21世纪高等院校创新教材

"十一五"规划教材

线性代数

程铭东 舒和智 主编
刘修生 主审

科学出版社
www.sciencep.com

·21 世纪高等院校创新教材·

“十一五”规划教材

线 性 代 数

程铭东　舒和智　主编

刘修生　主审

科 学 出 版 社

北 京

内 容 简 介

本书根据教育部制订的高等工科院校《线性代数课程教学基本要求》编写而成，同时针对新形式下课程和教学改革的发展需要，增加了线性代数知识的应用和有关数学实验．以课程学习为主，兼顾学生考研和数学建模学习的需要．

全书共分为八章，第一章至第六章包括行列式、矩阵、线性方程组、特征值与实二次型等，该部分内容为线性代数课程的基本内容和必修内容；第七章和第八章分别介绍了线性代数知识的应用和数学实验，可作为选学内容．

本书可作为高等院校工科各专业及经济类相关专业线性代数课程教材，也可作为教研人员的参考书．

图书在版编目（CIP）数据

线性代数/程铭东，舒和智主编．－北京：科学出版社，2005
（21世纪高等院校创新教材）
ISBN 7-03-016074-6

Ⅰ.线… Ⅱ.①程…②舒… Ⅲ.线性代数－高等学校－教材 Ⅳ.O151.2

中国版本图书馆CIP数据核字（2005）第087969号

责任编辑：冯贵层 王雨舸
责任印制：高 嵘／封面设计：李梦佳

科学出版社 出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com
武汉大学出版社印刷总厂印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2005年8月第 一 版 开本：B5（720×1000）
2005年8月第一次印刷 印张：14 1/4
印数：1~8 000 字数：277 000

定价：20.80元

（如有印装质量问题，我社负责调换）

前　言

线性代数课程作为高等工科院校的三大基础数学课程之一，不仅为大学生后续课程的学习提供基础，同时，也应为培养学生的能力，特别是解决问题的能力和创新思维能力，做出应有的贡献. 基于此，我们组织多位长期从事该课程教学的具有丰富教学经验的一线骨干教师，根据教育部制订的高等工科院校《线性代数课程教学基本要求》，同时针对新形式下课程和教学改革的发展需要，结合教学实践中积累的有益经验和最新的研究成果，编写了本书. 在线性代数课程基本内容的基础上，增加了线性代数知识的应用和有关数学实验. 本书以课程学习为主，兼顾学生考研和数学建模学习的需要.

本书内容可分为两大模块. 第一模块为基础必修内容，安排在第一至第六章，包括行列式、矩阵、线性方程组、特征值与实二次型等. 这一模块是教育部制订的高等工科院校《线性代数课程教学基本要求》所指定的课程基本内容. 第七章和第八章为第二模块，内容供有关专业选用，也可作为学生的课外阅读材料. 第七章介绍线性代数知识的应用，编者根据多年从事数学建模培训和指导的经验，结合线性代数的基本知识，编排了相应的应用问题，以期培养学生的学习积极性，引导学生学以致用. 第八章是数学实验，编排了若干相关数学实验.

本书可作为高等院校工科各专业及经济类相关专业的线性代数课程教材，也可作为教研人员的参考书.

本书由程铭东、舒和智主编，刘修生教授主审. 其中第一、二、七章由程铭东编写；第三章由舒和智编写；第四章由刘修生编写；第五、六章由余敏编写；第八章由余宏生编写；最后由程铭东完成全书统稿. 刘修生教授对全书内容进行了认真细致的审核.

由于编者水平有限，书中难免存在一些错漏和不足，欢迎读者批评指正.

编　者

2005 年 6 月

目　　录

第一章 行 列 式

求解线性方程组是代数学中的一个基本问题，许多实际的应用问题都要依赖于线性方程组来解决. 正是源于对线性方程组的研究，才引入了行列式这一有力的数学工具. 本章介绍行列式的定义、性质及基本计算方法. 此外还将介绍用 n 阶行列式求解 n 元线性方程组的克莱姆法则.

1.1 全排列及其逆序数

从 n 个元素中,任选 m 个元素,按一定的先后次序排成一列,称为一个排列. 因为该排列是从 n 个元素中选出 m 个元素而构成，所以也称为选排列. 不同的选排列的种数可依据乘法原理来计算:

第一个位置上的元素，可从 n 个元素中任选一个，有 n 种选择方法;

第二个位置上的元素，只能从剩下的 $(n-1)$ 个元素中任选一个，有 $(n-1)$ 种选择方法;

第三个位置上的元素，只能从剩下的 $(n-2)$ 个元素中任选一个，有 $(n-2)$ 种选择方法;

……

第 m 个位置上的元素，只能从剩下的 $(n-m+1)$ 个元素中任选一个，有 $(n-m+1)$ 种选择方法.

因此，从 n 个不同元素中，选 m 个元素的排列种数共有

$$P_n^m = n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\cdots\cdot(n-m+1)$$

特别地，从 n 个元素中取 n 个元素的排列，称为全排列，其不同的排列种数为 $n!$ 种，即

$$P_n = n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\cdots\cdot 3\cdot 2\cdot 1 = n!$$

1.1.1 全排列

定义 1.1 由 n 个数字 $1,2,\cdots,n$ 所组成的一个全排列，称为一个 n 级排列. 常用 $(j_1, j_2,\cdots, j_n)$ 来表示一个 n 级排列，其中 j_1 表示该排列的第一个数， j_2 表示该排列的第二个数，…， j_n 表示该排列的第 n 个数.

由定义 1.1 可知，n 级排列是全排列的一个特例. 之所以称为特例，是因为一般排列中的元素不一定是数，而 n 级排列则必须是从 1 到 n 这 n 个自然数的全排

列. 例如，$(3,1,2)$ 是一个3级排列，$(4,5,1,2,3)$ 是一个5级排列，而 $(1,2,4,5)$ 不是一个4级排列，这是因为在任何一个4级排列中，只能出现1,2,3,4这四个数字.

n 级排列的种数共有 $n!$ 种. 例如，3级排列的种数共有 $3!=6$ 种，它们是

$$(1,2,3),\ (1,3,2),\ (2,1,3),\ (2,3,1),\ (3,1,2),\ (3,2,1)$$

1.1.2 逆序数

在6种3级排列中，只有 $(1,2,3)$ 是按自然数的顺序排列. 一般地，在所有的 n 级排列中，$(1,2,\cdots,n)$ 是惟一按自然数顺序排列的，故称其为自然排列或标准排列.

定义 1.2 在一个 n 级排列中，如果有一个大数排在一个小数之前，则称这两个数构成该排列的一个逆序. 一个排列中逆序的总数称为该排列的逆序数. 排列 $(j_1,j_2,\cdots,j_n)$ 的逆序数记为 $\tau(j_1,j_2,\cdots,j_n)$，并且称逆序数为奇数的排列为奇排列，逆序数为偶数的排列为偶排列.

例如，在排列 $(2,1,3)$ 中，2排在1前面，构成一个逆序，于是这个排列的逆序数为1，即 $\tau(2,1,3)=1$. 在排列 $(3,1,2)$ 中，3排在1,2前面，3分别与1,2各构成一个逆序，于是这个排列的逆序数为2，即 $\tau(3,1,2)=2$. 在排列 $(2,4,1,3)$ 中，第一位数2排在第三位数1前面，构成一个逆序；第二位数4排在第三位数1和第四位数3的前面，各构成一个逆序；排在第三位的数1与它后面的数不构成逆序，于是这个排列的逆序数为3，即 $\tau(2,4,1,3)=3$.

显然，自然排列 $(1,2,\cdots,n)$ 的逆序数为零，它是偶排列.

一般地，一个 n 级排列的逆序数可按如下公式计算：

$$\tau(j_1,j_2,\cdots,j_n)=\sum_{i=1}^{n-1}t_i$$

其中，t_i 表示 j_i 后比 j_i 小的数的个数.

逆序数具有如下性质：

(1) $\tau(1,2,\cdots,n)=0$；

(2) $\tau(n,n-1,\cdots,3,2,1)=\dfrac{n(n-1)}{2}$；

(3) $0\leqslant\tau(j_1,j_2,\cdots,j_n)\leqslant\dfrac{n(n-1)}{2}$.

例 1.1 求排列 $(3,5,4,1,6,2)$ 的逆序数.

解 依次比较：3后比3小的数有1,2，$t_1=2$；5后比5小的数有4,1,2，$t_2=3$；4后比4小的数有1,2，$t_3=2$；1后没有比1小的数，$t_4=0$；6后比6小的数有2，$t_5=1$. 于是

$$\tau(3,5,4,1,6,2)=2+3+2+0+1=8$$

在一个排列 $(j_1,\cdots,j_s,\cdots,j_t,\cdots,j_n)$ 中，如果仅将它的两个数 j_s 和 j_t 位置交换，

其余位置上的数不变，得到一个新的排列 $(j_1,\cdots,j_t,\cdots,j_s,\cdots,j_n)$，这样的一个交换称为一个对换，记为对换 (j_s,j_t). 例如，对排列 $(1,4,3,2)$ 施以对换 $(2,4)$ 后得到自然排列 $(1,2,3,4)$.

定理 1.1 对换改变排列的奇偶性.

证 (1) 首先讨论对换相邻两个数的特殊情形. 设原排列为

$$(A,i,j,B)$$

其中 A,B 表示排列中除 i,j 以外的其余数，经过对换 (i,j)，变为新排列

$$(A,j,i,B)$$

比较两个排列中的元素的次序可知，A,B 中的数的次序没有改变，并且 i,j 与 A,B 中数的次序也没有改变，仅改变了 i 与 j 的次序. 同时，新排列仅比原排列增加(当 $i<j$ 时)或减少(当 $i>j$ 时)一个逆序，所以它们的奇偶性相反.

(2) 再证一般情况. 设原排列为

$$(A,i,k_1,k_2,\cdots,k_s,j,B)$$

经过对换 (i,j)，变为新排列

$$(A,j,k_1,k_2,\cdots,k_s,i,B)$$

因为将原排列中的 i 依次与 $k_1,k_2,\cdots,k_s,j$ 作 $(s+1)$ 次相邻对换，得到排列

$$(A,k_1,k_2,\cdots,k_s,j,i,B)$$

再将 j 依次与 $k_s,\cdots,k_2,k_1$ 作 s 次相邻对换，得到排列

$$(A,j,k_1,k_2,\cdots,k_s,i,B)$$

因此，由原排列经过 $(2s+1)$ 次相邻对换即得到新排列，而 $(2s+1)$ 为奇数，所以新、旧排列的奇偶性相反.

推论 奇排列调整为标准排列的对换次数为奇数，偶排列调整为标准排列的对换次数为偶数.

证 由定理 1.1 的证明过程可知，奇(偶)排列调整为标准排列的对换次数就是排列奇偶性的变化次数，而标准排列是偶排列(逆序数为 0)，因此该推论成立.

定理 1.2 $n(n\geqslant 2)$ 级排列的种数为 $n!$，其中奇排列和偶排列的个数相等，各为 $\dfrac{n!}{2}$ 个.

证 由全排列种数计算公式可得，n 级排列的种数为

$$P_n=n!$$

设其中奇排列的个数为 p，偶排列的个数为 q.

对 p 个奇排列施行同一个对换 (i,j)，由定理 1.2 得到 p 个偶排列；再对这 p 个偶排列施行对换 (i,j)，又可得到原来的 p 个奇排列，所以这 p 个偶排列各不相同，但一共只有 q 个偶排列，于是 $p\leqslant q$. 同理可得 $q\leqslant p$，于是 $p=q$. 又 $p+q=n!$，则 $p=q=\dfrac{n!}{2}$.

1.2 n 阶行列式

行列式起源于求解n元线性方程组. 下面从二元线性方程组入手，引入二阶与三阶行列式的概念，并用排列的奇偶性将行列式的概念推广到n阶.

1.2.1 二阶、三阶行列式

二元线性方程组的一般形式为

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases} \tag{1-1}$$

利用加减消元法（当$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$时），可得

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{b_1a_{22} - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \\ x_2 = \dfrac{b_2a_{11} - a_{21}b_1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \end{cases}$$

如果将上式作为公式，不容易记忆，也不便于应用，数学中引入记号

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

来表示$ad - bc$，即

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

在引入的记号中，横排称为行，纵排称为列，因为共有二行二列，所以称为二阶行列式. 其中的每一个数称为行列式的元素. 由于二阶行列式是用来表示$ad - bc$，所以实际是用于表示一个数. $ad - bc$是用来计算该数的表达式，称为二阶行列式的表达式. 表达式的第一项为二阶行列式的左上角到右下角的对角线（称为主对角线）上的两个元素的乘积，第二项为右上角到左下角的对角线（称为副对角线）上的两个元素乘积. 因此，表达式可用画线的方法来记忆，即主对角线(实线)上两个元素的乘积减去副对角线(虚线)上两个元素的乘积，如图 1-1 所示. 这种计算方法称为二阶行列式的对角线法则.

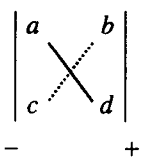

图 1-1

例如，

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}, \quad \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} = b_1a_{22} - a_{12}b_2, \quad \begin{vmatrix} b_2 & a_{21} \\ b_1 & a_{11} \end{vmatrix} = a_{11}b_2 - b_1a_{21}$$

于是方程组(1-1)的解变为容易记忆的形式：

$$x_1=\frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}},\quad x_2=\frac{\begin{vmatrix} b_2 & a_{21} \\ b_1 & a_{11} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}$$

简记为

$$x_1=\frac{D_1}{D},\quad x_2=\frac{D_2}{D}$$

其中分母为方程组中的系数按原有顺序构成的行列式 D，将分母中的行列式的相应列换成常数项，即得相应分子中的行列式 $D_i\,(i=1,2)$.

在求解一般形式的三元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2 \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3 \end{cases} \tag{1-2}$$

时，暂将前两个方程中的 x_1 视为常数，利用二元线性方程组求解公式求出 x_2 和 x_3 后，再代入第三个方程求 x_1，得

$$x_1=\frac{b_1a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}b_3+a_{13}b_2a_{32}-a_{13}a_{22}b_3-a_{12}b_2a_{33}-b_1a_{23}a_{22}}{a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}}$$

用类似的方法可求得 x_2 与 x_3.

与解二元线性方程组时遇到的问题一样，上述公式既不便于记忆也不便于应用，为此，我们也像引入二阶行列式那样，引入三阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32} \tag{1-3}$$

其中，等号右端的表达式称为三阶行列式的表达式.

同样，可用画线的方法来记忆. 各实线连接的三个元素的乘积前面加上正号，各虚线连接的三个元素的乘积前面加上负号，由此而得到的 6 项的代数和即为三阶行列式的表达式. 该计算方法称为三阶行列式的对角线法则，如图 1-2 所示.

于是，可将三元线性方程组(1-2)的解转为便于记忆的形式：

$$x_1=\frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}},\quad x_2=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}},\quad x_3=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}$$

用 D_1, D_2, D_3 和 D 分别代替 x_1, x_2, x_3 的分子和 x_1 的分母，则上式可简记为

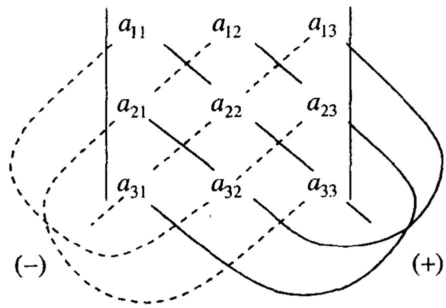

图 1-2

$$x_1=\frac{D_1}{D},\quad x_2=\frac{D_2}{D},\quad x_3=\frac{D_3}{D}$$

1.2.2 n 阶行列式的定义

可以验证，若按照对角线法则计算四阶行列式，并试图用来解四元线性方程组时，计算的结果并不是方程组的解，因此对角线法则只适用于二阶、三阶行列式. 但四阶及四阶以上的行列式又如何计算呢？先来观察三阶行列式表达式的特征，如表 1-1 所示.

表 1-1

乘积项	列标所成排列	排列的奇偶数	乘积项前面的符号
$a_{11}a_{22}a_{33}$	(1,2,3)	偶	+
$a_{12}a_{23}a_{31}$	(2,3,1)	偶	+
$a_{13}a_{21}a_{32}$	(3,1,2)	偶	+
$a_{13}a_{22}a_{31}$	(3,2,1)	奇	−
$a_{11}a_{23}a_{32}$	(1,3,2)	奇	−
$a_{12}a_{21}a_{33}$	(2,1,3)	奇	−

从表 1-1 中不难发现，三阶行列式的表达式有如下几个特点：

(1) 表达式为$3!$个乘积项的代数和；

(2) 每个乘积项都是行列式中三个不同行不同列的元素的乘积；

(3) 每个乘积项的符号有明确的规律，若将一般乘积项记为$a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}$的形式，即行标排成(1, 2, 3)时，则乘积项$a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}$前面的符号为$(-1)^{\tau(j_1,j_2,j_3)}$.

于是，式(1-3)可写为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=\sum_{(j_1,j_2,j_3)}(-1)^{\tau(j_1,j_2,j_3)}a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}$$

同样，二阶行列式可写为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \sum_{(j_1, j_2)} (-1)^{\tau(j_1, j_2)} a_{1j_1} a_{1j_2}$$

根据上述规律，可给出 n 阶行列式的定义.

定义 1.3 用 n^2 个元素 a_{ij} $(i, j = 1, 2, \cdots, n)$ 组成的记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称为 n 阶行列式. 它表示所有取自不同行不同列的 n 个元素的乘积的代数和，各乘积项前面所带的符号确定法则是:当这一项中元素的行标按自然数顺序排列后，对应列标排列为奇排列时带负号，为偶排列时带正号. 即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{(j_1, j_2, \cdots, j_n)} (-1)^{\tau(j_1, j_2, \cdots, j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$$

其中 $\sum\limits_{(j_1, j_2, \cdots, j_n)}$ 表示对所有 n 级排列 $(j_1, j_2, \cdots, j_n)$ 求和.

上述等式右端的代数和称为 n 阶行列式的展开式，而称

$$(-1)^{\tau(j_1, j_2, \cdots, j_n)}\ a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$$

为 n 阶行列式的一般项. 在不致于混淆的情况下，常用大写字母 $A, B, \cdots$ 等来表示行列式.

一阶行列式 $|a|$ 就是 a. 行列式有时简记为 $|a_{ij}|$ 或 $\det(a_{ij})$.

定义 1.3 表明，为了计算 n 阶行列式，首先将不同行不同列的 n 个元素按行标排成自然顺序作乘积，然后由列标排列的奇偶性来决定这一乘积项前面的符号，但由于所有 $(j_1, j_2, \cdots, j_n)$ 的排列种数共有 $n!$ 种，因此，n 阶行列式展开式中共有 $n!$ 项. 而 $n!$ 是一个很大的数，所以，用定义来求 n 阶行列式的值在一般情况下是十分困难的.

下面利用定义来计算两个特殊的行列式.

例 1.2 计算(上)三角形行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

解 D 的一般项为

$$(-1)^{\tau(j_1, j_2, \cdots, j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$$

D 中有许多零元素，因此在它的展开式中有多项为零，现在来考察有哪些项可能不为零. 一般项中第 n 个元素 a_{nj_n} 取自第 n 行，而第 n 行除 a_{nn} 可能不为零之外其余元素全为零. 要使乘积项可能不为零，只能取 $j_n = n$； $a_{(n-1)j_{n-1}}$ 取自第 $n-1$ 行，而第$(n-1)$行只有 $a_{(n-1)(n-1)}$ 和 $a_{(n-1)n}$ 两个元素可能不为零，但 $j_n = n$，则 j_{n-1} 不能再取 n，而只能取$(n-1)$. 以此类推， $j_{n-2} = n-2, \cdots, j_2 = 2, j_1 = 1$，则 D 中除 $a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$ 这一乘积项可能不为零之外，其余乘积项全部为零，从而

$$D = (-1)^{\tau(1, 2, \cdots, n)} a_{11}a_{22}\cdots a_{nn} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

同理可得(下)三角形行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

上(下)三角形行列式等于主对角线上的元素的乘积，这一结论在计算行列式时常常用到.

特别地，对角形行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

例 1.3 计算下列行列式

$$D = \begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & \lambda_1 \\ 0 & \cdots & \lambda_2 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \lambda_n & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

解 只需求出 D 的展开式中可能不为零的项即可. 按行列式的定义，非零项的 n 个元素在第一行中，只能取 $a_{1n} = \lambda_1$，即 $j_1 = n$；在第二行中，只能取 $a_{2(n-1)} = \lambda_2$，即 $j_2 = n-1$；在第三行中，只能取 $a_{3(n-2)} = \lambda_3$，即 $j_3 = n-2$；…在第 n 行中，只能取 $a_{n1} = \lambda_n$，即 $j_n = 1$. 于是，此行列式的展开式中除乘积为 $\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$ 这一项可能不为零外，其余各项均为零. 又因为它的列下标排列为 $(n, n-1, \cdots, 3, 2, 1)$，其逆序数为

$$\tau(n, n-1, \cdots, 3, 2, 1) = (n-1) + (n-2) + \cdots + 2 + 1 = \frac{n(n-1)}{2}$$

故
$$D = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$$

最后指出，由于数的乘法满足交换律，因而行列式中每项的 n 个元素可按任

意顺序排列．若将每一项的n个元素依列标按自然顺序排列起来，可以证明

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{(i_1,i_2,\cdots,i_n)} (-1)^{\tau(i_1,i_2,\cdots,i_n)} a_{i_1 1} a_{i_2 2} \cdots a_{i_n n} \tag{1-4}$$

若将每一项中的n个元素按任意顺序排列，也可证明

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{\substack{(i_1,i_2,\cdots,i_n) \\ (j_1,j_2,\cdots,j_n)}} (-1)^{\tau(i_1,i_2,\cdots,i_n)+\tau(j_1,j_2,\cdots,j_n)} a_{i_1 j_1} a_{i_2 j_2} \cdots a_{i_n j_n} \tag{1-5}$$

1.3 行列式的性质

用定义计算一般行列式十分不便，因此，需要研究行列式的性质，并用性质简化行列式的计算．设

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

将行列式D中的行与列互换后，得到新的行列式，记为D^{T}．D^{T}称为行列式D的转置行列式，即

$$D^{\mathrm{T}} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

性质 1 行列式与它的转置行列式相等，即$D = D^{\mathrm{T}}$．

证 设$D = |a_{ij}|$，记$D^{\mathrm{T}} = |b_{ij}|$，则$b_{ij} = a_{ji}$．由于

$$D = \sum_{(i_1,i_2,\cdots,i_n)} (-1)^{\tau(j_1,j_2,\cdots,j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$$

$$D^{\mathrm{T}} = \sum_{(i_1,i_2,\cdots,i_n)} (-1)^{\tau(j_1,j_2,\cdots,j_n)} b_{j_1 1} b_{j_2 2} \cdots b_{j_n n}$$

而借助于$a_{kj_k} = b_{j_k k}$，有

$$(-1)^{\tau(j_1,j_2,\cdots,j_n)} b_{j_1 1} b_{j_2 2} \cdots b_{j_n n} = (-1)^{\tau(j_1,j_2,\cdots,j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$$

故$D = D^{\mathrm{T}}$．

性质 1 表明，在行列式中，行与列的地位是对称的，因此，凡是有关行成立