图论

王朝瑞 编著

（第三版）

北京理工大学出版社

图　　论

（第三版）

王朝瑞　编著

北京理工大学出版社

内 容 简 介

本书于1981年初版,1987年出版修订本,此次是修订本的再版。

全书有十四章及三个附录。前十章是图的基础知识和基本理论,包括有关图的基本概念、图的基本性质和有关图论中几个活跃的专题。后四章介绍有向图及其应用。有关图论的应用我们放在附录中加以介绍,以不致于分散精力。

本书是一本图论入门书,着重介绍图论的基本内容和基本方法,对图的矩阵表示做了较为详细的介绍。书中有较多的例题和习题,并附有解答。

本书可供高等院校作为教材之用,也可供有关技术人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

图论/王朝瑞编著.—3版.—北京:北京理工大学出版社,(2005.8重印)

ISBN 7-81045-245-2

Ⅰ.图… Ⅱ.王… Ⅲ.图论 Ⅳ.O157.5

中国版本图书馆CIP数据核字(97)第01407号

北京理工大学出版社出版发行

(北京市海淀区中关村南大街5号)

邮政编码 100081 电话:(010)68944990

各地新华书店经售

北京国马印刷厂印刷

*

787毫米×1092毫米 32开 12.875印张 304千字

2001年12月第3版 2005年8月第7次印刷

印数:32001—37000册 定价:15.00元

序

图论是近二十年来发展十分迅速，应用比较广泛的一个新兴的数学分支，在许多领域，诸如物理学、化学、运筹学、计算机科学、信息论、控制论、网络理论、社会科学以及经济管理各方面都有广泛的应用。因此受到世界数学界和工程技术界越来越广泛的重视。

我国在50年代开始开展图论方面的工作，取得了许多可喜的成果。但是总的来说，图论在我国还不够普及，从事这方面研究和应用的人也还不够多，为了普及图论知识，推广图论的应用，以及为进一步培养专门人材创造条件，我院曾受北京市数学会的委托，举办图论普及班，本书是在为这个普及班编写的讲义的基础上修改而成的。

图论的内容十分丰富，涉及的面也比较广，要想在一本书中包括图论的全部内容几乎是不可能的，为了达到普及和推广的目的，本书所涉及的只是图论中的基础知识，但它们又是工程实际中经常用到的。在叙述上，力求作到对基本概念的阐述通俗易懂，便于初学者掌握，在方法上是以线性代数的基础知识作为研究图的主要工具。

本书共十三章，前八章讨论无向图，内容有：图与子图，E图和H图，通路的集合和最短通路，树，割集，图的连通度，图的矩阵表示，平面图。后五章讨论有向图，包括有向图的概念，有向图的矩阵表示，生成树的生成，网络的流，信号流图。

本书在编写中，承孙树本教授的热忱帮助和指导，并认真

审阅了原稿，在此表示衷心的感谢。还要感谢应用数学所王建方和蔡晨两位老师，他们详细审阅了手稿，提出了许多宝贵意见。

书中有关的 Fortran 语言程序是尤定华老师协助编写的，谨此致谢。

王朝瑞

北京工业学院 1980.5

2001 年再版序

本书自 1980 年出版以来，得到了许多院校的采用，1985 年和 1996 年根据广大读者的要求，进行了修订再版。此次再版对第二版印刷中的错误均做了改正。在内容的选取和安排上没有做改动。

为了使初学图论的读者，避免在阅读时产生不必要的困难，此次再版，把无序对记成(a,b)，而有序对记成$<a,b>$。无向图论记成 $G=(V,E)$，有向图记成 $G=<V,E>$。

此次再版仍然保留了流图和信号流图、开关网络、电网络三部分内容，其目的一是介绍图论的一些应用，二是供有关技术人员参考。

顺便指出，除例题外，由小号字印刷的内容，初学者均可以略去。

王朝瑞

2001 年 11 月于北京理工大学

96 年再版序

本书此次再版除保留了原书特点之外，在内容安排上做了较大的改动，使内容安排更加合理。

此次再版前六章集中介绍图论的基本知识，在此基础上，接下去的四章介绍图论中的几个专题，它们都是图论中很活跃的研究领域。然后，以最短路和最小树为例，介绍图论的应用。最后三章介绍有向图和以运输网络为例介绍有向图的应用。

根据读者的需要，此次再版增加了有关图论的应用：流图和信号流图；开关网络和电网络，为了不使内容分散和庞杂，这三部分内容均放在附录中加以介绍。

由于讨论开关网络的需要，增加了割集矩阵的可实现性，这部分内容用小号字印刷，此外还有部分内容和难度较大的定理的证明，此次再版均改用小号字。

王朝瑞

1996.6 于北京理工大学

目　　录

第一章　图

本章介绍图与描述图的局部结构的一些基本概念和述语。这一章的名词和概念较多，但它们都是最基本的，是我们进一步讨论的基础。因此希望读者能熟练地掌握这些概念，这对以后的讨论是非常重要的。

1.1　图的概念

1.1.1　引例

图论中所讨论的图与人们通常熟悉的几何图形例如圆、椭圆、函数图形等是不同的。先来看两个例子。

例 1.1.1　有六支甲 A 足球队：上海申花队，北京国安队，广东宏远队，大连万达队，广州太阳神队，济南泰山队。这六支球队 1996 年甲 A 联赛前七轮的比赛是：

济南泰山队——广州太阳神队（第一轮）
济南泰山队——大连万达队（第二轮）
广州太阳神队——广东宏远队（第三轮）
广东宏远队——济南泰山队（第四轮）
广州太阳神队——上海申花队（第五轮）
济南泰山队——北京国安队（第五轮）
北京国安队——广州太阳神队（第六轮）
广东宏远队——大连万达队（第六轮）
上海申花队——济南泰山队（第七轮）

大连万达队——北京国安队（第七轮）

那么由这六支球队和这六支球队前七轮的比赛组成一个**图**(graph)。具体地说就是：

六支球队组成一个集合：

V={上海申花队，北京国安队，广东宏远队，大连万达队，
广州太阳神队，济南泰山队}

六支球队前七轮的比赛组成一个集合：

E={（济南泰山队，广州太阳神队），（济南泰山队，大连万达队），
（广州太阳神队，广东宏远队），（广东宏远队，济南泰山队），
（广州太阳神队，上海申花队），（济南泰山队，北京国安队），
（北京国安队，广州太阳神队），（广东宏远队，大连万达队），
（上海申花队，济南泰山队），（大连万达队，北京国安队）}

用（济南泰山队，广州太阳神队）表示这两支球队进行比赛。

那么我们把由集合 V 和集合 E 组成的偶对(V,E)，称为一个**图**。

例 1.1.2 北京，上海，南京，杭州，西安，郑州，重庆，武汉，长沙，广州十个城市和它们之间的航线构成一个图。具体地说就是：

V={北京，上海，南京，杭州，西安，郑州，重庆，武汉，长沙，广州}

和

E={（北京，西安），（北京，郑州），（北京，南京），
（北京，武汉），（北京，上海），（北京，杭州），
（北京，长沙），（北京，广州），（北京，重庆），
（西安，重庆），（重庆，武汉），（长沙，武汉），
（武汉，南京），（南京，杭州），（杭州，上海），
（广州，杭州），（长沙，广州），（重庆，广州）}

从以上两个例子可以看出，图论中的图是指表示具体事物的集合 V（例 1.1.1 中的球队，例 1.1.2 中的城市）和事物之间的关系的集合（例 1.1.1 中球队进行比赛，例 1.1.2 中两城市间有航线）所组成的偶对。集合 V 中的元素称为图的**顶点**(vertices)，集合 E 中的元素称为图的**边**(edges)。因此，一个

图是由表示具体事物的集合和表示事物之间的关系的集合组成的偶对。

假如我们用平面上的几何点表示图的顶点，用直线段或曲线段表示图的边，那么一个图可以用几何图形来表示。

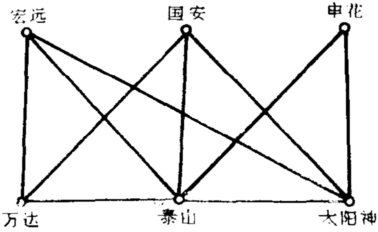

图 1.1-1

图 1.1-1 和图 1.1-2 所示的几何图形就是分别描述例 1.1-1 和例 1.1-2 中的图。

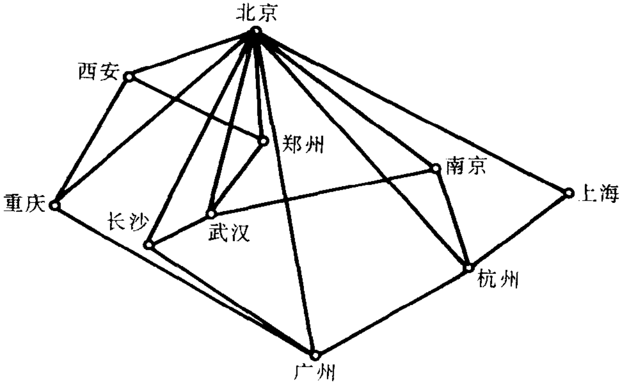

图 1.1-2

图还可以用来表示许多其他结构。譬如，用顶点表示人，边表示人与人之间的关系(例如父子关系)，那么亲族关系就可以用一个图来表示。图1.1-3给出这种图的几何图形，称为树。

早期图论与“数学游戏”有密切关系，1736 年欧拉解决了

当时很有名的哥尼斯堡七桥问题。哥尼斯堡城有一条普莱格尔河，河中有两个小岛，有七座桥把普莱格尔河中的两个小岛与河两岸联结起来，如图 1. 1-4 所示。

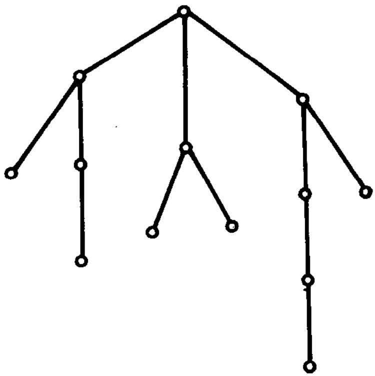

图 1. 1-3

有人提出这样一个问题：从河岸或岛上任何一个地方开始，能否通过每一座桥一次且仅一次回到原地？

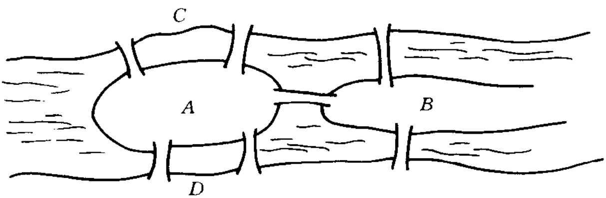

图 1. 1-4

这个问题虽然是一个游戏，但是它的数学模型却是很有意义的。

欧拉用四个点表示两岸和两个小岛，用两点间的联线表示桥，如图1. 1-5所示。

于是问题转化为，在图1. 1-5所示的图中，从任何一点出发，能否通过每条边一次且仅一次回到出发点。

直观上不难发现，如要回到原来的地方，必须从一条边进，从另一条边出，只有一进一出才行。这就是说，要求与每个顶点相关联的边均偶数。从图1.1-5中可以看到，这个图所有的点均不与偶数条边相关联，所以七桥问题无解（详细讨论见第三章）。

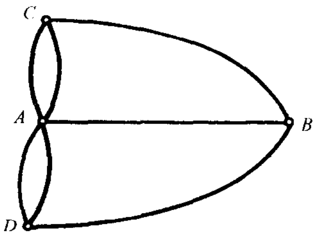

图 1.1-5

我们所以把一个顶点集合和一个边的集合称之为“图”，正是因为它们可以用一个图形来表示。这种图形表示有助于了解有关图的许多性质。但是必须指出，描述一个图的几何图形不是唯一的。一个图的几何图形仅描绘出它的顶点和边之间保持的相互关系，至于顶点的位置以及边的长、短、曲、直都是无关紧要的。

上面我们从直观上阐述了图的概念。从上面的讨论中可以看到，图的本质内容是顶点和边之间的关联关系，至于顶点和边是否用平面上的几何点和线段来表示，则是完全不必要的，换句话说，图的概念可以抽象化。

1.1.2 二元关系

二元关系这个概念在图的抽象定义中起着重要的作用。

我们先来讨论集合的积。

两个具体事物 a 和 b，按照一定的次序排列，a 在前，b 在后，记作 $\langle a,b\rangle$，则称 $\langle a,b\rangle$ 为一个**有序对**。

我们常常会遇到有序对的概念。例如，在所有参加乒乓球

比赛的选手中，有序对 $<a,b>$ 可以表示冠军和亚军。因此，有序对 $<a,b>$ 和 $<b,a>$ 是不同的。

设 A 和 B 是两个集合。由 $a\in A, b\in B$ 组成的形如 $<a,b>$ 的所有有序对构成的集合，称为 A 和 B 的**笛卡儿积**(cartesian product)，或称为**有序积**，记作 $A\times B$，即

$$A \times B = \{<a,b> | a \in A, b \in B\}$$

定义 1.1.1 有序积 $A\times B$ 的一个子集合，称为 A 到 B 的一个**二元关系**(binary relation)

特别地，当 $A=B$ 时，集合 A 到集合 B 的二元关系称为**集合 A 上的二元关系**。

例如，设 $A=\{a,b,c\}, B=\{a,b,d\}$，则

$$\begin{aligned} A \times B &= \{a,b,c\} \times \{a,b,d\} \\ &= \{<a,a>, <a,b>, <a,d>, <b,a>, <b,b>, \\ &\quad <b,d>, <c,a>, <c,b>, <c,d>\} \end{aligned}$$

集合 $\{a,b,c\}\times\{a,b,d\}$ 的一个子集，譬如 $\{(a,a),(a,b),(b,a),(c,a)\}$ 是 $\{a,b,c\}$ 到 $\{a,b,d\}$ 的一个二元关系。

集合 A 到集合 B 上的一个二元关系，是 A 中与 B 中有关系的元素的直观概念的形式化。事实上，如果 R 是 A 到 B 的一个二元关系，并且有序对 (a,b) 是 R 中的元素，那么元素 a 和 b 有其种关系。

上面我们是针对有序对来讨论的。如果组成偶对的两个事物 a 和 b 与次序无关，则这种偶对称为**无序对**，用符号 (a,b) 来表示。无序对也是经常遇到的一个概念。譬如，在所有参加乒乓球男子双打者中间，偶对 (a,b) 表示获得冠军的一对选手，那么 (a,b) 和 (b,a) 表示同一对选手。

设 A,B 是两个集合。由 $a\in A, b\in B$ 所组成的无序对构成的集合，称为 A 和 B 的**无序积**，记作 $A\mathscr{D}B$。