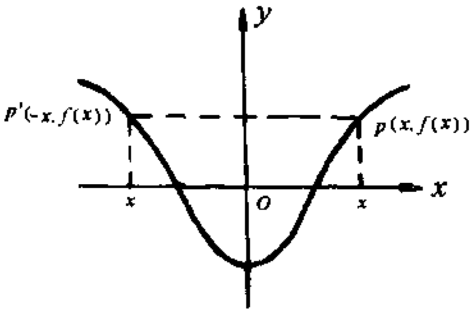

图 1-1

对于奇函数：因为 $f(-x)=-f(x)$，所以若点 $P(x,f(x))$在函数 $y=f(x)$的图形上，则点 $P'(-x,-f(x))$也在该图形上，因而奇函数的图形关于坐标原点对称，如图 1-2.

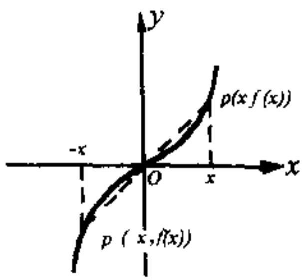

图 1-2

例 5 判断下列函数的奇偶性：

(1) $f(x)=3x^4-x^2+1$ (2) $f(x)=x+\sin x$

(3) $f(x)=x\cos x+1$

解： (1) 因为 $f(-x)=3(-x)^4-(-x)^2+1=3x^4-x^2+1=f(x)$，所以 $f(x)=3x^4-x^2+1$ 是偶函数.

(2) 因为 $f(-x)=(-x)+\sin(-x)=-x-\sin x=-f(x)$，所以 $f(x)=x+\sin x$ 是奇函数．

(3) 因为 $f(-x)=(-x)\cos(-x)+1=-x\cos x+1$，即 $f(-x)\neq f(x)$ 且 $f(-x)\neq -f(x)$，所以 $f(x)=x\cos x+1$ 是非奇非偶函数.

2. 函数的单调增减性

定义 1.3 设函数 $y=f(x)$ 在区间 (a,b) 内有定义，如果对 (a,b) 的任意两点 x_1 和 x_2，当 $x_1<x_2$ 时，有 $f(x_1)<f(x_2)$，则称此函数在区间 (a,b) 内是单调增加的（或称单调递增），区间 (a,b) 称为函数 $f(x)$ 的单调增加（递增）区间；当 $x_1<x_2$ 时，有 $f(x_1)>f(x_2)$ 则称此函数在区间 (a,b) 内是单调减少的（或称单调递减），区间 (a,b) 称为函数 $f(x)$ 的单调减少（递减）区间.

单调增加函数的图形是沿 x 轴正向上升的，如图 1-3；单调减少函数的图形是沿 x 轴正向下降的，如图 1-4：

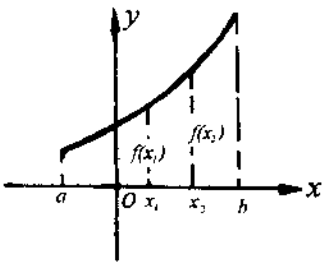

图 1-3

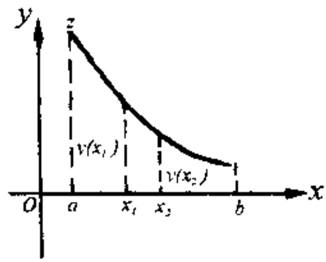

图 1-4

例 6 判断函数 $f(x)=\lg x$ 的单调性．

解： 函数 $f(x)=\lg x$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，在其定义域内任取两点 x_1,x_2，设 $0<x_1<x_2$.

因为 $f(x_2)-f(x_1)=\lg x_2-\lg x_1$

$$=\lg\frac{x_2}{x_1}>0$$

所以 $f(x_2)>f(x_1)$

即 $f(x)=\lg x$ 在$(0,+\infty)$上单调增加，$(0,+\infty)$是它的单调增加区间．

例 7 验证$(0,+\infty)$是 $f(x)=x^2$ 的单调增加区间；$(-\infty,0)$是 $f(x)=x^2$ 的单调减少区间．

证： (1) 在区间$(0,+\infty)$内任取两点 $0<x_1<x_2$，有：

$$f(x_2)-f(x_1)=x_2^2-x_1^2=(x_2-x_1)(x_2+x_1)>0$$

$$\therefore \quad f(x_2)>f(x_1)$$

故$(0,+\infty)$是 $f(x)=x^2$ 的单调增加区间．

(2) 在$(-\infty,0)$内任取两点 $x_1<x_2<0$，有：

$$f(x_2)-f(x_1)=x_2^2-x_1^2=(x_2-x_1)(x_2+x_1)$$

因为 $x_2-x_1>0$， $x_2+x_1<0$

所以有 $f(x_2)-f(x_1)<0$， 即 $f(x_2)<f(x_1)$

故$(-\infty,0)$是 $f(x)=x^2$ 的单调减少区间．

由例 7 可以看出：函数的单调增加性和单调减少性是函数在某一区间的性态，同一个函数在它的定义区间内的某一部分的单调性与另一部分的单调性可以不相同．因而我们在说函数的单调性时必须说明它在哪一个区间上单调增加或哪一个区间上单调减少．

3．函数的周期性

定义 1.4 对于函数 $y=f(x)$，如果存在不为零的正常数 T，使得 $f(x+T)=f(x)$恒成立，则称此函数为周期函数．如果存在最小正数 T 满足上式，则称这最小正数 T 为该函数的周期．

例如 函数 $y=\sin x$ 和 $y=\cos x$ 的周期为 2π；函数 $y=\sin wx$ 和 $y=\cos wx$ 的周期为$\frac{2\pi}{w}(w>0)$．这是因为：

$\sin w(x+\frac{2\pi}{w})=\sin(wx+2\pi)=\sin wx$．同样可推知，函数 $y=\operatorname{tg} wx$ 和 $y=\operatorname{ctg} wx$ 的周期为$\frac{\pi}{w}(w>0)$．

4. 函数的有界性

定义 1.5　设函数 $y=f(x)$ 在区间 (a,b) 内有定义，如果存在一个正数 M，使　$|f(x)|\leqslant M$　对于 (a,b) 内的任一点都成立，则称函数 $y=f(x)$ 在 (a,b) 内是有界的. 如果这样的 M 不存在，则称 $y=f(x)$ 在 (a,b) 内是无界的.

例如　函数 $y=\sin x$　在 $(-\infty,+\infty)$ 内是有界的，因为对于任意 $x\in(-\infty,+\infty)$，都有 $|\sin x|\leqslant 1$；又如 $y=\mathrm{arctg}x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内是有界的，因为对于任意 x，都有 $|\mathrm{arctg}x|<\frac{\pi}{2}$.

需要指出的是：函数的有界性与所讨论的区间有关. 例如，函数 $y=\frac{1}{x}$ 在区间 $(2,3)$ 内是有界的，即对任意的 $x\in(2,3)$，都有 $\left|\frac{1}{x}\right|<\frac{1}{2}$；而函数 $y=\frac{1}{x}$ 在区间 $(0,1)$ 内则是无界的. 因为当 x 无限趋近于 0 时，$\frac{1}{x}$ 可以任意变大，因而找不到一个正数 M，使得 $\left|\frac{1}{x}\right|\leqslant M$.

（三）初等函数

1. 复合函数

引例　若变量 y 是变量 u 的函数且 $y=10^u$，变量 u 又是变量 x 的函数 $u=\sin x$，则用代入法将 $u=\sin x$ 代入 $y=10^u$ 中可得变量 y 是变量 x 的函数 $y=10^{\sin x}$.

一般地，若变量 y 是变量 u 的函数 $y=f(u)$，变量 u 又是变量 x 的函数 $u=\varphi(x)$，而且在函数 $u=\varphi(x)$ 中 u 的值域的全部或一部分使函数 $y=f(u)$ 有意义，则同样可用代入法将 $u=\varphi(x)$ 代入 $y=f(u)$ 中得到 y 是 x 的函数 $y=f[\varphi(x)]$.

定义 1.6　已知 y 是 u 的函数，$y=f(u)$，而且 u 又是 x 的函数，$u=\varphi(x)$，当 x 在 $u=\varphi(x)$ 的定义域的全部或某一部分内取值时，由 $u=\varphi(x)$ 得到的函数值 u 均落在函数 $y=f(u)$ 的定义域内，则 y 是 x 的复合函数.

$y=f[\varphi(x)]$这个函数叫做由 $y=f(u)$，$u=\varphi(x)$复合而成的函数，其中 x 是自变量，u 叫中间变量. 函数 $y=f[\varphi(x)]$的定义域是使 $u=\varphi(x)$的函数值落在 $y=f(u)$的定义域中的 x 取值的全体.

例 8 已知 $y=\sqrt{u}$， $u=x^2+2x+2$，请写出 y 与 x 的函数关系.

解： 用代入法将 $u=x^2+2x+2$ 代入 $y=\sqrt{u}$ 中可得：

$$y=\sqrt{x^2+2x+2}$$

例 9 如果 $y=\ln u$， $u=2+v^2$， $v=\sin x$，请将 y 表示为 x 的函数.

解： 用代入法可得 $y=\ln(2+v^2)$

$$=\ln(2+\sin^2 x)$$

在微积分中更多的问题是分析一个复合函数是由哪些简单函数(基本初等函数及其经过有限次四则运算而成的函数，例如多项式函数，有理分式函数等)复合而成的.

例 10 指出下列复合函数是由哪些简单函数复合而成的：

(1) $y=\sin^2 x$.

解： 因为 $y=\sin^2 x=(\sin x)^2$， 所以 $y=\sin^2 x$ 是由 $y=u^2$，$u=\sin x$ 复合而成的.

(2) $y=\sin x^2$

解： 因为 $y=\sin x^2=\sin(x^2)$，所以 $y=\sin x^2$ 是由 $y=\sin u$，$u=x^2$复合而成的.

(3) $y=\cos(3x+1)$

解： $y=\cos(3x+1)$ 是由 $y=\cos u$，$u=3x+1$ 复合而成的.

(4) $y=\sqrt{1+x^2}$

解： $y=\sqrt{1+x^2}$是由 $y=\sqrt{u}$， $u=1+x^2$ 复合而成的.

(5) $y=\lg(x\sin x+2)$

解： $y=\lg(x\sin x+2)$是由 $y=\lg u$， $u=x\sin x+2$ 复合而成的. 其中 $u=x\sin x+2$ 是由基本初等函数 x、$\sin x$、2 经过四则

运算而成的函数，是简单函数不是复合函数.

复合函数的中间变量，有时可能不止一个．例如，$y=e^u$，$u=\sin v$，$v=1-x$，那末用代入法可得

$$y=e^u=e^{\sin v}=e^{\sin(1-x)}$$

是一个由两个中间变量 u、v 经过两次复合而成的复合函数.

例 11 指出下列函数是由哪些简单函数复合而成的.

(1) $y=\lg\cos x^2$

解： $y=\lg\cos x^2$ 是由 $y=\lg u$，$u=\cos v$，
$v=x^2$ 复合而成的

(2) $y=\mathrm{arctg}\sqrt{x^2+x+3}$

解： $y=\mathrm{arctg}\sqrt{x^2+x+3}$ 是由 $y=\mathrm{arctg}u$，$u=\sqrt{v}$，
$v=x^2+x+3$复合而成的.

2. 初等函数

定义 1.7 由基本初等函数(常数函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数)经过有限次四则运算以及有限次复合而成的函数，叫初等函数.

例如多项式函数 $y=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n$，有理分式函数 $y=\dfrac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_m}$ 以及例 10，例 11 中列举的复合函数都是初等函数.

3. 分段函数

例 某运输公司为客户运送货物的吨公里运价为：在 100 公里以内每吨/公里 2 元，超过 100 公里，每增加 1 吨/公里为 1.6 元. 若运输里程为 x(公里)，每吨货物运费为 y(元)，则每吨货物运费 y 与运输里程 x 的关系为：

当 $0\leqslant x\leqslant 100$ 时，$y=2x$

当 $x>100$ 时，$y=200+1.6(x-100)$

即 $y=\begin{cases}2x & (0\leqslant x\leqslant 100)\\ 200+1.6(x-100) & (100<x)\end{cases}$

这种把函数定义域分成若干部分，其函数关系式分段表达的函数叫做分段函数.

例如

$$y=f(x)=\begin{cases}x+1 & (x<0)\\ 0 & (x=0)\\ x-1 & (x>0)\end{cases}$$

就是把定义域$(-\infty,+\infty)$分成三部分，并分别用三个不同的关系式表达的分段函数.

当 x 取$(-\infty,0)$内的值时，y 的值由关系式$y=x+1$来计算；当 $x=0$ 时，$y=0$；当 x 取$(0,+\infty)$内的值时，y 的值由关系式$y=x-1$来计算. 例如，$f(-2)=-2+1=-1$；　$f(5)=5-1=4$.

它的图象，如图 1-5.

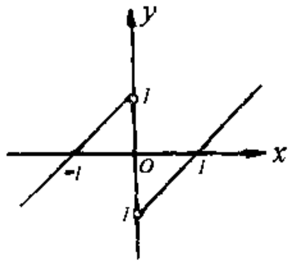

图 1-5

例 12　已知函数

$$f(x)=\begin{cases}x+2 & (0\leqslant x\leqslant 2)\\ x^2-1 & (2<x\leqslant 4)\end{cases}$$

求　$f(1)$，$f(3)$和 $f(x)$的定义域

解：$\because$　$1\in[0,2]$

$\therefore$　$f(1)=1+2=3$

$\because$　$3\in[2,4]$

$\therefore$　$f(3)=3^2-1=8$

定义域为$[0,4]$

例 13　用分段函数表示函数$y=3-|x-1|$，并画出它的图象.

解：根据绝对值定义可知

当 $x<1$ 时，　$|x-1|=1-x$

当 $x\geqslant 1$ 时，　$|x-1|=x-1$

于是有

$$y=\begin{cases}3-(1-x) & (x<1)\\ 3-(x-1) & (x\geqslant 1)\end{cases}$$