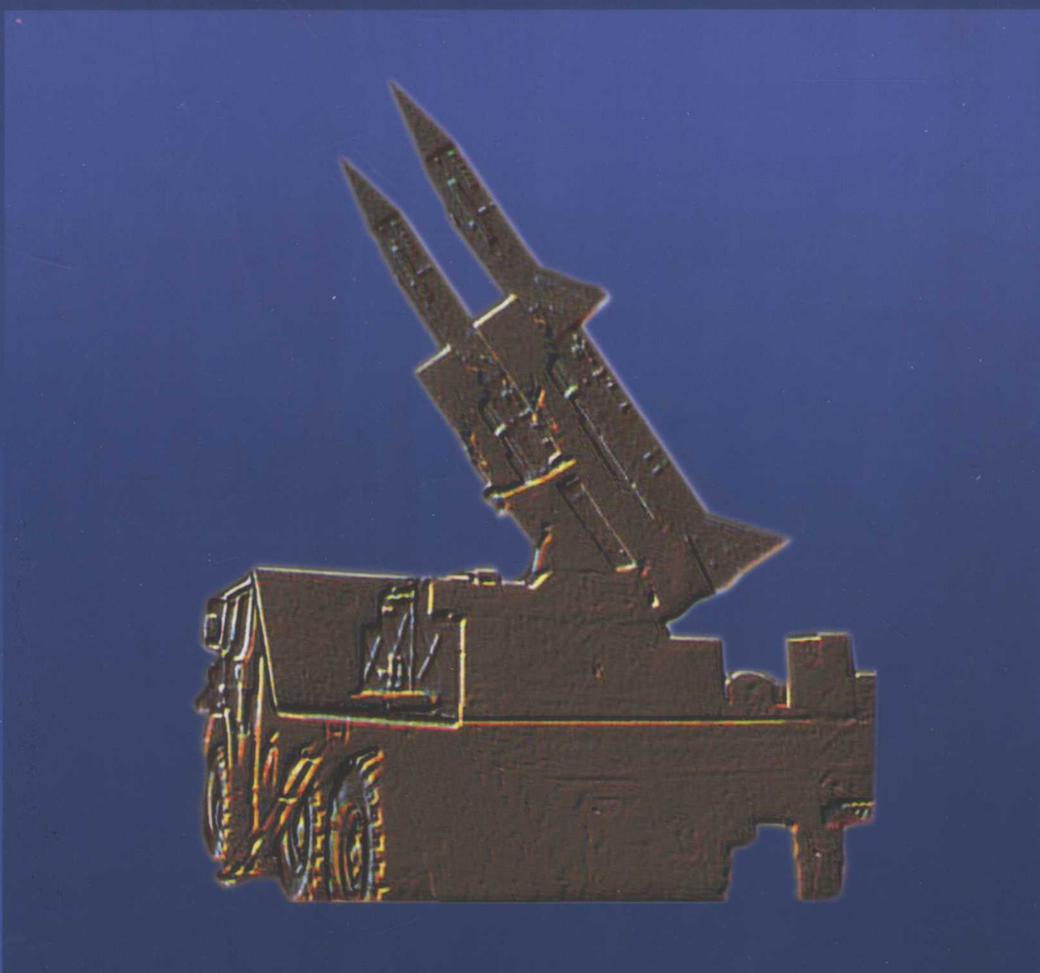
飞行器结构力学

梁立孚　刘石泉　齐辉　编著



中国宇航出版社

飞行器结构力学

梁立孚 刘石泉 齐 辉 编著

中国宇航出版社

内容简介

本书对飞行器结构力学基本原理和方法做了比较系统的研究。全书共分 5 章：第一章，能量原理；第二章，力法；第三章，位移法；第四章，工程梁理论；第五章，板壳稳定。此外，本书有以下几个特点：(1) 以能量原理为基础。书中系统地研究了以力和位移为线索的能量原理，使得力法和位移法的研究建立在更加严格的理论基础上。同时，能量原理作为有限元素法和其他近似计算方法的理论基础，更能体现飞行器结构力学的基础地位；(2) 将矩阵分析方法作为主要的研究和计算方法。电子计算机的广泛应用是时代的特点，为了适应时代的要求，本书把矩阵分析方法作为重要的研究和计算方法。矩阵的书写形式便于编制计算机程序，进而形成各种计算软件；(3) 将热应力的计算引入飞行器结构力学。飞行器在其飞行过程中要经受极为恶劣的热环境，虽然热控技术的发展可以大大减轻热环境对飞行器结构强度的影响，但是，这仍然是一个不可忽视的问题。适应飞行器近代发展的需要，本书首次把有关热应力的内容纳入飞行器结构力学中。

本书可供相关专业的科研人员和工程技术人员参考，也可作为相关专业的硕士生和本科生的教科书。

图书在版编目（CIP）数据

飞行器结构力学 / 梁立孚，刘石泉，齐辉 编著.—北京：中国宇航出版社，2003.1
ISBN 7-80144-553-8

Ⅰ.飞… Ⅱ.①梁…②刘…③齐… Ⅲ.飞行器—结构力学 Ⅳ.V414

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2003）第 019137 号

出版发行 中国宇航出版社
社址 北京市和平里滨河路 1 号 邮编 100013
经销 新华书店
发行部 (010)68372924 (010)68373451(传真)
读者 北京市阜成路 8 号 邮编 100830
服务部 (010)68371105 (010)68522384(传真)
承印 北京燕南印刷厂

版次 2003 年 1 月第 1 版 2003 年 1 月第 1 次印刷
规格 787×1092
开本 1/16
印张 16.5
字数 450 千字
印数 1～1500 册
书号 ISBN 7-80144-553-8
定价 42.00 元

本书如有印装质量问题可与发行部调换

序 言

从飞行器设计的角度来看问题，飞行器结构力学应当是研究作用在飞行器结构上的力（飞行器的外载荷）、力在结构中的传递（传力）和力在结构中引起的效应（强度、刚度和稳定性）的一门科学。作用在飞行器结构上的力即指作用在飞行器上的外载荷，一般说来作用在飞行器结构上的力有空气动力、集中和分布质量力、发动机的推（拉）力等，有时还涉及热载荷。在固连在飞行器上的坐标系中来观察问题，作用在飞行器上的外载荷构成一个平衡力系，应当注意到，作用在飞行器的不同部位的外载荷是通过力在结构中的传递来达到平衡的，这就又引出力在结构中怎样传递更合理的问题，因为飞行器结构是相当复杂的，所以传力的规律也是相当丰富的。熟悉传力规律的人看飞行器结构，就像研究电器的人看电路图一样，各个元件都有其固有的作用，飞行器结构的部件、组合件和零件的传力构成合理的传力系统图。用通俗的话说，飞行器的各元件的传力是以其受力为代价的，由于飞行器结构是变形体，结构元件在传力（受力）过程中要引起一些效应，这些效应归结为飞行器结构的强度问题、刚度问题和稳定性问题。强度问题是从研究结构元件内力着眼，使其内应力不大于容许应力，此时，认为结构满足了强度要求。刚度问题是从研究结构的变形（位移）着眼，使其变形限制在结构完成其使命容许的范围内，此时，认为结构满足了刚度要求。稳定性问题是指不允许结构失去稳定性，研究这类问题的关键是正确地确定失去稳定性的临界应力或临界载荷。以上论述的是飞行器结构力学的大体系，本书重点研究飞行器结构力学基本原理和方法，不能遵循这个大体系，而把重点放在研究力的效应上，而且也不是力的效应的全部内容，而是着重研究内力计算、位移计算和失稳临界载荷，为了实现这一目的，需要研究一些力学基本原理和方法，这些问题在绪论中再做详细的说明。

本书在编写过程中，得到宋海燕博士、李海波博士、刘宗民硕士的大力协助，中国宇航出版社的宋兆武编审对文稿进行了仔细的审阅和编辑，作者一并表示感谢。

本书部分内容属于国家自然科学基金 No.10272034、博士学科点专项科研基金和黑龙江省自然科学基金资助课题。

尽管作者努力将该书编写好，但由于作者水平限制，加之书中有些内容是作者的新提法，难免有不妥之处，作者诚恳地希望广大读者给予指导和帮助。

作　者
2002 年 10 月

目　录

序　言

绪　论 ………………………………………………………………………… 1

第 1 章　能量原理 ………………………………………………………… 4

1.1　引言 ……………………………………………………………………… 4
1.2　虚功原理和最小势能原理 ………………………………………… 7
1.3　余虚功原理和最小余能原理 ……………………………………… 12
1.4　最小势能、余能原理衍生的变分原理 ………………………… 16
1.4.1　应变能与余应变能……………………………………………… 16
1.4.2　最小应变能原理和最小余应变能原理………………………… 17
1.4.3　Castigliano 定理 ………………………………………………… 17
1.4.4　单位位移法和单位载荷法……………………………………… 19
1.4.5　功的互等定理…………………………………………………… 21
1.4.6　叠加原理………………………………………………………… 23
1.5　Ritz 方法………………………………………………………………… 28
1.6　说明一个问题 ………………………………………………………… 30
练习题 ……………………………………………………………………… 30

第 2 章　力法 ……………………………………………………………… 33

2.1　引言 ……………………………………………………………………… 33
2.1.1　系统的几何不变性……………………………………………… 33
2.1.2　自由度和约束(几何不变性的判断) ………………………… 35
2.1.3　结构的组成……………………………………………………… 38
2.1.4　静不定度的判定………………………………………………… 40
2.2　静定结构的内力计算 ……………………………………………… 43
2.2.1　结构元件的平衡………………………………………………… 44
2.2.2　平面静定结构的内力计算……………………………………… 49
2.2.3　空间静定结构的内力计算……………………………………… 52
2.3　静定结构的位移计算 ……………………………………………… 55

2.3.1 元件的柔度特性 55
2.3.2 静定结构的位移计算 60
2.4 静不定结构的内力和位移计算 65
2.4.1 对称性的利用 65
2.4.2 静不定结构的内力计算——力法 66
2.4.3 静不定结构的位移计算 73
2.5 矩阵力法 78
2.5.1 应用矩阵方法计算结构的内力 78
2.5.2 应用矩阵方法计算静不定结构的变形 79
2.5.3 单位状态和载荷状态可以取得不一致 80
2.6 秩力法 86
练习题 89

第3章 位移法 95

3.1 引言 95
3.1.1 应用最小势能原理来研究问题 95
3.1.2 位移法 97
3.1.3 矩阵位移法 98
3.1.4 直接刚度法 100
3.2 元件（局部坐标）的刚度矩阵 107
3.2.1 位移变换和力的变换矩阵 107
3.2.2 梁元件的刚度矩阵 108
3.2.3 扭杆刚度矩阵 110
3.2.4 复合受力状态的杆元件的刚度矩阵 110
3.2.5 变轴力杆的刚度矩阵 111
3.2.6 矩形受剪板的刚度矩阵（用于矩阵位移法） 113
3.2.7 梯形板的刚度矩阵（用于直接刚度法） 113
3.3 坐标变换 115
3.3.1 等轴力杆的坐标变换 115
3.3.2 平面梁元素的坐标变换 117
3.3.3 板-杆结构元件的坐标变换 118
3.4 总体刚度矩阵的形成 120
3.4.1 桁架问题 120
3.4.2 刚架问题 124
3.4.3 板-杆结构问题 133
3.5 有限元素法的基本概念 139
3.5.1 从 Ritz 法到有限元法 140
3.5.2 平面应力和平面应变问题的有限元素法 143

练习题 …… 152

第 4 章 工程梁理论 …… 154

4.1 引言 …… 154
4.1.1 基本假设 …… 154
4.1.2 坐标系的选择 …… 156
4.2 正应力的计算 …… 157
4.2.1 计算正应力的一般方法 …… 157
4.2.2 计算组合壳体剖面正应力的折算系数法 …… 158
4.2.3 工程梁中的热应力 …… 159
4.3 开剖面系统的弯曲剪流和弯心 …… 161
4.3.1 开剖面系统的弯曲剪流 …… 161
4.3.2 开剖面系统的弯心 …… 165
4.4 单闭剖面的剪流和刚心 …… 168
4.4.1 在扭矩 M_z 作用下单闭剖面的剪流 …… 168
4.4.2 Q_y 作用下单闭剖面的剪流 …… 169
4.4.3 单闭剖面的刚心 …… 170
4.5 多闭剖面的剪流与刚心 …… 175
4.5.1 静不定度的判定 …… 175
4.5.2 确定闭剖面剪流的几种思路（以三闭室剖面为例） …… 175
4.5.3 多闭剖面的剪流 …… 176
4.5.4 多闭剖面的刚心 …… 179
4.5.5 多闭剖面剪流及刚心的近似计算 …… 182
4.6 隔膜计算 …… 185
4.6.1 引言 …… 185
4.6.2 加强框的计算 …… 185
4.7 框中的热应力 …… 188
4.8 限制扭转的概念 …… 193
4.8.1 引言 …… 193
4.8.2 开剖面系统的限制扭转的一般情况 …… 194
4.9 闭剖面结构的限制扭转 …… 199
4.10 加筋薄壁板的参与（剪滞）问题 …… 202
练习题 …… 204

第 5 章 板壳稳定 …… 208

5.1 引言 …… 208
5.2 弹性薄板的近似理论 …… 209
5.2.1 弹性薄板的控制方程 …… 209

5.2.2 垂直于板面的荷载及在板平面内有张力或压力共同作用的板的弯曲的微分方程 …… 213
5.2.3 板的边界条件 …… 215
5.2.4 板弯曲的最小势能原理 …… 216
5.2.5 由变分法来决定板弯曲面的微分方程及其边界条件 …… 217
5. 3 板的稳定 …… 220
5.3.1 引言 …… 220
5.3.2 矩形板的临界应力 …… 222
5.3.3 超过比例极限以后板的稳定性 …… 239
5.3.4 薄壁杆件的稳定性 …… 231
5.3.5 加强板失去稳定性后的受力分析 …… 234
5.3.6 正交各向异性板的稳定性 …… 239
5.3.7 薄壁梁的腹板由于剪切而失去稳定性后的应力分析 …… 241
5. 4 薄板的热皱损 …… 244
5.4.1 问题的提出 …… 244
5.4.2 初步分析 …… 245
5.4.3 临界载荷的计算公式 …… 246
5. 5 圆柱形壳在均匀轴向压缩下的对称屈曲 …… 247
练习题 …… 250
参考文献 …… 253

绪 论

1. 飞行器结构力学在力学中的地位

我们知道，研究物质运动的普遍规律的一门科学是物理学，力学作为物理学的一个分支，它是研究物体的机械运动的普遍规律的一门科学。用不甚完全的话说，力学可以分为质点力学、刚体力学（理论力学）和连续介质力学。连续介质力学又分为流体力学和固体力学，固体力学又可分为弹性力学和塑性力学。材料力学则是弹性力学和塑性力学的近似理论，它在工程中得到方便的应用。

结构力学在力学中的地位是什么呢？我们认为，结构力学属于应用力学，设计和制造某种结构需要应用哪些力学知识，便可将之归入相应的结构力学的范畴。正因为如此，不同的结构有其不同的结构力学，例如在建筑结构的设计和施工中，主要涉及杆系，因此，杆系设计和施工中所需要的力学知识便构成建筑结构力学，其主要内容是研究杆系结构的强度、刚度和稳定性。船舶结构的设计和制造中，主要涉及开口薄壁杆件，因此，开口薄壁杆件的弯曲和扭转便构成船舶结构力学的主要内容。以上两种结构力学的内容是相当丰富的，但因为不是我们的研究对象，不做详细阐述。飞行器结构是薄壁结构，薄壁结构力学构成飞行器结构力学的主要内容。

2. 飞行器结构的受力模型

这里指出，飞行器结构力学中的“结构”不是真实的结构，而是将真实结构经忽略次要因素、保留主要特性简化出的受力模型。由于简化的方式不同，得到的受力模型也不同。例如，杆板结构受力模型是将实际飞行器结构简化为由受剪板和变轴力杆构成的平（曲）面壁板和空间盒段。工程梁受力模型是将实际飞行器结构简化为一个工程梁来进行研究，比如，将机翼视为支持在机身上的梁，将机身视为支持在机翼上的梁，也可以将机身视为支持在机翼与尾翼上的梁。

3. 飞行器结构力学中的两类基本量、三类基本关系

在飞行器结构力学中存在两类基本量——力类量和位移类量；飞行器结构力学中的三类基本关系——力类量之间的平衡关系，位移类量之间的协调关系，力类量和位移类

量之间的物理关系（物理关系又称本构关系）。力类量和位移类量之间的关系，可以表示为两种互逆的形式：$P=K\Delta$ 和 $\Delta=FP$。其中，P 为广义力，Δ 为广义位移，K 为刚度系数，它表示单位位移引起的力，F 为柔度系数，它表示单位力引起的位移。

在求解力学问题时，一般来说，需要具备三类基本条件，方可求得力学问题的惟一的解，这被称为力学的惟一性定理。静定结构仅用平衡条件便可求解，这是一种特例。

在飞行器结构力学中的力指的是广义力，广义力可以是力，可以是力矩，也可以是其他与力有关的量；类似的，广义位移可以是线位移，可以是角位移，也可以是其他与位移有关的量；但是，广义力与其相应的广义位移的乘积的量纲必为功。

4. 飞行器结构力学的主要内容

飞行器结构力学的内容是相当丰富的，并且，随着航空航天科学技术的发展变得越来越丰富。如果要全面反映飞行器结构力学的面貌，将能写成一部巨著。本书作者的能力和精力都不能实现这一点。以飞行器的某种典型结构为对象，着重说明飞行器结构力学的基本原理和方法则是一种可行的方案。按照这种思想，本书的基本内容如下：第一章，能量原理。这里有两条线索。一条线索为：虚功原理，最小势能原理，Castigliano 第一定理，单位位移法，力的互等定理，它们是位移法的理论基础。另一条线索为：余虚功原理，最小余能原理，Castigliano 第二定理，单位载荷法，位移互等定理，它们是力法的理论基础。第二章，力法（又称柔度法）。该章主要以杆板结构（兼顾桁架和刚架结构）为对象来研究力法基本原理，内容包括结构的组成和静不定度的判定，静定结构的内力和位移计算，元件的柔度特性，力法原理，矩阵力法，秩力法。第三章，位移法（又称刚度法）。首先，用一个简单的典型实例来说明一般位移法和直接刚度法的基本原理，然后研究直接刚度法的理论和应用，元件的刚度矩阵，坐标变换，总体刚度矩阵的形成。考虑到飞行器结构力学是有限元素法的策源地，该章的最后，给出有限元素法的基本原理。第四章，工程梁理论。主要内容有：正应力的计算，梁中的热应力，开剖面系统的弯曲剪流和弯心计算，单闭剖面的剪流和刚心的计算，多闭剖面的剪流和刚心的计算，隔膜计算，隔框的热应力，限制扭转和参与问题。第五章，板壳稳定。内容主要包括：弹性薄板的近似理论，板的弹塑性稳定性，薄壁杆件的总体失稳和局部失稳，加劲板的稳定特性，板的热皱损，柱壳的屈曲。

5. 飞行器结构力学的特点

概括起来，本书作为飞行器结构力学主要有如下特点：

（1）以能量原理为基础是飞行器结构力学的显著特点，书中不仅系统的研究了以力法和位移为线索的能量原理，而且，探讨了一些有关飞行器结构力学的论著中对能量原理的不同的提法。这便使得力法和位移法的研究建立在更加严格的理论基础上。同时，

能量原理作为有限元素法和其它近似计算方法的理论基础，更能体现飞行器结构力学的基础地位。

（2）电子计算机的广泛应用是时代的特点，为了适应时代的要求，飞行器结构力学的研究中，把矩阵分析方法作为重要的研究和计算方法。这是因为，矩阵的书写形式便于编制计算机程序，进而形成飞行器结构力学的各种计算软件。

（3）以航天器为例，飞行器在其飞行过程中要经受极为恶劣的热环境，其温度可以从摄氏零下 200 多度变至数千度以上。虽然热控技术的发展可以大大减轻热环境对飞行器结构强度的影响，但是，这仍然是一个不可忽视的问题。适应飞行器近代发展的需要，本书首次把有关热应力的内容纳入飞行器结构力学中，并且推导出适应于飞行器结构计算的热应力的计算形式。

6. 飞行器结构力学的的基本假设

如上所述，飞行器结构力学中，存在不同的计算模型，而各类计算模型都是建立在各自不同的基本假设上的。因此，有关的基本假设应当在各个章节中分别加以研究。这里，强调一下基本假设的重要性。

飞行器结构力学中，有一个带有一般性的基本假设，这就是小位移假设。更确切地说，飞行器结构力学的研究，一般限制在线性弹性范围内。正是因为不加说明的应用这个基本假设，使得在飞行器结构力学中可以应用叠加原理。但是，在飞行器结构力学的某些内容中，有时可能突破这个基本假设，到时将加以特别说明。

第 1 章　能量原理

1.1　引言

能量原理属于变分学,在变分学中存在两类互逆的问题：一类是将泛函的驻（极）值问题化为微分方程的边（初）值问题（正问题）；另一类是将微分方程的边（初）值问题化为泛函的驻（极）值问题（逆问题）。Ritz 方法的出现，电子计算机的广泛应用，使变分学中的逆问题越来越得到人们的重视。适应这种发展趋势，应用本书作者所倡导的变积方法，从弹性力学的基本方程出发，仔细推导了最小势能原理和最小余能原理。在此基础上，又推导了由最小势能原理和最小余能原理派生的变分原理，并举例说明了这些变分原理的初步应用。变分原理作为本书的理论基础，在后续章节中将有更深入的应用。

考虑到本书的某些读者可能没有系统研究过变分学，作者力图做到使具有一般高等数学基础的人都能看懂本书，为此特做如下通俗而又不太严格的说明：在变分学中，基本上存在三级变量——自变量、可变函数和泛函。简单函数和泛函的区别在于：简单函数是自变量的函数，而泛函是可变函数的函数，独立自主地变化的可变函数称为自变函数。从不独立的可变函数也是自变函数的函数的角度看问题，不独立的可变函数也是泛函，我们可称其为子泛函。研究表明，变分和微分一样服从无穷小量分析，它们的运算法则基本相同。因此，当需要进行变分运算时，可以按照微分运算的法则进行，但要注意微分的符号为“d”，而变分符号为“δ”，微分是以自变量为基本变量，而变分是以可变函数为基本变量。

线性弹性力学基本方程为：

平衡条件

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\dfrac{\partial\tau_{xy}}{\partial y}+\dfrac{\partial\tau_{xz}}{\partial z}+X=0\\[2mm]\dfrac{\partial\tau_{yx}}{\partial x}+\dfrac{\partial\sigma_y}{\partial y}+\dfrac{\partial\tau_{yz}}{\partial z}+Y=0\\[2mm]\dfrac{\partial\tau_{zx}}{\partial x}+\dfrac{\partial\tau_{zy}}{\partial y}+\dfrac{\partial\sigma_z}{\partial z}+Z=0\end{cases}\tag{1.1-1}$$

（这里应当注意剪应力互等）

$$\begin{cases}\tau_{xy}=\tau_{yx}\\ \tau_{yz}=\tau_{zy}\\ \tau_{zx}=\tau_{xz}\end{cases}$$

力学边界条件

$$\begin{cases}\sigma_x l+\tau_{xy}m+\tau_{xz}n-\overline{X}=0\\ \tau_{yx}l+\sigma_y m+\tau_{yz}n-\overline{Y}=0\\ \tau_{zx}l+\tau_{zy}m+\sigma_z n-\overline{Z}=0\end{cases} \tag{1.1-2}$$

几何条件

$$\begin{cases}\varepsilon_x-\dfrac{\partial u}{\partial x}=0\\ \varepsilon_y-\dfrac{\partial v}{\partial y}=0\\ \varepsilon_z-\dfrac{\partial w}{\partial z}=0\\ \gamma_{xy}-(\dfrac{\partial v}{\partial x}+\dfrac{\partial u}{\partial y})=0\\ \gamma_{yz}-(\dfrac{\partial w}{\partial y}+\dfrac{\partial v}{\partial z})=0\\ \gamma_{zx}-(\dfrac{\partial u}{\partial z}+\dfrac{\partial w}{\partial x})=0\end{cases} \tag{1.1-3}$$

位移边界条件

$$\begin{cases}u-\overline{u}=0\\ v-\overline{v}=0\\ w-\overline{w}=0\end{cases} \tag{1.1-4}$$

本构关系

$$\begin{Bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \sigma_z\\ \tau_{xy}\\ \tau_{yz}\\ \tau_{zx}\end{Bmatrix}-\begin{bmatrix}a_{11} & \cdots & a_{16}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{61} & \cdots & a_{66}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\varepsilon_x\\ \varepsilon_y\\ \varepsilon_z\\ \gamma_{xy}\\ \gamma_{yz}\\ \gamma_{zx}\end{Bmatrix}=0 \tag{1.1-5}$$

对各向同性体，为

$$
\begin{cases}
\sigma_x - 2G[\varepsilon_x + \dfrac{\upsilon}{1-2\upsilon}(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z)] = 0 \\
\sigma_y - 2G[\varepsilon_y + \dfrac{\upsilon}{1-2\upsilon}(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z)] = 0 \\
\sigma_z - 2G[\varepsilon_z + \dfrac{\upsilon}{1-2\upsilon}(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z)] = 0 \\
\tau_{xy} - G\gamma_{xy} = 0 \\
\tau_{yz} - G\gamma_{yz} = 0 \\
\tau_{zx} - G\gamma_{zx} = 0
\end{cases}
\tag{1.1-5′}
$$

本构关系也可以表示为另一种形式

$$
\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{16} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{61} & \cdots & b_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{Bmatrix} = 0
\tag{1.1-6}
$$

对各向同性体，为

$$
\begin{cases}
\varepsilon_x - \dfrac{1}{E}[\sigma_x - \upsilon(\sigma_y + \sigma_z)] = 0 \\
\varepsilon_y - \dfrac{1}{E}[\sigma_y - \upsilon(\sigma_z + \sigma_x)] = 0 \\
\varepsilon_z - \dfrac{1}{E}[\sigma_z - \upsilon(\sigma_x + \sigma_y)] = 0 \\
\gamma_{xy} - \dfrac{\tau_{xy}}{G} = 0 \\
\gamma_{yz} - \dfrac{\tau_{yz}}{G} = 0 \\
\gamma_{zx} - \dfrac{\tau_{zx}}{G} = 0
\end{cases}
\tag{1.1-6′}
$$

式中，E 为弹性模量；G 为剪切模量；υ 为 Poissen 系数。

1.2 虚功原理和最小势能原理

根据广义力和广义位移之间的对应关系，将（1.1-1）、（1.1-2）式乘上相应的虚位移——任意的、微小的、约束所容许的位移，然后积分，并代数相加，可得

$$
\begin{aligned}
&-\iiint_V[(\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{xz}}{\partial z}+X)\delta u+(\frac{\partial\tau_{yx}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_y}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{yz}}{\partial z}+Y)\delta v \\
&+(\frac{\partial\tau_{zx}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{zy}}{\partial y}+\frac{\partial\sigma_z}{\partial z}+Z)\delta w]\mathrm{d}V+\iint_{S_\sigma}[(\sigma_x l+\tau_{xy}m+\tau_{xz}n-\bar{X})\delta u \\
&+(\tau_{yx}l+\sigma_y m+\tau_{yz}n-\bar{Y})\delta v+(\tau_{zx}l+\tau_{zy}m+\sigma_z n-\bar{Z})\delta w]\mathrm{d}S=0
\end{aligned} \tag{1.2-1}
$$

应用 Green 定理

$$-\iiint_V\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}\delta u\mathrm{d}V=-\iint_{S_\sigma+S_u}\sigma_x l\delta u\mathrm{d}S+\iiint_V\sigma_x\frac{\partial\delta u}{\partial x}\mathrm{d}V \tag{1.2-2a}$$

$$-\iiint_V\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y}\delta u\mathrm{d}V=-\iint_{S_\sigma+S_u}\tau_{xy}m\delta u\mathrm{d}S+\iiint_V\tau_{xy}\frac{\partial\delta u}{\partial y}\mathrm{d}V \tag{1.2-2b}$$

$$\vdots$$

$$-\iiint_V\frac{\partial\sigma_z}{\partial z}\delta w\mathrm{d}V=-\iint_{S_\sigma+S_u}\sigma_z n\delta w\mathrm{d}S+\iiint_V\sigma_z\frac{\partial\delta w}{\partial z}\mathrm{d}V \tag{1.2-2i}$$

将（1.2-2a）～（1.2-2i）代入（1.2-1），可得

$$
\begin{aligned}
&\iiint_V[(\sigma_x\frac{\partial\delta u}{\partial x}+\tau_{xy}\frac{\partial\delta u}{\partial y}+\tau_{xz}\frac{\partial\delta u}{\partial z}-X\delta u)+(\tau_{yx}\frac{\partial\delta v}{\partial x}+\sigma_y\frac{\partial\delta v}{\partial y} \\
&+\tau_{yz}\frac{\partial\delta v}{\partial z}-Y\delta v)+(\tau_{zx}\frac{\partial\delta w}{\partial x}+\tau_{zy}\frac{\partial\delta w}{\partial y}+\sigma_z\frac{\partial\delta w}{\partial z}-Z\delta w)]\mathrm{d}V \\
&-\iint_{S_u}[(\sigma_x l\delta u+\tau_{xy}m\delta u+\tau_{xz}n\delta u)+(\tau_{yx}l\delta v+\sigma_y m\delta v+\tau_{yz}n\delta v) \\
&+(\tau_{zx}l\delta w+\tau_{zy}m\delta w+\sigma_z n\delta w)]\mathrm{d}S-\iint_{S_\sigma}(\bar{X}\delta u+\bar{Y}\delta v+\bar{Z}\delta w)\mathrm{d}S=0
\end{aligned} \tag{1.2-3}
$$

将（1.1-3）、（1.1-4）式代入（1.2-3）式，可得

$$\iiint\limits_V [\sigma_x\delta\varepsilon_x+\sigma_y\delta\varepsilon_y+\sigma_z\delta\varepsilon_z+\tau_{xy}\delta\gamma_{xy}+\tau_{yz}\delta\gamma_{yz}+\tau_{zx}\delta\gamma_{zx}$$
$$-(X\delta u+Y\delta v+Z\delta w)]\mathrm{d}V-\iint\limits_{S_\sigma}(\bar{X}\delta u+\bar{Y}\delta v+\bar{Z}\delta w)\mathrm{d}S=0 \tag{1.2-4}$$

这就是虚功原理的表达式，它表明：当弹性体在外力作用下处于平衡状态时，对任意为约束所容许的虚位移，外力虚功等于内力虚功。这里我们指出，无论材料本构关系如何，虚功原理都成立。

将（1.2-4）式写为矩阵形式，则有

$$\iiint\limits_V [\{\sigma\}^T\{\delta\varepsilon\}-\{F\}^T\{\delta\varDelta\}]\mathrm{d}V-\iint\limits_{S_\sigma}\{P\}^T\{\delta\varDelta\}\mathrm{d}S=0 \tag{1.2-4′}$$

式中 $\{\sigma\}$——应力列阵；$\{\delta\varepsilon\}$——应变的变分列阵；$\{F\}$——体力列阵；$\{\delta\varDelta\}$——位移的变分列阵；$\{P\}$——面力列阵；用T表示矩阵的转置。

将本构关系（1.1-5）代入（1.2-4′），可得

$$\iiint\limits_V [\{\varepsilon\}^T[a]\{\delta\varepsilon\}-\{F\}^T\{\delta\varDelta\}]\mathrm{d}V-\iint\limits_{S_\sigma}\{P\}^T\{\delta\varDelta\}\mathrm{d}S=0 \tag{1.2-5}$$

进而可得

$$\delta\iiint\limits_V [\frac{1}{2}\{\varepsilon\}^T[a]\{\varepsilon\}-\{F\}^T\{\varDelta\}]\mathrm{d}V-\delta\iint\limits_{S_\sigma}\{P\}^T\{\varDelta\}\mathrm{d}S=0 \tag{1.2-6}$$

上式可以处理为一个泛函的驻值问题

$$\varPi=\iiint\limits_V [\frac{1}{2}\{\varepsilon\}^T[a]\{\varepsilon\}-\{F\}^T\{\varDelta\}]\mathrm{d}V-\iint\limits_{S_\sigma}\{P\}^T\{\varDelta\}\mathrm{d}S \tag{1.2-7}$$

其先决条件为（1.1-3）、（1.1-4）式

泛函（1.2-7）和其先决条件（1.1-3）、（1.1-4）一起构成一个变分原理，这就是最小势能原理。有时将 $U=\iiint\limits_V\frac{1}{2}\{\varepsilon\}^T[a]\{\varepsilon\}\mathrm{d}V$ 称为内力势能或者应变能，而将 $V=-\iiint\limits_V\{F\}^T\{\varDelta\}]\mathrm{d}V-\iint\limits_{S_\sigma}\{P\}^T\{\varDelta\}\mathrm{d}S$ 称为外力势能，则 $\varPi=U+V$ 称为总势能。

这里我们指出，$\delta\varPi=0$ 是总势能取驻值的充分必要条件，但是，仅是总势能取极值（最小值）的必要条件。

例题 1.1 为了说明最小势能原理及其应用，我们来研究如图 1.1 所示的桁架。桁架在结点 1 处受水平方向和垂直方向的集中力 P_x 和 P_y 的作用，用最小势能原理求结构的水平和垂直位移，并求结构的内力。

关于桁架的应变能和外力势能的表达式的说明：

桁架是由杆件铰接而成的结构，桁架的应变能是各个杆的应变能的和。等轴力杆元件的应变能表示为

$$U_e = \frac{1}{2}E\varepsilon^2 Al = \frac{1}{2}E\left(\frac{\Delta l}{l}\right)^2 Al = \frac{1}{2}\bullet\frac{EA}{l}\Delta l^2$$

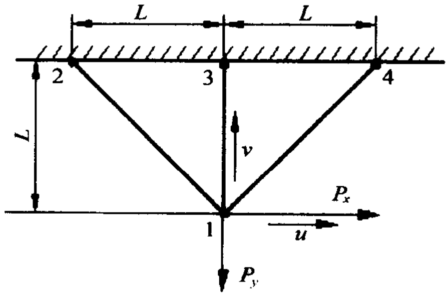


图 1.1

对于该题，桁架各杆的杆长及杆的伸长量如下表所示：

表 1.1

杆　号	杆　长	伸 长 量
1-2 杆	$l_{1-2} = \sqrt{2}L$	$\Delta l_{1-2} = \sqrt{2}/[2(u-v)]$
1-3 杆	$l_{1-3} = L$	$\Delta l_{1-3} = -v$
1-4 杆	$l_{1-4} = \sqrt{2}L$	$\Delta l_{1-4} = \sqrt{2}/[2(-u-v)]$

桁架的应变能为

$$U = \sum U_e = \frac{EA}{4L}[\sqrt{2}u^2 + (2+\sqrt{2})v^2]$$

式中　A 为杆的截面面积；　u 为结点 1 的 x 方向的位移；v 为结点 1 的 y 方向的位移；E 为弹性模量。

因为 P_x 和 u 的正方向相同，故其外力势能为 $-P_x u$；因为 P_y 和 v 的正方向不相同，故其外力势能为 $P_y v$。结构的总的外力势能为

$$V = -P_x u + P_y v$$

解：系统的总势能为

$$\Pi = \frac{EA}{4L}[\sqrt{2}u^2 + (2+\sqrt{2})v^2] - P_x u + P_y v$$

将 Π 变分，并令 $\delta\Pi = 0$（总势能取最小值的必要条件）

$$\delta\Pi = (\frac{EA}{4L}2\sqrt{2}u - P_x)\delta u + [\frac{EA}{4L}2(2+\sqrt{2})v + P_y]\delta v = 0$$

由于 δu 和 δv 的任意性，由上式可得系统的平衡方程组

$$\begin{cases} \dfrac{EA}{2L}\sqrt{2}u - P_x = 0 \\ \dfrac{EA}{2L}(2+\sqrt{2})v + P_y = 0 \end{cases}$$

由上式解得