徐利治 著

数学方法论选讲

（第三版）

华中理工大学出版社

Topics in Mathematical Methodology

数学方法论选讲

（第三版）

徐利治　著

朱梧槚、袁相碗　校

The author：L. C. Hsu（Xu Lizhi）

Readers：W. J. Zhu and S. W. Yuan

华中理工大学出版社

Huazhong University of

Science & Technology Press

（Wuhan，China）

图书在版编目(CIP)数据

数学方法论选讲/徐利治著.-3版
武汉:华中理工大学出版社, 2000年1月
ISBN 7-5609-2137-X

Ⅰ.数…
Ⅱ.徐…
Ⅲ.数学方法论-研究
Ⅳ.O1.0

数学方法论选讲 徐利治 著

责任编辑:李立鹏 封面设计:刘 卉
责任校对:熊九龄 监 印:张正林

出版发行:华中理工大学出版社
武昌喻家山 邮编:430074 电话:(027)87542624

经销:新华书店湖北发行所

录排:武汉皇荣文化发展有限责任公司照排室
印刷:武汉市青联彩印厂

开本:850×1168 1/32 印张:6.75 字数:157 000
版次:2000年1月第3版 印次:2000年1月第4次印刷 印数:23 001—26 000
ISBN 7-5609-2137-X/O·203 定价:9.80元

内 容 简 介

本书用十来个典型的专题，对数学的发展规律和思想方法，进行了认真的研究和讨论. 书中着重介绍了数学模型方法、公理化方法、映射反演原则、结构主义和伽罗瓦群的思想；分析了悖论与数学基础问题的关系以及对数学发展的影响；探讨了逻辑主义、直觉主义、形式主义等数学诸流派的观点、方法以及它们的成因；叙述了数学家在数学研究中的发现、发明与创新过程的心智状态. 本书用辩证的观点，总结了历史上著名数学家希尔伯特等人的成长条件和成功的经验.

本书可作为理工科大学高年级学生和研究生的选修课教材，也可供数学工作者，哲学工作者以及教师们参考.

第三版序言

好像是一个普遍规律,每位作者当看到自己的著作再版时,总是感到高兴的.现今我对拙著《数学方法论选讲》的第二次再版,欣慰之情也不例外.

这本《选讲》从1983年出版以来,其发行量之大曾使它获得“畅销书”之名,并且曾激励了国内一批中青年数学教师及研究生,乐愿钻研数学方法论.20世纪80年代中期,热心推动科学方法论研究的曲阜师范大学,曾主办过两次全国性数学方法论研讨会,并培养了三批以数学方法论为论文课题的硕士研究生.当年对此作出奉献的徐本顺教授是功不可殁的.

往年,南京大学、香港大学、南京师范大学、华中理工大学、大连理工大学、哈尔滨师范大学等校数学系,曾相继使用《选讲》作为数学教育与方法论课程教学参考书.20世纪90年代后,浙江师范大学与曲阜师大等校的数学教育硕士研究生班的学员们,曾广泛参考《选讲》中的主要题材撰写毕业论文.此外,国内凡开设方法论一类课程的师范专科学校也都选用了《选讲》的题材.还有天津师范大学主办的《数学教育学报》,也曾有不少文章引用《选讲》的论点.

上述情况表明,《选讲》一书是受到了国内数学教育界的欢迎的.但对这次的再版,除增添“数学模式观”与数学教育及哲学研究中的有关问题作为附录Ⅱ外,我已来不及对原著进行修订和补充,这是要请读者原谅的.好在书中的主要题材基本上并不受时间影响,诸如关于“关系映射反演原则”的广泛应用、有关“无限”问题不同学派的观点论争、数学发明心理学的基本观点、数学抽象度概念与抽象度分析法等等,应该是经久不衰的有趣论题,看来这些论题的基本内容迄今尚无改写必要.

如果此书能在青年科技人才与数学师资的培育成长过程中,

起到科研思想方法上的启迪作用，则将是作者的极大愉快和欣慰.同时，十分希望在新的世纪里有志于研究数学方法论的年青一代，将能对方法论的众多问题作出创造性贡献. 最后，作者对关心本书再版的华中理工大学出版社的诸领导致以诚挚的感谢.

徐利治

1999年7月于北京

目 录

第1讲 数学方法论引论 …………………………………………… (1)
§1 研究数学方法论的意义和目的 ………………………… (1)
§2 宏观的方法论与微观的方法论 ………………………… (2)
§3 略论希尔伯特成功的社会因素 ………………………… (3)
§4 浅谈微观的数学方法论 …………………………………… (7)
第2讲 略论数学模型方法 …………………………………………… (15)
§1 数学模型的意义 ……………………………………………… (15)
§2 数学模型的类别及简单例子 …………………………… (16)
§3 MM的构造过程及特点 …………………………………… (20)
§4 怎样培训构造 *MM* 的能力 ………………………………… (22)
第3讲 关系映射反演原则的应用 …………………………… (24)
§1 何谓“关系映射反演原则”? ……………………………… (24)
§2 数学中的RMI原则 ………………………………………… (27)
§3 若干较简单的例子 …………………………………………… (29)
§4 几个较难一点的例子 ………………………………………… (35)
§5 用RMI原则分析“不可能性命题” ………………… (39)
§6 关于RMI原则的补充说明 ……………………………… (45)
第4讲 略论数学公理化方法 ……………………………………… (47)
§1 公理化方法的意义和作用 ………………………………… (47)
§2 公理化方法发展简史 ………………………………………… (48)
§3 公理化方法的基本内容 …………………………………… (52)
§4 重要例子——几何学公理化方法 ……………………… (53)
§5 关于公理系统的相容性问题 …………………………… (56)
§6 略谈自然科学中的公理化方法 ………………………… (61)
第5讲 关于数学的结构主义 ……………………………………… (64)
§1 结构主义学派的形成过程 ………………………………… (64)

§ 2 布巴基学派的一般观点 …………………………… (65)
§ 3 数学结构的分类 …………………………………… (65)
§ 4 数直线结构分析 …………………………………… (67)
§ 5 略谈拓扑结构 ……………………………………… (68)
§ 6 略谈同构概念 ……………………………………… (70)
§ 7 略评结构主义 ……………………………………… (72)
第6讲 代数方程根式解法与伽罗瓦的群论思想方法 …… (74)
§ 1 代数基本定理与根式解法研究简史………………… (74)
§ 2 拉格朗日的思想方法与阿贝尔定理………………… (78)
§ 3 伽罗瓦的思想方法…………………………………… (85)
§ 4 方程式可解性理论简介 …………………………… (91)
第7讲 关于非标准数域与非康托型自然数模型的构造方法 ……………………… (96)
§ 1 略论"无限"概念蕴含的矛盾 ……………………… (96)
§ 2 非标准数域的构造方法 …………………………… (100)
§ 3 非康托型自然数序列模型的构造法 ……………… (109)
§ 4 关于一个引伸的芝诺悖论的解释 ………………… (113)
§ 5 略论无限的两种形态 ……………………………… (114)
第8讲 悖论与数学基础问题……………………………… (118)
§ 1 悖论的定义和起源 ………………………………… (118)
§ 2 悖论举例和数学三次危机 ………………………… (122)
§ 3 策莫洛对悖论的解决方案 ………………………… (130)
§ 4 罗素对悖论的解决方案 …………………………… (138)
§ 5 塔斯基及其语义学 ………………………………… (144)
§ 6 哥德尔的不完备性定理与悖论 …………………… (146)
§ 7 悖论的成因与研究悖论的重要意义 ……………… (149)
第9讲 论数学基础诸流派及其无穷观…………………… (151)
§ 1 数学系统的相对相容性证明与诸流派形成的历史近因 ……………………………………………… (151)
§ 2 逻辑主义派的观点和方法 ………………………… (153)
§ 3 直觉主义派的观点和方法 ………………………… (158)

§ 4 略论形式公理学派的观点和主张 …………………… (170)
§ 5 关于三大流派的简短评论 ………………………… (174)
第10讲 略论数学发明创造的心智过程 ……………… (176)
§ 1 何谓数学上的发明或创造? ………………………… (176)
§ 2 庞卡莱关于数学创造的论点 ………………………… (177)
§ 3 略谈数学创造的一般心智过程 ……………………… (179)
附录Ⅰ 数学抽象度概念与抽象度分析法 …………… (182)
§ 1 引言 ……………………………………………… (182)
§ 2 抽象与严格偏序 …………………………………… (183)
§ 3 抽象度的一般概念 ………………………………… (186)
§ 4 略论抽象法则与抽象难度 ………………………… (190)
§ 5 抽象度分析法概述 ………………………………… (192)
附录Ⅱ “数学模式观”与数学教育及哲学研究中的有关问题
………………………………………………………… (194)

主要参考文献 ………………………………………… (204)

第 1 讲　数学方法论引论

§1　研究数学方法论的意义和目的

什么叫**方法论**？方法论（methodology）就是把某种共同的发展规律和研究方法作为讨论对象的一门学问．英文 methodology 一词又译为方法学．如所知，各门科学都有方法论，数学当然也有它自己的方法论．

数学方法论主要是研究和讨论数学的发展规律、数学的思想方法以及数学中的发现、发明与创新等法则的一门学问．

数学是一门工具性很强的科学，它和别的科学比较起来还具有较高的抽象性等特征，为了有效地发展它、改进它、应用它或者把它很好地传授给学生们，就需要对这门科学的发展规律、研究方法、发现与发明等法则有所掌握．因此，数学研究工作者、数学教师、科技工作者，以及高年级大学生、研究生等都需要知道一些数学方法论．

由于数学领域里的许多概念与理论题材都是通过人脑的抽象思维形式表现出来的，这里不仅包含有思维对象（数学本体）的辩证法，而且还有着思维运动过程（认识与反映过程）的辩证法．所以数学方法论还给哲学家、自然辩证法研究工作者以及心理学家们提供了值得分析研究的素材．凡是看过恩格斯《自然辩证法》的读者都知道，即使在初等数学里也充满着辩证法．

我们又知道，数学方法论中的许多方法和原理是从数学发展史中总结归纳出来的，所以数学工作者还必须学习一点数学史．

从近代数学发展史中，我们看到有许多杰出的数学家曾围绕

着数学基础问题展开了一系列争论，以致形成了各个著名的流派，如逻辑主义派、直觉主义派、形式主义派与柏拉图主义派等. 直到现今，这些流派的观点主张对数学体系的内在发展，还继续产生着不同程度的影响.

各个数学流派对待数学基础问题的研究，各有其方法论主张. 事实上，他们各有所偏，各有所见. 只有运用科学的反映论观点，才能从他们的观点主张中分析总结出较为正确的数学方法论观点. 因此，对于今日的数学工作者说来，无论是为了掌握、运用或者去发展数学方法论，都必须自觉地采取科学的反映论观点（即辩证法的反映论观点）去考察问题和分析问题.

§2 宏观的方法论与微观的方法论

数学科学的发展规律可以从数学发展史的丰富材料中归纳分析出来. 由于数学史是人类社会科学技术发展史的一个组成部分，数学发展的巨大动力源泉与社会生产实践及技术发展的客观要求紧密相连，因此，数学发展规律的研究，如果撇开数学内在因素不提，那是属于**宏观的数学方法论**范畴.

数学工作者研究数学课题时，也可以不考虑数学发展的外在推动力，专就数学内部体系结构中的特定问题来进行分析研究，这样，就需要考虑采取最有效的数学研究方法，需要懂得数学发现与数学创造等各种法则. 这些属于研究工作者个人必须遵循的方法与法则的研究，可以称之为**微观的数学方法论**.

看来，历史上最卓越的数学家如牛顿、欧拉、高斯、傅立叶、拉普拉斯等人，既精通微观的数学方法论，也懂得宏观的数学方法论. 否则，他们的成就与贡献不可能对社会生产技术的发展产生那样深远的影响. 一般说来，凡是具有历史眼光的数学家，他们的贡献成果，往往起着承上启下的作用，因而总是带有经久不灭的光辉. 怎样才能获得“历史眼光”呢？这就需要通过数学史

的研究去理解一些宏观数学方法论的基本知识.

这里值得介绍的是，美国数学教授 M. Kline 曾在 1972 年出版了一本厚达 1200 页的巨著——《古今数学思想》，系统地叙述和总结了古今数学思想发展史. 该书包藏大量的题材，可作为我们研究数学方法论的一本宝贵的参考资料. 还有 E. T. Bell 的一本名著《数学人物》(1937 年出版，1965 年重版)，其中翔实地记录了古今 30 多位杰出数学家的生活经历与工作历史，也很有参考价值.

数学家成长规律的一般分析，显然也应属于宏观的方法论；但本书只着重讨论微观的数学方法论，所以仅借用希尔伯特成功的典型范例来描绘一下关于数学人才成长的社会因素的作用.

§3 略论希尔伯特成功的社会因素

分析一位杰出数学家成功的社会因素，对于正在成长着的青年数学工作者和从事数学教育的数学教师们说来，都会得到有益的启发. 这种分析至少对消除“天才自成”的糊涂思想，会起到一定的作用.

我们选择希尔伯特 (David Hilbert，1862～1943) 这个例子. 因为这位数学家的成长、发展和获得巨大成功的经历已经成为现代人才学上的一个典型例子.

按照历史唯物主义的观点来看，“天才人物”都是社会的产物. 他们只有适应时代的要求，回答和解决历史进程中出现的重大问题，才能取得成功. 分析任何一个天才人物成功的因素时，应当像恩格斯那样，不能离开当时社会历史条件和文化发展条件以及反映这些条件的时代要求. 所以对希尔伯特的分析，也应遵循这样的原则. 本节内容主要取材于《大连工学院自然辩证法通讯》上刘永振先生的一篇文章，该文显然是参考了希尔伯特传记写成的.

希尔伯特出身于东普鲁士的古都哥尼斯堡（现名加里宁格

勒）．中、青年时代，他曾对代数不变式论、代数数论、几何基础等科目作出了重要贡献．中年以后，他发展了变分法、积分方程、函数空间理论、数学物理方法、数理逻辑及证明论等数学分支．1899年出版的一本名著《几何学基础》，成为近代公理化方法的代表作，且由此推动形成了“数学公理化学派”．所以，希尔伯特是近代形式公理学派的创始人．1900年，年届38岁，他在国际数学会议上以卓越的远见和洞察力提出了数学上未解决的23个难题，即有名的“希尔伯特问题”，推动了半个多世纪以来各个数学分支的发展．

我们知道，19世纪70年代初，德国实现了统一，经济空前高涨，成为世界科学活动的主要中心，这是产生一大批德国数学家的主要社会原因．高水平的一群人才中，必有出类拔萃者．希尔伯特生逢盛世，成为出类拔萃者，这是历史的必然．下面再略作具体分析：

（一）文化传统的影响 希尔伯特故乡的哥尼斯城堡建基于13世纪，后来成为东普鲁士首都，那是一个著名的大学城．它位于布勒尔河两条支流之间，那里有桥连着一个岛和一个半岛，而数学史上那个著名的为欧拉解决的所谓“七桥问题”几乎是该城居民家喻户晓的一桩美谈．岛上有所古老的大学，还有大哲学家康德的墓地．显然，哥尼斯堡的自然环境和文化传统对于希尔伯特的成长来说是得天独厚的．

（二）家庭环境的影响 希尔伯特的父亲是一位普通的法官，母亲出生于普通商人家庭，但她爱好哲学、天文学和数学，特别对素数怀有浓厚的兴趣．这就影响了希尔伯特从小爱好数学．母亲每年在4月22日康德诞辰这一天，她总是带着小希尔伯特到康德墓地瞻仰康德的半身像，并且一字一句地拼读墙上刻着的康德的格言．这些对于希尔伯特从小爱科学，长大攀高峰，无疑会带来潜移默化的精神影响．

（三）社会舆论的影响 希尔伯特上小学二年级的时候，明可

夫斯基一家从俄罗斯搬到了哥尼斯堡．明可夫斯基一家三兄弟当时称为三个“奇才”，以才能出众、性格迷人轰动了哥尼斯堡．特别是小神童明可夫斯基(Herman Minkowski 1864～1909)比希尔伯特小两岁，他的数学才能显著超过希尔伯特．他后来也成为大数学家，是数的几何（Geometry of Numbers）这一数论分支的创始人．

当时两家只有一河之隔．小明可夫斯基的数学才能出众对小希尔伯特不能不产生一种心理上的压力．确实，据希尔伯特后来写的回忆录来看，他承认自己小时候并非天才，而是一个较愚钝的孩子，当然数学才能远远在明可夫斯基之下．在希尔伯特的亲友中，也没有人提到过希尔伯特的能力曾受到过人们的注意．但是人们对明可夫斯基一家三兄弟的赞赏却激励了小希尔伯特．特别是小神童明可夫斯基的数学天才像魔力一样征服了希尔伯特的心灵．

明可夫斯基刚满 17 岁时解决了“将正整数表成五个平方数和”的难题，同英国老数学家 Henry Smith 合得了法国巴黎科学院数学大奖，因而更加出名．当时希尔伯特的父亲还告诫希尔伯特，说不要同那样出名的人交朋友（以免被别人瞧不起）．可是希尔伯特不顾父亲的反对，毅然同明可夫斯基结成了终生最要好的朋友．

尽管希尔伯特和明可夫斯基在早年智力上有明显的差距，然而通过不断努力，希尔伯特后来不仅成为与明可夫斯基相提并论的大数学家，而且对整个数学的贡献还远远超过了明可夫斯基．这说明一个人的先天素质（所谓“天资”或“秉赋”）并不是决定成就大小的主要因素．先天素质的不足，可以在后天的实践中加以补偿．

（四）学校教育的影响　希尔伯特童年时代上的德国小学校，特别注意基础教育，非常强调语文、语法、算术等科目的基本训练（尤其是语法一科，注重训练学生有条不紊地思维以及正确的

表述思想的方式和方法). 希尔伯特进的中学和大学都充满自由学习的空气，这使他如鱼得水.

希尔伯特的青年时代是在哥尼斯堡大学度过的，那里有着浓厚的学术研究空气. 著名的数学家 Jacobi，Weierstrass，Weber，Lindemann 等都在那里任教过，使该大学曾形成一个数学的研究中心. Lindemann 曾以首先证明 π 为超越数而享有盛誉，他就是当年希尔伯特的学术导师. 希尔伯特的学术论文原想研究“连分数的一种推广”. 但经 Lindemann 指出，方知“那早已由 Jacobi 作出了”. 在 Lindemann 的引导下，希尔伯特改搞“代数不变式理论”，结果大为成功. Lindemann 对他的毕业论文极感满意. 明可夫斯基在写给希尔伯特的信中也赞赏说:“这样精彩的数学定理会出现在哥尼斯堡真是值得庆贺……”. 可见，获得第一流的教师指导引路，也是希尔伯特成功的因素之一.

哥尼斯堡大学曾讲授一些最新颖的数学科目，这样就往往能把年轻人很快带到数学研究领域的前沿，从事创造性的工作. 此外，启发式教学法对希尔伯特的教益也很大. 例如，他曾选学线性微分方程课程，当时 Fuchs 教授的讲课方法与众不同. Fuchs 习惯于在讲课时把自己置于危险困难境地（可能是缺乏备课习惯），对要讲的内容总是现想现推. 这样一来，就使得希尔伯特和他的同学们有机会瞧一瞧高明的数学思维过程是怎样进行的.

还有良师益友的互相切磋讨论，对希尔伯特的成长发展也起了十分重要的作用. 当时希尔伯特和明可夫斯基的老师 Hurwitz（他是一位只比希尔伯特大三岁的杰出数学家)，非常器重两个学生. 据说，每天下午准五点，三人必定相会，一起去苹果园散步，共同讨论问题，交流思想、交流研究心得. 据希尔伯特后来回忆说，当年三个年轻人几乎考察了数学领域的每一个王国. 可以想见，这应该是希尔伯特的才、学、识获得迅速成长的重要过程. 假如没有这段经历，那么希尔伯特在 1900 年竟能在许多重要领域中一次提出那样多的著名难题，倒是不易想象的了.

以上我们概述了希尔伯特成功的社会因素．当然，他本人的勤奋努力和艰苦奋斗等内在因素也是保证他获得成就的重要条件．例如，在研究工作中希尔伯特曾耐心地计算过四十多重的重积分．即使面对非常繁重的计算任务，他也是具有计算到底的坚强毅力的．事实上，很难设想缺乏坚强毅力的人能取得科学上的巨大成就（关于希尔伯特的详尽记载请参考 C. Reid “Hilbert” 一书)！

从方法论观点看，关于如何为青年人创造一个既有良师又有益友的环境，如何采用启发式方法讲授一系列新颖课程，并诱导青年人很快走上科研前沿等问题，显然能从希尔伯特成长的历史规律中，获得应有的解答．

§4　浅谈微观的数学方法论

每一个数学研究工作者都必须精通某些微观的数学方法论，才能有效地开展科研工作，获得丰硕成果．教师们也必须熟知这些方法论才能实行启发式教学法．

我们知道，美籍匈牙利数学家 Pólya 曾花数十年时间致力于“数学发现”与“解题思想方法”的研究．他的一些著作已被译成中文．特别值得重视的是他所著的《数学中的归纳与类比》(1954 年出版）一书．在此书中作者曾选用不少富于启发性的例子说明归纳与类比方法如何成为发现数学真理的重要手段．

18～19 世纪有突出贡献的数学家欧拉（Euler，1707～1783）和高斯（Gauss，1777～1855）都曾发表过一些经验之谈．欧拉说过：“数学这门科学，需要观察，还需要实验”．高斯也提到过，他的许多定理都是靠归纳法发现的，证明只是补行的手续．

举例来说，欧拉关于多面体的面、顶、棱公式($F+V-E=2$)显然就是从一批特殊的凸多面体的观察分析中归纳出来的．高斯青年时代曾著有《算术研究》(1801 年出版的数论名著）一书，书

中许多结果，包括著名的二次互反律等等，也都是首先从观察、实验、归纳过程中发现的．为什么数学真理如同物理科学领域中的定律和原理那样，有时可以通过实验与归纳方法去发现呢？原因很简单，因为数学对象本身（如数量关系与空间形式等）也具有客观实在性．

历史上许多有贡献的数学家，可以说无例外地都是善于应用“归纳法”与“类比法”去发现真理的能手．尤其是欧拉的许多发现与贡献早已经进入中学数学教材和大学低年级的课程之中，所以讲讲欧拉的一些光辉例子，对青年学生似乎更有教育意义．

为了说明类比法的作用，这里我们来介绍一下数学家伯努利（Bernoulli，1654～1705）的一个级数求和难题，是怎样被欧拉攻破的．伯努利是 17 世纪杰出的数学家，他是古典概率论的创始人，对古典微积分学以及级数求和等问题都有贡献．但他没有办法算出自然数倒数平方的级数和 $1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\frac{1}{25}+\cdots$．于是，他公开征求这一求和问题的解答，可惜直到他逝世时还未能见到有人解决此难题．这个难题过了数十年后才由欧拉解答出来．欧拉采用的方法就是一种巧妙的类比推理法．

首先，对于只含偶次项的 $2n$ 次代数方程

$$b_0-b_1x^2+b_2x^4-\cdots+(-1)^n b_n x^{2n}=0 \qquad (b_0\neq 0),$$

假设有 $2n$ 个互不相同的根

$$\beta_1,\ -\beta_1,\ \beta_2,\ -\beta_2,\ \cdots,\ \beta_n,\ -\beta_n,$$

则得

$$\begin{aligned} & b_0-b_1x^2+b_2x^4-\cdots+(-1)^n b_n x^{2n} \\ &= b_0\left(1-\frac{x^2}{\beta_1^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{\beta_2^2}\right)\cdots\left(1-\frac{x^2}{\beta_n^2}\right). \end{aligned}$$

把乘积展开出来，易见 x^2 项的系数为

$$b_1=b_0\left(\frac{1}{\beta_1^2}+\frac{1}{\beta_2^2}+\cdots+\frac{1}{\beta_n^2}\right),$$

以上所述都是代数方程式论中的初等知识．