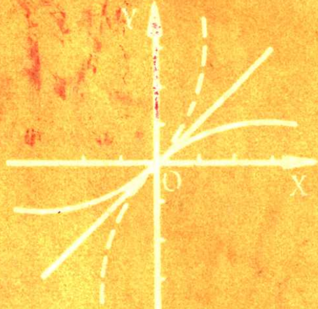
全日制十年制学校高中课本



数学习题解答

第一册

徐永平

黑龙江科学技术出版社

全日制十年制学校高中课本

数学习题解答

第一册

徐永平

黑龙江科学技术出版社

一九八二年·哈尔滨

全日制十年制学校高中课本

数 学 习 题 解 答

第 一 册

徐 永 平

黑龙江科学技术出版社出版
（哈尔滨市南岗区分部街28号）
绥化印刷厂印刷 黑龙江省新华书店发行
开本787×1092毫米1/32 • 印张5 12/16 • 字数119,000
1981年8月第1版 1982年8月第2次印刷
印数155,001—228,900
书号：13217 • 014 定价：0.50元

（教师用书）

出版说明

我们组织编写的《全日制十年制学校高中课本·数学习题解答》，共分四册，分别解答《全日制十年制学校高中课本·数学》一至四册中的全部“习题”与“复习题”。本书是其中的第一册(1979年2月第一版　1979年6月第一次印刷)。

为了更好地帮助教师进行教学研究，提高教学质量，我们在组织编写本书时，注意了以下三点：

一、各题的解答，均严格地以课本中相应的基础知识为依据，个别题的思考方法或依据的基础知识，如未见于课本，则作了说明。

二、凡经判断确系课本原题中的错误或多余条件，都加※号作了改正或说明。

三、遇有一题有多种主要的解法，都一一列出。

本书主要供中学数学教师在教学中参考。使用全日制十年制学校高中数学课本的业余中学、职业中学、广播函授中学、部队文化学校、技工学校的数学教师，亦可参考使用。

目　录

习 题 一

1. 写出方程 $x^2+x-1=0$ 的解的集合。

解 $\{x:x^2+x-1=0\}=\left\{x:x=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2},\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}\right\}$。

2. 写出不等式 $x^2+x-2<0$ 的解的集合。

解 $\{x:x^2+x-2<0\}=\{x:-2<x<1\}$。

3. 写出方程组 $\begin{cases}x+y=3,\\y+z=4,\\z+x=5\end{cases}$ 的解的集合。

解 $\left\{(x,y,z):\begin{cases}x+y=3,\\y+z=4,\\z+x=5.\end{cases}\right\}$

$=\{(x,y,z):(2,1,3)\}$。

4. 在__处填上适当的集合：

$\cap$	Φ	A	B
Φ	$\underline{\Phi}$	$\underline{\Phi}$	$\underline{\Phi}$
A	$\underline{\Phi}$	$\underline{A}$	$\underline{A\cap B}$
B	$\underline{\Phi}$	$B\cap A$	$\underline{B}$

5. 学校里开运动会，$A=$\{参加百米赛跑的同学\}，$B=$\{参加跳高的同学\}，求 $A\cap B$。

解 $A\cap B=$\{既参加百米赛跑又参加跳高的同学\}。

6. 在__处填上适当的集合：

$\cup$	Φ	A	B
Φ	Φ	A	B
A	A	A	$A\cup B$
B	B	$B\cup A$	B

7. 写出不等式 $x^2+x-2>0$ 的解的集合。

解 $\{x:x^2+x-2>0\}=\{x:x<-2\}\cup\{x:x>1\}$。

8. 设 $A=\{$某公社的汽车$\}$，$B=\{$某公社的拖拉机$\}$*，求 $A\cup B$。

解 $A\cup B=\{$某公社的拖拉机和汽车$\}$。

9. 在____处填上适当的集合：

$\cap$	Φ	A	$\overline{A}$
Φ	Φ	Φ	Φ
A	Φ	A	Φ
$\overline{A}$	Φ	Φ	$\overline{A}$

$\cup$	Φ	A	$\overline{A}$
Φ	Φ	A	$\overline{A}$
A	A	A	I
$\overline{A}$	$\overline{A}$	I	$\overline{A}$

10. 设 $I=\{a,b,c,d,e,f\}$，$A\{a,c,d\}$，$B=\{b,d,e\}$，求 $\overline{A}$，$\overline{B}$，$\overline{A}\cup\overline{B}$，$\overline{A}\cap\overline{B}$，$\overline{A\cup B}$，$\overline{A\cap B}$。

解 $\overline{A}=\{b,e,f\}$，$\overline{B}=\{a,c,f\}$，

$\overline{A}\cup\overline{B}=\{a,b,c,e,f\}$，$\overline{A}\cap\overline{B}=\{f\}$，

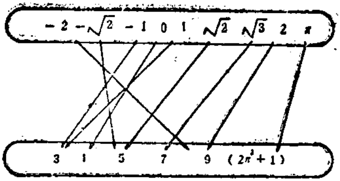
$\overline{A\cup B}=\{f\}$，$\overline{A\cap B}=\{a,b,c,e,f\}$。

11. 已知对应关系：$x\to 2x^2+1$，写出 x 所对应的数值。

---

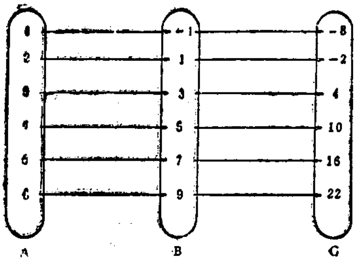
* 按题意，集合 A、B 中的"某公社"似指同一个公社，但这一点并不明确，应写成 $A=\{$甲公社的汽车$\}$，$B=\{$甲公社的拖拉机$\}$为好。

解 x
$\downarrow$
$2x^2+1$



12. 已知从集合A到集合B 的单值对应是：$x \to 2x-3$，从集合B到集合 C的单值对应是：$y \to 3y-5$，按照对应关系写出集合B和 C的元素。

解 $x \to 2x-3=y \to 3y-5$



求下列函数的定义域（13～16）：

13. $f(x)=\dfrac{6}{x^2-3x+2}$.

解 $f(x)=\dfrac{6}{x^2-3x+2}=\dfrac{6}{(x-1)(x-2)}$.

$$\begin{cases} x-1 \neq 0, & \cdots① \\ x-2 \neq 0, & \cdots② \end{cases}$$

由①式得 $x \neq 1$；由②式得 $x \neq 2$，所以函数

$$f(x)=\frac{6}{x^2-3x+2}$$

的定义域是$\{x : x \in R, x \neq 1, x \neq 2\}$.

14. $f(x)=\dfrac{\sqrt[3]{4x+8}}{\sqrt{3x-2}}$.

解 由 $3x-2>0$ 得 $x>\dfrac{2}{3}$，所以函数 $f(x)=\dfrac{\sqrt[3]{4x+8}}{\sqrt{3x-2}}$ 的定义域是 $\left(\dfrac{2}{3},\ +\infty\right)$.

15. $f(x)=\sqrt{2x-1}+\sqrt{1-2x}+4$.

解
$$\begin{cases}2x-1\geqslant 0, & \cdots ① \\ 1-2x\geqslant 0, & \cdots ②\end{cases}$$

由①式得 $x\geqslant\dfrac{1}{2}$；由②式得 $x\leqslant\dfrac{1}{2}$，所以函数

$$f(x)=\sqrt{2x-1}+\sqrt{1-2x}+4$$

的定义域是 $\left\{\dfrac{1}{2}\right\}$.

16. $f(x)=\dfrac{1}{x+3}+\sqrt{-x}+\sqrt{x+4}$.

解
$$\begin{cases}x+3\neq 0, & \cdots ① \\ -x\geqslant 0, & \cdots ② \\ x+4\geqslant 0, & \cdots ③\end{cases}$$

由①式得 $x\neq -3$；由②式得 $x\leqslant 0$；由③式得 $x\geqslant -4$，所以函数 $f(x)=\dfrac{1}{x+3}+\sqrt{-x}+\sqrt{x+4}$ 的定义域是 $\{x: -4\leqslant x\leqslant 0,\ x\neq -3\}$.

习 题 二

1．求下列函数的定义域：

(1) $y=x^{-2}+x^{\frac{1}{2}}$；　　(2) $y=\dfrac{(x+2)^{\frac{1}{2}}}{(3-x)^{\frac{3}{4}}}$；

(3) $y=3x+\sqrt{|2x-1|}$。

解　(1) $\begin{cases} x^2\neq 0, & \cdots① \\ x\geqslant 0 & \cdots② \end{cases}$

由①式得　$x\neq 0$，考虑②式，所以函数 $y=x^{-2}+x^{\frac{1}{2}}$ 的定义域是$(0,+\infty)$。

(2) $\begin{cases} x+2\geqslant 0 & \cdots① \\ (3-x)^3>0 & \cdots② \end{cases}$

由①式得　$x\geqslant -2$；由②式得 $x<3$，所以函数 $y=\dfrac{(x+2)^{\frac{1}{2}}}{(3-x)^{\frac{3}{4}}}$ 的定义域是$[-2,3)$。

(3) $|2x-1|\geqslant 0$，x 可为任意值，所以函数

$$y=3x+\sqrt{|2x-1|}$$

的定义域是 R。

2．证明：函数 $f(x)=x^2+x+1$ 在$(0,+\infty)$上是增函数。

证明　设 $0<x_1<x_2$，则有

$$\begin{aligned} f(x_2)-f(x_1)&=(x_2^2+x_2+1)-(x_1^2+x_1+1) \\ &=x_2^2-x_1^2+x_2-x_1 \\ &=(x_2-x_1)(x_2+x_1+1). \end{aligned}$$

由 $0<x_1<x_2$ 得　$x_2-x_1>0$，又 $x_2+x_1+1>0$，

$$\therefore \quad (x_2-x_1)(x_2+x_1+1)>0,$$

即 $$f(x_2)>f(x_1),$$

所以函数 $f(x)=x^2+x+1$ 在 $(0, +\infty)$ 上是增函数。

3. 证明：函数 $f(x)=-x^3+1$ 在 $(-\infty, 0)$ 上是减函数。

证明 设 $x_1<x_2<0$，则有

$$f(x_2)-f(x_1)=(-x_2^3+1)-(-x_1^3+1)$$

$$=x_1^3-x_2^3=(x_1-x_2)(x_1^2+x_1x_2+x_2^2).$$

由 $x_1<x_2<0$ 得 $x_1-x_2<0$，又 $x_1x_2>0$，从而 $x_1^2+x_1x_2+x_2^2>0$，

$$\therefore \quad (x_1-x_2)(x_1^2+x_1x_2+x_2^2)<0,$$

即 $$f(x_2)<f(x_1),$$

所以 $f(x)=-x^3+1$ 在 $(-\infty, 0)$ 上是减函数。

4. 下列函数哪些是奇函数、偶函数？哪些不是奇函数也不是偶函数？

(1) $f(x)=5x+3$； (2) $f(x)=5x$；

(3) $f(x)=x^2+1$； (4) $f(x)=x^2+2x+1$；

(5) $f(x)=x^{-2}+x^4$； (5) $f(x)=x^{-3}+x$.

解 (1) $f(-x)=5(-x)+3=-5x+3$，

所以 $f(x)=5x+3$ 既不是奇函数也不是偶函数。

(2) $f(-x)=5(-x)=-5x$，

即 $$f(-x)=-f(x),$$

所以 $f(x)=5x$ 是奇函数。

(3) $f(-x)=(-x)^2+1=x^2+1$，

即 $$f(-x)=f(x),$$

所以 $f(x)=x^2+1$ 是偶函数。

(4) $f(-x)=(-x)^2+2(-x)+1=x^2-2x+1$，

所以 $f(x)=x^2+2x+1$ 既不是奇函数也不是偶函数。

(5) $f(-x)=(-x)^{-2}+(-x)^4=x^{-2}+x^4$,

即 $$f(-x)=f(x),$$

所以 $f(x)=x^{-2}+x^4$ 是偶函数。

(6) $f(-x)=(-x)^{-3}+(-x)=-(x^{-3})-x$,

即 $$f(-x)=-f(x),$$

所以 $f(x)=x^{-3}+x$ 是奇函数。

5. 分析上题中(1)、(2)、(3)、(4)，回答：(1) 一次函数 $f(x)=ax+b$ 在什么情况下是奇函数？ (2) 二次函数 $f(x)=ax^2+bx+c$ 在什么情况下是偶函数？

解：(1) 当 $b=0$ 时，一次函数 $f(x)=ax+b$ 是奇函数。

(2) 当 $b=0$ 时，二次函数 $f(x)=ax^2+bx+c$ 是偶函数。

6. 已知函数 $f(x)$ 是奇函数，而且在 $x>0$ 上是减函数，$f(x)$ 在 $x<0$ 上是增函数还是减函数？

解 $f(x)$ 在 $x<0$ 上仍是减函数。证明如下：

设 $x_1<x_2<0$,

$\because$ $f(x)$ 是奇函数， $\therefore$ $f(-x_1)=-f(x_1)$, $f(-x_2)=-f(x_2)$。

由假设可知 $-x_1>0$，$-x_2>0$，且 $-x_1>-x_2$，但已知 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上是减函数，所以 $f(-x_1)<f(-x_2)$,

即 $$-f(x_1)<-f(x_2),\quad f(x_1)>f(x_2),$$

故 函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上仍是减函数。

7. 求下列函数的反函数：

(1) $y=-\dfrac{1}{x}+3$； (2) $y=x^5+1$；

(3) $y=x^{\frac{3}{5}}-2$；　　　(4) $y=\dfrac{2x}{5x+1}$.

解　(1) 由 $y=-\dfrac{1}{x}+3$ 得 $x=\dfrac{1}{3-y}$,

所以函数 $y=-\dfrac{1}{x}+3$ 的反函数是 $y=\dfrac{1}{3-x}$.

(2) 由 $y=x^5+1$ 得 $x=\sqrt[5]{y-1}$,

所以函数 $y=x^5+1$ 的反函数是 $y=\sqrt[5]{x-1}$.

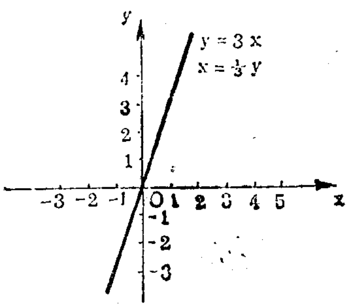
(3) 由 $y=x^{\frac{3}{5}}-2$ 得 $x=\sqrt[3]{(y+2)^5}$,

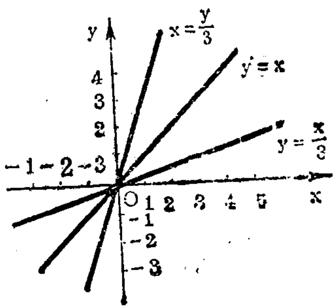
所以函数 $y=x^{\frac{3}{5}}-2$ 的反函数是 $y=\sqrt[3]{(x+2)^5}$.

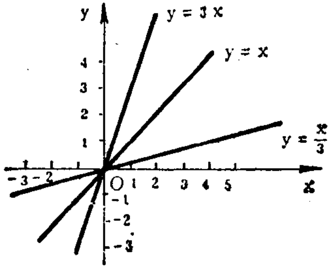
(4) 由 $y=\dfrac{2x}{5x+1}$ 得 $x=\dfrac{y}{2-5y}$,

所以函数 $y=\dfrac{2x}{5x+1}$ 的反函数是 $y=\dfrac{x}{2-5x}$.

8. 举例说明，在同一坐标系里：(1) $y=f(x)$ 和 $x=f^{-1}(y)$ 的图象有什么关系；(2) $x=f^{-1}(y)$ 和 $y=f^{-1}(x)$ 的图象有什么关系；(3) $y=f(x)$ 和 $y=f^{-1}(x)$ 的图象有什么关系.







解 (1) 如 $y=3x$ 和 $x=\frac{1}{3}y$ 的图象都是同一条直线。一般地我们说 $y=f(x)$ 和 $x=f^{-1}(y)$ 的图象相同。(2) 如 $x=\frac{1}{3}y$ 和 $y=\frac{1}{3}x$ 的图象是两条关于直线 $y=x$ 对称的直线。一般地我们说 $x=f^{-1}(y)$ 和 $y=f^{-1}(x)$ 的图象关于直线 $y=x$ 对称。(3) 如 $y=3x$ 和 $y=\frac{1}{3}x$ 的图象是两条关于直线 $y=x$ 对称的直线。一般地我们说 $y=f(x)$ 和 $y=f^{-1}(x)$ 的图象关于直线 $y=x$ 对称。

习 题 三

1. (1) 一种产品的年产量原来是 a，在若干年内，计划使年产量平均每年比上一年增加 $p\%$。写出年产量随年数变化的关系式。

(2) 一种产品的成本原来是 a，在若干年内，计划使成本平均每年比上一年降低 $p\%$。写出成本随年数变化的关系式。

解 (1) 设年产量经过 x 年增加到 y，则

$$y=a(1+p\%)^x.$$

(2) 设成本经过 x 年降低到 y，则

$$y=a(1-p\%)^x.$$

2. 一台机器的价值是 50 万元。如果每年的折旧率是 4.5%（就是每年减少它的价值的 4.5%）。那么大约几年后它的价值为 20 万元？

解 设 x 年后它的价值为 20 万元，则

$50(1-4.5\%)^x=20$,

$0.955^x=0.4$，两边取对数得

$x\lg 0.955=\lg 0.4$,

$$x=\frac{\lg 0.4}{\lg 0.955}=\frac{\bar{1}.6021}{\bar{1}.9800}=\frac{-0.3979}{-0.0200}$$

$$=19.895\approx 20(\text{年})$$

答：大约 20 年后它的价值成为 20 万元。

3. 求下列函数的定义域：

(1) $y=\sqrt[3]{\log_2 x}$;　　(2) $y=\sqrt{\log_{0.5}(4x-3)}$;

(3) $y=\sqrt{x^2+3x+2}+\log_2 3x$。

解 (1) $x>0$。

所以函数$y=\sqrt[3]{\log_2 x}$的定义域是$(0,\ +\infty)$。

(2) $\log_{0.5}(4x-3)\geqslant 0$，等价于$\begin{cases}4x-3\leqslant 1 & \cdots① \\ 4x-3>0 & \cdots②\end{cases}$

由①式得$x\leqslant 1$，由②式得$x>\dfrac{3}{4}$。所以函数

$y=\sqrt{\log_{0.5}(4x-3)}$的定义域是$\left(\dfrac{3}{4},\ 1\right]$。

(3) $\begin{cases}x^2+3x+2\geqslant 0 & \cdots① \\ 3x>0 & \cdots②\end{cases}$

由①式得$x\leqslant -2$或$x\geqslant -1$，由②式得$x>$。所以函数

$$y=\sqrt{x^2+3x+2}+\log_2 3x$$

的定义域是$(0,\ +\infty)$。

4. 不查表计算下列各题：

(1) $\log_5 35+2\log_{\frac{1}{2}}\sqrt{2}-\log_5\dfrac{1}{50}-\log_5 14$;

(2) $\lg 12.5-\lg\dfrac{5}{8}+\lg\dfrac{1}{2}$。

解 (1) $\log_5 35+2\log_{\frac{1}{2}}\sqrt{2}-\log_5\dfrac{1}{50}-\log_5 14$

$=(\log_5 5+\log_5 7)+2\log_{\frac{1}{2}}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{2}}+(\log_5 2+$

$\log_5 25)-(\log_5 2+\log_5 7)$

$=1+\log_5 7-1+\log_5 2+2-\log_5 2-\lg_5 7$

$=2$

(2) $\lg 12.5-\lg\frac{5}{8}+\lg\frac{1}{2}$

$$=\lg\left(12.5\times\frac{8}{5}\times\frac{1}{2}\right)=\lg 10=1.$$

5. 利用换底公式，证明下列各式：

(1) $\frac{\log_a M}{\log_a N}=\frac{\log_b M}{\log_b N}$；　　(2) $\log_{a^n}N^n=\log_a N$.

证明　(1) 由换底公式得$\frac{\log_a M}{\log_a N}=\log_N M$,

$$\frac{\log_b M}{\log_b N}=\log_N M.$$

故　$\frac{\log_a M}{\log_a N}=\frac{\log_b M}{\log_b N}$.

(2) 由换底公式得$\frac{\log_a N^n}{\log_a a^n}=\frac{n\log_a N}{n}=\log_a N$.

故　$\log_{a^n}N^n=\log_a N$.

6. 解下列方程：

(1) $\left(\frac{1}{2}\right)^x\cdot 8^{2x}=4$；　　(2) $5^{x-1}\cdot 10^{3x}=8^x$.

解　(1) $\left(\frac{1}{2}\right)^x\cdot 8^{2x}=4, 2^{-x}\cdot 2^{6x}=4, 2^{5x}=2^2$，$5x=2$,

所以　$x=\frac{2}{5}$.

(2) $5^{x-1}\cdot 10^{3x}=8^x$，$5^{x-1}\cdot 5^{3x}\cdot 2^{3x}=2^{3x}$,

两边同除以 $2^{3x}\neq 0$，并整理得 $5^{4x-1}=1$,

即　$5^{4x-1}=5^0$，从而得 $4x-1=0$，所以 $x=\frac{1}{4}$.

7. 已知下列各式，求 x.