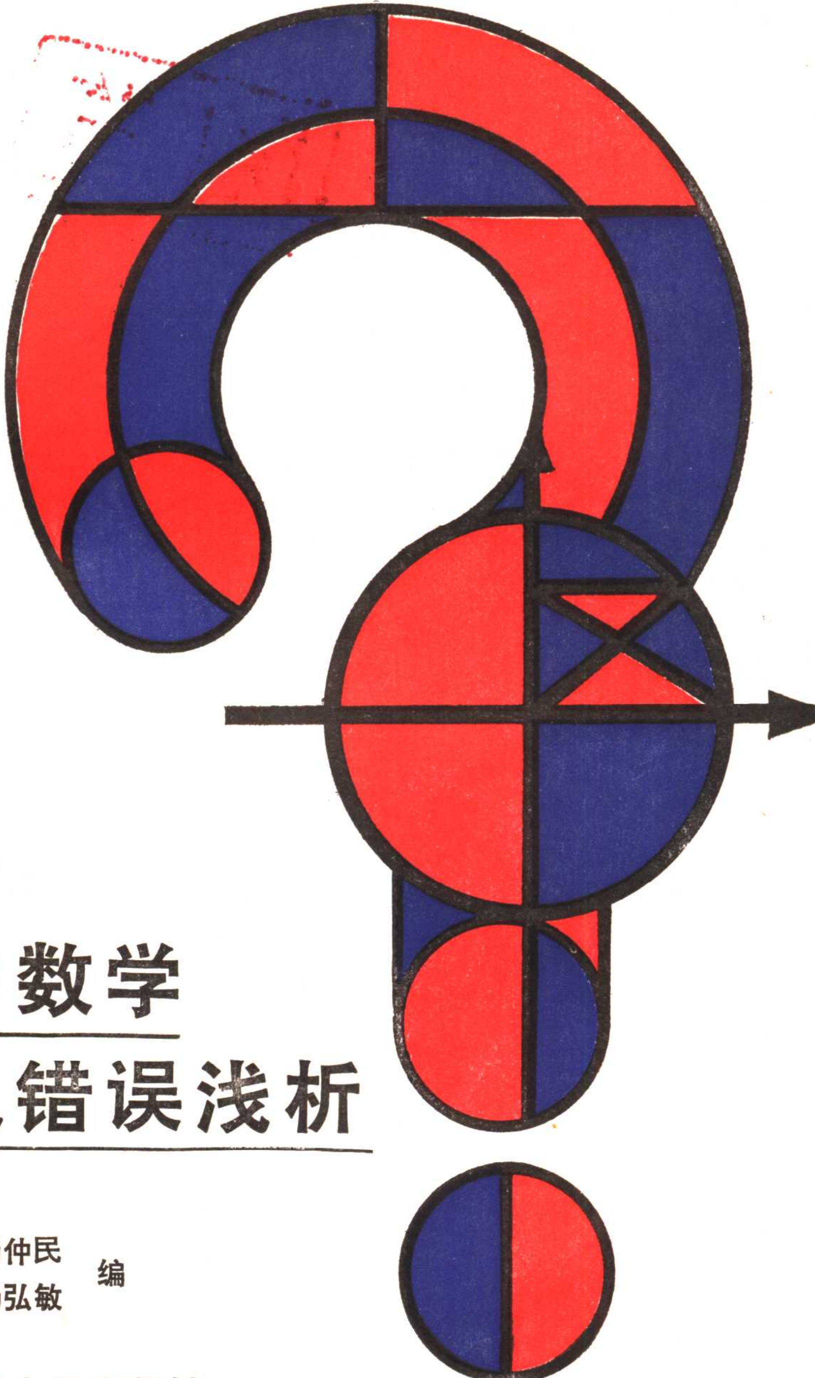

高中数学常见错误浅析

罗小伟　杨仲民
张子奇　杨弘敏　编

北京理工大学出版社

高中数学常见错误浅析

罗小伟　杨仲民
张子奇　杨弘敏　编

北京理工大学出版社

内 容 提 要

数学学习中，学生常因错误频繁产生而影响学习的兴趣，教师也感到十分棘手，但解题中的错误是有规律可寻的。

本书旨在明确指出各种常见错误、寻求原因、提供方法，使学习者概念准确、清晰，逻辑严谨慎密，方法正确得当。对于二十多年来收集的学生解题中的错误，经分类整理后先列出错解实例供学习者鉴别，然后进行分析，指明错误所在与原因，并给出正确解法或提示。

本书可供高中各年级学生、自学青年阅读，也可供数学教师及数学教育研究人员参考。

高中数学常见错误浅析

罗小伟　杨仲民
张子奇　杨弘敏　编

•

北京理工大学出版社出版

新华书店北京发行所发行　各地新华书店经售

北京密云华都印刷厂印装

•

787×1092毫米　32开本　8.125印张　182千字

1989年3月第一版　　1989年3月第一次印刷

ISBN 7-81013-145-1/G·14

印数：1—8500册　定价：2.55元

前　言

数学教学过程是以学生为主体的一种“系统工程”。学习者从始至终参与全过程，他们是信息的接收、存贮、加工者，并且用经过加工的信息逐步建立自身的知识结构。

学习数学必须正确理解概念、把握定理、公式、法则。是否能做到这些，常可通过解题清楚地反映出来。对解题中的错误如实记录、分类整理、认真分析是获得反馈信息极其重要的手段。

数学学习中，很多学生常因错误频繁产生无法杜绝而苦恼，影响了学习的兴趣，甚至使一些人丧失学习的信心。教师也常因学生错误率高感到十分棘手。因此，对于这个与学和教密切相关的通过系统地分析典型实例以预防一般错误的课题，应该认真地讨论、研究。

学生解题中出现的错误是有规律可寻的，或者说：“错有错的道理”。多年的教学实践表明：学生的绝大多数错误源于数量不多的典型错误，也源于一定的心理因素。让学习者了解哪些是常见错误，并对各种典型错误进行分析，研究产生错误的原因及产生错误的心理因素是一项基本的工作。这样才可能从教学的全过程中找出预防错误的办法，从而将出现错误这件坏事变为学生清楚地认识学习中存在的问题、教师进一步把握教学规律的好事，才可能防患于未然。

本书的素材绝大多数来自二十多年中学生所犯错误的记录，尤其是近十年来的教学实践。真正来自学生的错误，更

有针对性，也更有研究价值。能找出防止大多数学生易犯错误的方法，对学与教将有所裨益。

阅读本书所列举的错例时，学生可考察自己能否独立指出错误所在并加以改正；教师则可核查自己的学生在相应的问题上是否出现过类似的错误，有无识别谬误的本领。

本书旨在明确问题、寻求原因、提供方法，使学习者概念准确、清晰，逻辑严谨慎密，方法正确得当。为了说明问题，大多先列出错误实例，然后进行分析，指出错误并给出正确解法。至于繁、难、冷僻的题目虽不乏错例，均不涉及。

由于篇幅所限，立体几何，解析几何及充要条件，数列，极限等方面的内容将另成一册。

本书由罗小伟主编并审定，参加编写的有罗小伟、杨仲民、张子奇、杨弘敏等同志。编写过程中得到魏仲和同志的帮助，在此一并致谢。

编　者

目　录

Ⅰ、错误的严重性 …………………………………………（ 1 ）

Ⅱ、变坏事为好事 …………………………………………（ 8 ）

Ⅲ、常见错误与分析 ………………………………………（ 29 ）

一、集合、映射、函数…………………………………（ 29 ）

（一）集合与映射 ……………………………………（ 29 ）

（二）函数定义与图象 ………………………………（ 31 ）

（三）函数增减性与奇偶性 …………………………（ 44 ）

（四）反函数与其它 …………………………………（ 53 ）

二、三角函数……………………………………………（ 60 ）

（一）三角函数的定义与性质 ………………………（ 60 ）

（二）三角函数的恒等变换 …………………………（ 74 ）

（三）反三角函数 ……………………………………（ 85 ）

（四）三角方程 ………………………………………（ 103 ）

（五）解三角形 ………………………………………（ 112 ）

三、方程 …………………………………………………（ 125 ）

（一）关于二次方程 …………………………………（ 125 ）

（二）指数、对数方程 ………………………………（ 133 ）

四、不等式的解法与证明 ………………………………（ 141 ）

（一）不等式的解法 …………………………………（ 141 ）

（二）不等式的证明 …………………………………（ 162 ）

五、用初等方法求函数的最值…………………………（ 172 ）

（一）不注意二次函数判别式、函数的定义域与值域所造成的错误 ……………………………………………（ 172 ）

（二）关于三角函数的最值 …………………………（ 177 ）

（三）使用公式$\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}$求函数最值时的错误 ………（181）
（四）最值与极值不应混淆 ……………………………………………（207）
六、复数 ……………………………………………………………（209）
（一）复数的定义 ……………………………………………………（209）
（二）复数的三角形式 ………………………………………………（215）
（三）在复数集中解方程 ……………………………………………（224）
七、排列与组合 ……………………………………………………（231）
（一）排列与组合概念的区分 ………………………………………（232）
（二）加法与乘法原理的区分 ………………………………………（233）
（三）重复与遗漏问题 ………………………………………………（235）

I. 错误的严重性

数学学习中的错误多是众所周知的，但如不对各种错误作具体地统计和分析，则对错误率的高低，错误的严重程度等指标无法知晓。下面将列举几个题目错误解法的记录，以及简单的指标统计数。读者从中可以看到错误率之高及错误程度之严重是多么惊人，而且这些错误出自重点中学，普通中学的情况就更可想而知了。

对于学生来说，错误如未能及时纠正，便会逐渐积累，决不仅造成一次失误。各种错误将轮番起反作用，其结果必将阻碍学生继续学习，使他们寸步难行。

例1 写出下列图象所表示的函数关系式。

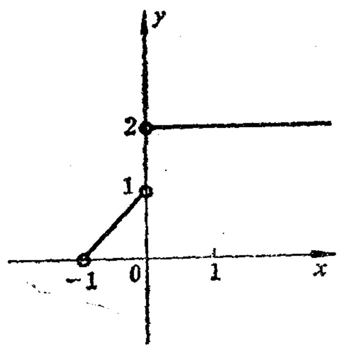

图 I.1

本题主要检查函数概念（定义域、值域、对应规则）和函数图象的概念。

错误解答：

（1）$x>0$时，$y=2$；

$x=0$时，$1\leqslant y<2$；

$-1<x\leqslant 0$时，$0<y\leqslant 1$。

（2）$x>0$时，$y=2$；

$-1<x\leqslant 0$时，$y=x$（$y=x-1$，$y-1=x+1$）。

（3）$y=2$，$y=x+1$，

(4) $y=x+1$，$x>0$时，$y=2$。

(5) $y=x+1$，$x\neq-1$；$y=2$，$x\neq0$。

(6) $y=2$；$y=kx+b$。

(7) $y=2x\left(\sqrt{\dfrac{1}{x}}\right)^2$；$y=\dfrac{(x+1)^2}{x+1}$。

分析：（1）中错误有二。其一是对于$-1<x\leqslant0$部分仅写出函数值y的范围$0<y\leqslant1$，而未写出函数关系式，x、y之间如何对应未反应出来。其二是认为当$x=0$时，对应值为$1\leqslant y<2$，对于自变量x的一个值$x=0$，因变量y竟有无穷多个值与之对应，这是函数概念方面的严重错误。而且把图象上（0，1）到（0，2）间的线段也误认为是函数图象的一部分。

（2）中当$-1<x\leqslant0$时，函数关系式写错。

（3）中未写出自变量取哪些值时，函数值为2；x取哪些值时，$y=x+1$。

（4）中缺x取哪些值时，$y=x+1$。

（5）中只注意了分段函数$y=x+1$和$y=2$，前者$x\neq-1$后者$x\neq0$，而未明确自变量取值范围。

（6）中未明确自变量取值范围，且未确定k和b。

（7）中也只注意$y=x+1$在$x=-1$处无定义，而$y=2$在$x=0$处无定义，而无相应的自变量取值范围。

正确解答：

$$y=\begin{cases}x+1, & -1<x\leqslant0\\ 2, & x>0。\end{cases}$$

上述错误解答摘自某校高三一个班的数学试卷。学完了全部中学数学，对函数及其图象概念的理解竟然达到如此地

步，难道不应引起我们的注意吗？

例2　求复数$a+bi$（$a\neq0$）的辐角主值。

错误解法：设$a+bi$（$a\neq0$）的辐角主值为θ，则

$$\operatorname{tg}\theta=\frac{b}{a}$$

$$\therefore\qquad\theta=\operatorname{arctg}\frac{b}{a}$$

即$a+bi(a\neq0)$的辐角主值为　$\operatorname{arctg}\frac{b}{a}$。

分析：$\because -\frac{\pi}{2}<\operatorname{arctg}\frac{b}{a}<\frac{\pi}{2}$，

但辐角主值θ却可满足

$$0\leqslant\theta<2\pi,$$

故$\operatorname{arctg}\frac{b}{a}$至多能表示一部分复数的辐角主值。

此题错误率高达84%，原因在于：（1）对辐角主值概念不清；（2）反正切函数的值域未弄清；（3）对字母a、b既可表示正数也可表示负数，b还可为0未掌握。

正确解法：当$a>0$，$b\geqslant0$时，

$$\theta=\operatorname{arctg}\frac{b}{a}。$$

当$a<0$，$b\geqslant0$时，

$$\theta=\pi-\operatorname{arctg}\frac{b}{-a}=\pi+\operatorname{arctg}\frac{b}{a}。$$

当$a<0$，$b<0$时，

$$\theta=\pi+\mathrm{arctg}\frac{-b}{-a}=\pi+\mathrm{arctg}\frac{b}{a}。$$

当$a>0$，$b<0$时，

$$\theta=2\pi+\mathrm{arctg}\frac{b}{a}。$$

例3 动点P到A（a，0），B（$-a$，0）两点连线的斜率之积为k，求P点的轨迹方程。

错误解法：设P点坐标为P（x，y），则

$$K_{PA}=\frac{y}{x-a}，K_{PB}=\frac{y}{x+a}。$$

依题意

$$\frac{y}{x-a}\cdot\frac{y}{x+a}=+k, \qquad ①$$

$$y^2=k(x^2-a^2),$$

$$kx^2-y^2=ka^2, \qquad ②$$

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{ka^2}=1。 \qquad ③$$

故P点轨迹方程为

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{ka^2}=1。$$

分析：由①变形为②时，由于去掉了$x\neq\pm a$的限制条件，因此增加了（$\pm a$，0）这两点。

由②变形为③时，增加了$k\neq0$的限制条件，故动点P的轨迹方程应写为

$$kx^2-y^2=ka^2，（x\neq\pm a）。$$

若将轨迹方程写为

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{ka^2}=1。$$

应注意条件$x\neq\pm a$，并补上$y=0$，$x\neq\pm a$。

当$K=0$时，P点轨迹为x轴，但除去（$\pm a$，0）两点。

当$K>0$时，P点轨迹为双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{ka^2}=1$，但除去其上（$\pm a$，0）两点。

当$k<0$时，若$k\neq-1$，P点轨迹为椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{(-ka^2)}=1$，但除去其上（$\pm a$，0）两点。

当$k=-1$时，P点轨迹为圆$x^2+y^2=a^2$，但除去其上两点（$\pm a$，0）。

这是一个解析几何统测题。检查重点班试卷看到，全班无一人得出正确答案。绝大多数学生认为轨迹方程为$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{ka^2}=1$，但未注意到条件$x\neq\pm a$的限制。少数学生得出方程$kx^2-y^2=ka^2$，也未注意条件$x\neq\pm a$。当问这些学生：你的结论正确吗？他们异口同声回答：我忘记在方程两边同除以ka^2了。可见这些学生与绝大多数学生所犯错误是一样的。究其原因，其错误主要与下列问题有关：

（1）分式的分母不能为零；

（2）字母既可表示正数，也可表示负数和零；

（3）零不能作除数；

由于初中一年级的知识未真正掌握，在高中毕业时一齐暴露出来。对于在数学教学中进行严谨性的训练与培养决不能掉以轻心，要步步有据，层层把关才行。

例4 五个连续自然数的平方和不可能是一个完全平方数。

错误证法：设五个连续自然数为

$$n-2,\ n-1,\ n,\ n+1,\ n+2。$$

则 $(n-2)^2+(n-1)^2+n^2+(n+1)^2+(n+2)^2$

$=5n^2+10$。

若平方和为完全平方数，即二次三项式$5n^2+10$有二相等实根，则应判别式为零。

但 $\Delta=0^2-4\times5\times10=-200<0$，

$\therefore$ $5n^2+10$不可能是完全平方数。

这个题目的证明曾让初一至高三各年级学生反复检查，除有一个学生表示稍有怀疑外，没有学生能指出错误。

分析：问题出在否定结论时发生错误。由假设$n-2>0$，即$n>2$原命题成为：对于任何大于2的自然数，$5n^2+10$不是完全平方数。其否命题是：存在一个大于2的自然数，使得$5n^2+10$是一个完全平方数。并非对所有n（$n>2$）$5n^2+10$都是完全平方数，当然不能推得$\Delta=0$。

现举一反例，n为自然数，$2n^2+14$的判别式$\Delta=0^2-4\times2\times14=-112<0$，但当$n=5$时，$2n^2+14$的值为$2\times5^2+14=64=8^2$，恰为完全平方数。

原命题的正确证法应是：设五个连续自然数为$n-2$、$n-1$、n、$n+1$、$n+2$，则其平方和为$5n^2+10$。

若$5n^2+10$为完全平方数，设为N^2，

由 $$5n^2+10=N^2,$$

$$5(n^2+2)=N^2,$$

则N为5的倍数。

设　　$N = 5k$，有　$5(n^2+2) = (5k)^2$，

$$n^2+2 = 5k^2。$$

n^2+2应为5的倍数，但n^2的末位数字只能是0、1、4、5、6、9，故n^2+2的末位数字只能为2、3、6、7、8、1，这个矛盾说明5（n^2+2）不是完全平方数。

II 变坏事为好事

对待错误有不同的认识态度和方法。有的同志不能辩证地看待错误，只要出了错误一概认为是坏事，急于立即去除，一刻也不能“容忍”。他们犯了急性病，对于纠正错误不一定有利。其实，从认识论的角度看，错误并非都是坏事。为使学生深入地认识某些事物（如概念、法则、定理等），有时确乎需要提出一些“似是而非”或容易出现错误的问题让学生思考，经过讨论辨明是非、区分真伪，这样的认识才是较为可靠的。在这个过程中，“错误”成了“引子”，可以引出正确的结论。

有些错误对于初学者和未深入思考的人是极易产生的，负迁移使他们不知不觉地犯了错误，这种错误在教学中的作用十分重要。有经验的教师正是利用对这些错误的充分讨论，使学生领悟其中奥妙而清醒，并在分析错误的过程中学会一般性地研究问题，从而防止错误的重犯。

应当发挥“反面教员”的作用。对典型错误认真分析，进行正误对比，才有利于学生从反面加深对知识的理解，尤其是理解概念，正确地应用公式、法则、定理。充分利用错误才能变坏事为好事，取得教学的主动权，这无疑将提高教师与学生教和学的能力，真正提高教学质量。

例1 一个数列的前n项和公式为

$$S_n = n^2 + 3n + 1。$$

问这个数列是否是等差数列？

错误解法：$\because$ $a_n = S_n - S_{n-1}$，

$\therefore$ $a_n = (n^2 + 3n + 1) - [(n-1)^2 + 3(n-1) + 1]$

$= 2n + 2$。

$\because$ $a_{n+1} - a_n = [2(n+1) + 2] - (2n + 2) = 2$，

$\therefore$ 数列a_1，a_2，…，a_n…为等差数列。

分析：表面看似乎没有问题，但$a_n = s_n - s_{n-1}$仅对$n \geqslant 2$成立，当$n = 1$时，$a_1 = s_1$，

即 $a_1 = S_1 = 1^2 + 3 \times 1 + 1 = 5$。

$a_n = 2n + 2$当$n = 1$时，$a_1 = 2 \times 1 + 2 = 4$，与$a_1 = 5$矛盾。这说明$a_n = 2n + 2$对$n = 1$不成立。

因而$a_{n+1} - a_n = 2$也仅对$n \geqslant 2$成立。

当 $n = 1$时，$a_2 - a_1 = (2 \times 2 + 2) - 5 = 1 \neq 2$，

$\therefore$ 数列a_1，a_2，…，a_n，…不是等差数列。

例2 一个数列的前n项和的公式为$s_n = 2n^2 - 3n$。求证：这个数列是等差数列。

错误证明：由$a_n = s_n - s_{n-1}$，

$\therefore$ $a_n = (2n^2 - 3n) - [2(n-1)^2 - 3(n-1)] = 4n - 5$。

$\because$ $a_{n+1} - a_n = 4(n+1) - 5 - (4n - 5) = 4$，

$\therefore$ 这个数列为等差数列。

分析：基本思路未错，但$a_n = s_n - s_{n-1}$仅对于$n \geqslant 2$成立，应补上$a_1 = s_1 = 2 \times 1^2 - 3 \times 1 = -1$。

由于$a_n = 4n - 5$当$n = 1$时的值恰为$4 \times 1 - 5 = -1$，说明数列a_1，a_2，…，a_n，…的通项公式确实可以用$a_n = 4n - 5$统一表示，而$a_{n+1} - a_n = 4$（$n = 1, 2, 3\cdots$）这样才能证明该数列为等差数列。

另证：$\because$等差数列中，

$$S_n=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d=\frac{d}{2}n^2+\left(a_1-\frac{d}{2}\right)n。$$

现知 $s_n=2n^2-3n$,

$$\therefore \begin{cases}\dfrac{d}{2}=2,\\ a_1-\dfrac{d}{2}=-3。\end{cases} \quad 即\begin{cases}d=4,\\ a_1=-1。\end{cases}$$

这就是说，满足$s_n=2n^2-3n$的数列为首项是-1，公差为4的等差数列。

分析：教材中只证明了等差数列的前n项和的公式为

$$S_n=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d,$$

并未证明前n项和为上述形式的数列一定是等差数列。由于一个命题成立，其逆命题不一定成立，故上述证法在逻辑上是错误的。然而，作为一种“猜测”，恰好是正确的。应当因势利导让学生思维活跃起来。

可把问题一般化地提出：

（1）如一个数列的通项公式为$a_n=kn+b$，其中$k\neq0$，k、b为常数，则a_n为n的一次函数，问数列$\{a_n\}$是否等差数列？

证明：由 $a_{n+1}-a_n=k(n+1)+b-(kn+b)$

$=k$，$(n=1,2,3,\cdots)$。

$\therefore$ 通项为$a_n=kn+b$，$k\neq0$, k, b为常数的数列是等差数列且公差为k，首项为$a_1=k\times1+b=k+b$。

即 $a_n=(k+b)+(n-1)k$。

注意：如$k=0$时，$\{a_n\}$为常数列，当然也是等差数列。