数学分析

（上册）

吴智泉 编

吉林大学出版社

数学分析

（上册）

吴智泉 编

吉林大学出版社

数学分析（上册）
吴智泉　编
*
吉林大学出版社出版　吉林省新华书店发行
吉林大学印刷厂印刷
*
850×1168　大32开　12.5印张　308 100字
1988年9月第1版　1988年9月第1次印刷
印数：1 500册
ISBN　7-5601-0129-1/O·25
定价：2.80元

前　言

进入80年代以来，随着教学改革的逐步深入，许多学校都已把讲授“数学分析”这一课程的时间，从两年缩短到一年半，而且对教学内容的改革，也提出了许多设想。我们所在的吉林大学也不例外。不仅从1983年开始将数学分析的讲授时数从260学时减少到200学时，而且改革教学内容的要求也很强烈。大家比较一致的看法是：一元函数的微积分学和无穷级数论部分的内容仍基本适用；而多元微积分部分则应有较大的变化，才能使之反映较近代的思想与观点。这样，原有的教材就已不能适应当前教学的需要了。现在这套《数学分析》就是在这种形势下产生的，它基本上是编者在吉林大学数学系讲授这门课时所使用的讲义。

这套《数学分析》分上、下两册。上册包括一元函数的微积分学、无穷级数论及作为其理论基础的极限论、连续函数的性质等内容。如不讲授Fourier级数部分，可以在105左右学时完成。（在吉林大学数学系，Fourier级数理论放在“实变函数”一课中讲授。）下册包括多元函数的微积分学、广义积分及含参变量的积分等内容。删去作为学生课外阅读的个别小节及最后一章“流形与 Stokes公式”以后，我们这几年都是用90左右个学时来完成这部分教学内容的。

就内容来说，上册同我们以前曾参与编写的由高等教育出版社出版的《数学分析》的相应部分，没有很大的出入，但对内容的编排处理上却有较大的变化。1959年我们参与编写的那套教材完全是按逻辑顺序展开的。实践说明这种安排教起来方便，但学起来困难。特别是要求学生在学习微分学以前，就完

全掌握极限论的论证的方法，这一点实际上对相当多学生难以做到，从而成了学习数学分析的“拦路虎”。1978年以吉林大学数学系名义分上中下三册出版的《数学分析》，改变了这种作法，贯彻了“分两步走”的思想。上册中基本上只有直观的极限概念，到中册中才严格处理极限理论。但使用者普遍反映，上、中册之间跨度太大。这次我们尝试了一种新的作法：把极限论论证方法的训练，分散在整个一元微积分和无穷级数论的教学过程中，把知识传授与论证能力的训练更好地融合起来，对学生的要求是逐步提高的。几年来的实践证明，这种作法比较稳妥，绝大部分学生都能较平稳地学习，既掌握了教学中讲授的基本内容，也初步学会了极限论的论证方法。

由于绝大多数学生在中学阶段虽学过数列的极限但又并没有掌握“$\varepsilon—N$”论证法，所以我们在一开始就引用了少量数列极限的知识，但是我们并不真将数列极限理论作为进一步学习的基础与出发点。按现在这套教材的安排，学生的极限论论证能力的训练，实际上是从“$\varepsilon—\delta$”方法开始而到第五章讲授无穷级数时才完成的。为了减少初学者的困难，我们将个别不易掌握的内容，如Cauchy 准则等的证明，有意识地延后了。

上册部分增加了有关凸函数和不等式的某些内容，而对不定积分和初等函数的导数计算的内容则有所削减。我们这样作的原因是不言自明的。

下册部分不论是内容还是题材处理上都和我们过去参与编写过的两套《数学分析》有较大的不同。我们从讨论多元实值函数过渡到了讨论从n-维欧氏空间 $\boldsymbol{R}_n$ 到 m 维欧氏空间$\boldsymbol{R}_m$的映射，并以映射的观点来统辖整个多元微分学。在这一部分，我们介绍了微分同胚的概念，引入了压缩映射原理，并用以处理反函数和隐函数问题。另外，作为补充材料，还介绍了在各方面有重要应用的秩定理和Morse 引理。关于多元积分学部分，我们的指导思想是简化处理、减少重复、强调计算。有些在学

过“实变函数”后自然会清楚的问题，此处尽量避免纠缠。所以对重积分变量替换、曲面面积概念等都没有去追求论证的严密和体系的完整。由于我们同时一举给出了几种不同的积分（二重、三重、n重、面积分、线积分）的定义，并统一地讨论了它们的性质，这就避免了过去那种多次重复类似讨论的弊病。在处理广义积分时，我们采用了 В.А.Зорич《数学分析》中的处理方法。将无穷积分和瑕积分写成统一的形式 $\int_a^\omega f(x)\mathrm{d}x$ 而合并讨论。其目的也是为了避免不必要的重复。另外，我们把广义积分和含参变量的积分合在一章内并尽量和无穷级数理论相对照来讨论。我们觉得这样作既有利于学生融会贯通这两部分内容，也有利于用函数级数的结果来讨论含参变量积分的相应定理，以节省篇幅和减弱条件，使之更便于应用。

本书的部分内容，特别是有关Fourier级数理论的第五章，是从编者参与编写的1978年由人民教育出版社出版的《数学分析》中移植过来的，特此说明。

编　者

1988年4月

目　　录

第一章　函数的极限与连续性

在本章中，我们要学习两个最基本的概念：函数的极限和函数的连续性，并介绍与之有关的一些最基本的事实。但为了以后的方便，我们在第一节中先对今后要用到的大家在中学阶段已学过的一些基础知识，作一简要的复习与归纳。

§1　预　备

在本课程中，如无特别声明，凡是数都是指实数而言。任何一条取定了正方向、原点和单位长，因而可以用其上的点来表示实数的直线R都称为数直线。今后我们将不区分实数和用来表示这个实数的数直线上的点，即把它们看成是同一个对象而引用。比如把零和数直线上的原点，1和数直线上的单位点视为同一个对象。

同样，在没有特别声明时，今后我们所谈到的函数都是实函数，即定义在数直线上某一点集上的取实数为值的函数，这个点集称为这个函数的**定义域**，通常它是非空的，但这一非空性并不作为一个必备的条件。函数的一般的记号是$y=f(x)(x\in\mathscr{D})$。这里$\mathscr{D}$就表示这个函数的定义域，它是数直线R上的一个点集，当$\mathscr{D}$是什么样的数集一目了然时，"$x\in\mathscr{D}$"也可略去不写。f则表示某一确定的对应规则，通过它，对于$\mathscr{D}$中的每一个x，都能唯一地确定一个实数y与x对应，它称为这个函数在x点的值。函数$y=f(x)$在x点的值，有时也就记为$f(x)$。大家会看到$f(x)$既表示函数又表示这个函数在x点的值这种记号上的两重用法，不仅不会带来混淆，而且还会有许多方便之处。另外，我们特别强调对于每一$x\in\mathscr{D}$，对应的y的唯一性，即只能有

一个。这也就是说，我们将不考虑多值函数。当 x 取遍 $\mathscr{D}$ 中一切的值时，对应的 y 便构成一个数集（或者说数直线上的一个点集）$\mathscr{R}$，称之为这个函数的**值域**。

定义1 设 $y=f(x)(x\in\mathscr{D})$是一个函数。对每一 $x\in\mathscr{D}$，实数组$(x,f(x))$便在取定了坐标的平面上确定一个点。而当x取遍 $\mathscr{D}$ 中一切值时，相应的$(x,f(x))$便构成坐标平面上一个点集，称之为这个函数的**图象**。

函数的图象都是坐标平面上的点集。由于我们只承认单值函数，坐标平面上的点集 G 如果是某一个函数的图象，则任何平行于 y-轴的直线都最多和 G 交于一点。显然这也正是 G 为某一函数的图象的充分必要条件。

我们只承认单值函数就是说，如果 $y=f(x)(x\in\mathscr{D})$是一函数，则对于每一$x\in\mathscr{D}$，都恰有一个属于值域 $\mathscr{R}$ 的 y 与之对应。但这并不表示 $\mathscr{R}$ 中的y都只能和 $\mathscr{D}$ 中的一个 x 对应。因此，一般说来，在 $\mathscr{R}$ 中取定 y 之后，并不一定能确定 y 和$\mathscr{D}$ 中那个 x 相对应，因为这样的 x 可能不止一个。但也确实存在那种特殊情况：此时对于 $\mathscr{R}$ 中每一个 y，在 $\mathscr{D}$ 中都恰好有唯一的一个 x 以这个 y 为它的对应点。在这种情况下，我们就可以反过来由 $y\in\mathscr{R}$ 来确定x，即得到一个以 $\mathscr{R}$ 为定义域，以$\mathscr{D}$为值域的新的函数。这个函数称为原来的函数 $y=f(x)$ $(x\in\mathscr{D})$的反函数，记为 $x=f^{-1}(y)(y\in\mathscr{R})$。显然 $y=f(x)$ $(x\in\mathscr{D})$有反函数的充要条件是：对于 $\mathscr{D}$ 中任意两点 x_1 和x_2，只要 $x_1\neq x_2$便有 $f(x_1)\neq f(x_2)$。

如果 $y=f(x)(x\in\mathscr{D})$有反函数 $x=f^{-1}(y)(y\in\mathscr{R})$，则这个新的函数 $x=f^{-1}(y)(y\in\mathscr{R})$是一定有反函数的，而且其反函数就是原来的 $y=f(x)(x\in\mathscr{D})$，即 $y=(f^{-1})^{-1}(x)=f(x)$ $(x\in\mathscr{D})$。所以更准确一点说，应该是 $y=f(x)(x\in\mathscr{D})$和 $x=f^{-1}(y)(y\in\mathscr{R})$互为反函数（当然是在反函数存在时）。

根据定义，如果 $y=f(x)(x\in\mathscr{D})$有反函数 $x=f^{-1}(y)$，

则这两个函数的图象应该是平面上的同一个点集G。不过我们是按照惯例用横坐标表示自变数而用纵坐标表示因变数而作出$y=f(x)(x\in\mathscr{D})$的图象G的，因此当把G看成反函数$x=f^{-1}(y)(x\in\mathscr{R})$的图象时，代表自变数的却已经是纵坐标$y$，而代表因变数$x$的反而是横坐标了。所以如果我们还想用横轴来表示自变数，用纵轴来表示因变数，则应该将整个平面绕第一、三象限的角平分线（即直线$y=x$）旋转180°。比如图1中画的如果是原来的函数$y=f(x)(x\in\mathscr{D})$的图象，则图2中画的就是反函数$x=f^{-1}(y)(y\in\mathscr{R})$的图象。这时横轴是$y$-轴，纵轴是$x$轴。

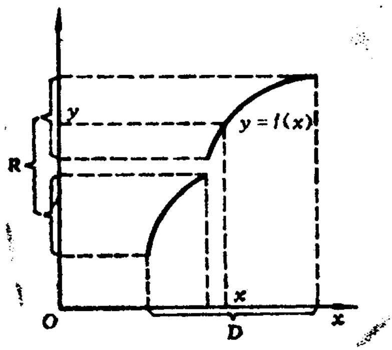

图1

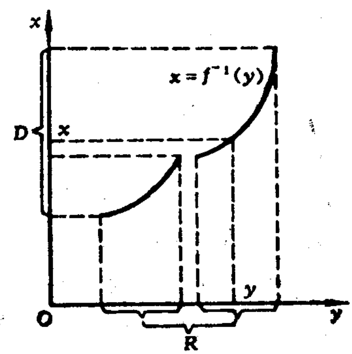

图2

当然对于反函数我们还可以互换记号x和y，而将$x=f^{-1}(y)$记为

$$y=f^{-1}(x) \quad (x\in\mathscr{R})$$

即把$y=f(x)(x\in\mathscr{D})$的反函数也记为$y=f^{-1}(x)$，不过此时要记住，两个函数中的记号x和两个函数中的记号y，都不是代表同一变数的。$y=f(x)$中的x（它在$\mathscr{D}$中取值）实际上相当于$y=f^{-1}(x)$中的y，而$y=f(x)$中的y（它在$\mathscr{R}$中取值）则相当于$y=f^{-1}(x)$中的x。

大家在过去已经见到过许多函数，其中最基本的有五大类。它们都是我们今后最经常用到的函数。所以我们现在把它

们再归纳、整理一下。

一、有理函数 这类函数包括多项式和多项式的商。所谓多项式就是形如

$$y=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$$

的函数。其中 $a_0,a_1,\cdots,a_n$ 是给定的常数且 $a_n\neq0$，n 是一非负整数，称为多项式的次数。多项式的定义域是全体实数。零次多项式就是恒等于一个非零常数的函数。

有理函数的一般形式是

$$y=\frac{P(x)}{Q(x)}$$

其中 $P(x),Q(x)$ 都是多项式，$Q(x)\neq0$。有理函数的定义域是使 $Q(x)\neq0$ 的全体 x 所构成的数集。如果 $Q(x)$ 是一零次多项式，则上述有理函数实际上是一多项式。

如果 $R(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ 中的分母 $Q(x)$ 的次数大于分子 $P(x)$ 的次数，则 $R(x)$ 称为是一真分式，否则便称为是一假分式。任何假分式都可分解为一个多项式和一个真分式的和。

如果真分式 $R(x)$ 可以表示为

$$R(x)=\frac{P(x)}{[T(x)]^n}$$

的形式，其中 $T(x)$ 为一不能再分解因式的多项式（因而次数不大于2），$P(x)$ 的次数低于 $T(x)$ 的次数，则我们就说 $R(x)$ 是一最简分式。关于真分式有下述定理：

定理 任何真分式都可以分解为一些最简分式的和，而且这种分解是唯一的。

我们不准备在此处引进这个定理的证明，下面只用几个例子来说明将一个真分式分解为最简分式的具体作法。

例1 化 $\dfrac{1}{x^2-1}$ 为最简分式之和。

解 显然，如果一个真分式$\frac{P(x)}{Q(x)}$分解为真分式之和后包含$\frac{S(x)}{[T(x)]^n}$这样的项，则$[T(x)]^n$必定是$Q(x)$的因式。现把分母因式分解

$$x^2-1=(x+1)(x-1)$$

因此$\frac{1}{x^2-1}$的分解必呈

$$\frac{1}{x^2-1}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x-1} \tag{1}$$

的形式。此处A，B是待定的常数。以x^2-1乘上式两边得到

$$1=A(x-1)+B(x+1)=(A+B)x-(A-B) \tag{2}$$

从而**解得**$A=-\frac{1}{2}$，$B=\frac{1}{2}$，代入(1)式便得

$$\frac{1}{x^2-1}=-\frac{1}{2(x+1)}+\frac{1}{2(x-1)}$$

例2 化$\frac{x^3+1}{x(x-1)^3}$为最简分式之和。

解 现在分母的因式是x，$x-1$，$(x-1)^2$，$(x-1)^3$，$x(x-1)$，$x(x-1)^2$，$x(x-1)^3$这几种。所以所求的分解式必为

$$\frac{x^3+1}{x(x-1)^3}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{(x-1)^2}+\frac{D}{(x-1)^3}$$

的形式。于是不难得出$A=-1$，$B=2$，$C=1$，$D=2$。从而

$$\frac{x^3+1}{x(x-1)^3}=-\frac{1}{x}+\frac{2}{x-1}+\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{2}{(x-1)^3}$$

例3 化$\frac{x}{(x^2+2x+2)(x^2+2x-3)}$为最简分式之和。

解 考查分母的因式即知所求的分解应为

$$\frac{x}{(x^2+2x+2)(x^2+2x-3)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+3}+\frac{Cx+D}{x^2+2x+2}$$

用$(x^2+2x+2)(x^2+2x-3)$乘两边得到

$$x=A(x+3)(x^2+2x+2)+B(x-1)(x^2+2x+2)$$
$$+(Cx+D)(x-1)(x+3)$$

于是可定出

$$A=\frac{1}{20},\quad B=\frac{3}{20},\quad C=-\frac{1}{5},\quad D=0$$

所以所求的分解为

$$\frac{x}{(x^2+x+2)(x^2+2x-3)}=\frac{1}{20(x-1)}+$$
$$\frac{3}{20(x+3)}-\frac{x}{5(x^2+2x+2)}$$

二、三角函数　基本的三角函数有六个：正弦(sin)、余弦(cos)、正切（tg或tan）、余切（ctg或cot）、正割(sec)和余割(csc)，而最基本的是正弦和余弦。

先看正弦函数$\sin\theta$。自变量θ是角度，在给定了θ以后，$\sin\theta$这个值是这样确定的：在平面上取定一直角坐标系，视θ为正或负将正x轴上的长度为1的线段$\overline{OP_1}$绕坐标原点O逆时针向或顺时针向旋转一个$|\theta|$角，设最终位置是$\overline{OQ}$，Q点的坐标是(x,y)，则$\sin\theta$的值就是y。显然只要θ给定了，就可以用上述办法唯一确定$y=\sin\theta$，因此$\sin\theta$是θ的函数。由于θ可以是任意（正的或负的）角度，所以这个函数的定义域是全体实数。按定义，θ应该是一个角度，为什么现在又说定义域是全体实数呢？这是因为在给定了一个实数后，就可以对应一个角度，因此我们可以说定义域是全体实数。不过这里有一个问题，那就是角度是以什么单位度量的？只有这个单位选定了以后，和给定的实数对应的角度才是确定的，因而正弦的值才是确定的。比如说给定实数1，要求sin 1，那就应作一个角度

是 1 的角，这是一个什么样的角呢？如果是 1 弧度，那就应该是一个所张开的圆弧的长等于半径的长的角；如果是通常用的60进制的 1 度，则这个角应该是直角的$\frac{1}{90}$，显然按照不同的理解求得的 sin1 的值将是不同的。在初等数学中，通常喜欢用60进制的“度”作为单位。但我们今后都用弧度作为单位。如果单位是60进制的“度”，则都用“°”（度）“′”（分）“″”（秒）等记号加以标明。由于直角是$\frac{\pi}{2}$个弧度，所以$\sin\frac{\pi}{2}=1$，$\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)=-1$。

余弦函数 $\cos\theta$ 的定义是和正弦类似的。对于给定的 θ，$\cos\theta$ 就是上述 Q 点的横坐标 x，这也是一个以全体实数为定义域的函数。

因为一个圆周角等于 2π，所以从定义即知 $\sin\theta$ 和 $\cos\theta$ 都是以 2π 为周期的函数，即

$$\sin(\theta+2\pi)=\sin\theta,\qquad \cos(\theta+2\pi)=\cos\theta$$

在图 3 和图 4 中，我们分别画出了 $y=\sin\theta$ 和 $y=\cos\theta$ 的图象，这是大家早已熟习的。

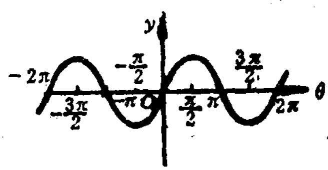

图3

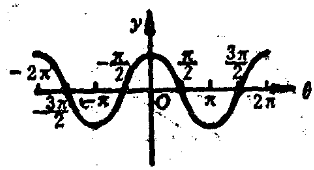

图4

由于习惯上我们总是用 x 表示函数的自变量，y 表示函数

的因变量，所以我们通常也把正弦和余弦记为

$$y=\sin x, \qquad y=\cos x$$

这里的 x, y 和前面介绍正弦、余弦的定义时所说的坐标系中的 x，y 是两回事。

其他 n 几个基本的三角函数都可以通过 $\sin x$ 和 $\cos x$ 来定义：

正切 $y=\operatorname{tg}x=\dfrac{\sin x}{\cos x} \qquad \left(x\neq n\pi+\dfrac{\pi}{2}; \; n=0, \pm 1, \pm 2, \cdots\right)$

余切 $y=\operatorname{ctg}x=\dfrac{\cos x}{\sin x} \quad (x\neq n\pi; \; n=0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$

正割 $y=\sec x=\dfrac{1}{\cos x} \quad \left(x\neq n\pi+\dfrac{\pi}{2}, n=0, \pm 1, \pm 2, \cdots\right)$

余割 $y=\csc x=\dfrac{1}{\sin x} \quad (x\neq n\pi; n=0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$

这些函数的初等性质，大家都很熟习，我们不再重复，只证明下述重要的不等式。

命题1 当 $|x|<\dfrac{\pi}{2}$ 时，$|\sin x|\leqslant|x|\leqslant|\operatorname{tg}x|$。

证明 显然只要就 $0\leqslant x<\dfrac{\pi}{2}$ 证明即可。$x=0$ 时上式显然成立。仅就 $0<x<\dfrac{\pi}{2}$ 的情况加以证明。我们作一半径为 1 的圆（如图5），取 $\angle AOB=x$，则 $\overline{AC}$ 的长是 $\sin x$，$\overline{FB}$ 的长等于 $\operatorname{tg}x$，因此 $\triangle AOB$，$\triangle FOB$ 和扇形 AOB 的面积分别是

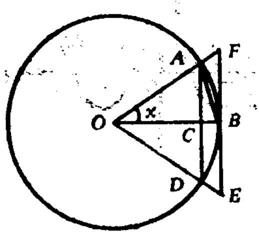

图5

$$\frac{1}{2}\sin x,\qquad \frac{1}{2}\mathrm{tg}x,\qquad \frac{1}{2}x$$

从而立即可知$\frac{1}{2}\sin x\leqslant\frac{1}{2}x\leqslant\frac{1}{2}\mathrm{tg}x$。于是

$$\sin x\leqslant x\leqslant \mathrm{tg}x$$

证毕。

三、反三角函数 我们知道六个三角函数都是周期函数，所以它们本是不可能有反函数的。例如正弦$\sin x$是以2π为周期的，$\sin(x+2\pi)=\sin x$。因此对于一个给定的y，如果$\sin x=y$有解，则必有无穷多个解。可见它不满足存在反函数的条件。不过如果我们将这些函数的定义域加以适当的限制，则情况就有所不同了。如对正弦$y=\sin x$，若限定$|x|\leqslant\frac{\pi}{2}$，则对于$[-1,1]$中的每一个$y$，都恰有一个$x$使$\sin x=y$，这就变成有反函数的了。我们称这个反函数为反正弦函数，记为$y=\arcsin x$或$y=\sin^{-1}x$，（注意我们已互换了记号x和y）它的定义域是$[-1,1]$，值域是$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$。当然，严格说来反正弦函数并不是正弦函数的反函数，而只是函数$y=\sin x$ $\left(-\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$的反函数，同样我们把反余弦函数$y=\mathrm{arc\,cso}x$或$y=\cos^{-1}x$定义为函数$y=\cos x(0\leqslant x\leqslant\pi)$的反函数；反正切函数$y=\mathrm{arc\,tg}x$（或$\mathrm{tg}^{-1}x$）定义为函数$y=\mathrm{tg}x$ $\left(-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}\right)$的反函数；反余切函数$y=\mathrm{arcctg}\,x$（或$\mathrm{ctg}^{-1}x$）定义为$y=\mathrm{ctg}x(0<x<\pi)$的反函数。因此总有

$$-\frac{\pi}{2}\leqslant\sin^{-1}x\leqslant\frac{\pi}{2},\qquad 0\leqslant\cos^{-1}x\leqslant\pi$$

$$-\frac{\pi}{2}<\mathrm{tg}^{-1}x<\frac{\pi}{2},\qquad 0<\mathrm{ctg}^{-1}x<\pi$$