



联合国教科文组织
数学教育研究丛书

15

几何教学

Robert Morris 编



人民教育出版社

数学教育研究

几 何 教 学



Robert Morris 编
人民教育出版社数学室 译



人民教育出版社

几 何 教 学

罗伯特·莫里斯 编

人民教育出版社数学室 译

*

人民教育出版社出版

新华书店总店科技发行所发行

北京顺义冠中印刷厂印装

*

开本 $850 \times 1168 \frac{1}{32}$ 印张8.375 字数157,000
1988年4月第1版 1988年4月第1次印刷

印数 1—2,700

ISBN 7-107-10158-7
C·1029 定价1.20元

说 明

《数学教育研究》是联合国教科文组织的一套数学教育论文专辑。本书文章选自它的第5卷，专门探讨几何教学。它展现了世界各地几何教学的现状，并预示了未来的趋势。但须指出，各篇文章所表述的观点只是作者的见解，并不完全代表联合国教科文组织或原书编者的看法。

本书由人民教育出版社（中国，北京）数学室翻译，参加翻译工作的有曾宪源、饶汉昌、高存明、袁明德、刘意竹、杨刚、王凝、薛彬。由吕学礼校译，薛彬任责任编辑。

译 者

1987年11月

目 录

三个阿拉伯国家在几何教学方面的发展	
.....Hicham Bannout Mansour Hussain (1)	
加拿大和美国13岁儿童的几何	
..... David F. Robitaille Kenneth J. Travers (10)	
拉丁美洲的几何教学..... Emilio Lluís (18)	
东南亚地区的几何.....Lee Peng—yee Lim Chong—keang (30)	
变换几何回顾..... D. K. Sinha (33)	
塞拉里昂中学水平的几何..... Adonis F. Labor (37)	
小学几何的可能与需要..... Jan de Lange Jzn (45)	
10—14岁学生几何教学的几个问题	
.....Milan Koman Frantisek Kurina Marie Ticha (68)	
苏联的几何教学	
.....L. Yu. Chernysheva V.V. Firsov S.A. Teljakovskii (86)	
几何教学的危机.....G. Glaeser (98)	
英国几何教学的分析.....D. S. Fielker (116)	
什么是学习几何的障碍.....Alan J. Bishop (135)	
师范教育与几何教学	
.....Bruce E. Meserve Dorothy T. Meserve (156)	
计算机辅助的中学平面几何课程..... Max S. Bell (171)	
作者传略	(192)

Hicham Bannout

Mansour Hussain

三个阿拉伯国家 在几何教学方面的发展

在这篇简短的报告中,我们要指出三个阿拉伯国家(科威特,突尼斯,黎巴嫩)在几何教学方面发展的主要趋势。我们研究这些国家近几十年来在理科方面学校课程的变化,和伴随着这些变化的教育思想以及一些教学实践情况。

第一部分

在60年代改革运动之前的学校课程

在这部分,我们考查在60年代的国际改革运动之前的情况。对于各学科所用的学时数的调查(联合国教科文组织,1969)表明,数学教学的地位在阿拉伯语之后居于第二位,并且与发达国家中数学的重要性相一致。教学内容和教学方法可以说是古典的和传统的。这是一种不能发展学生自己去探索数学的能力的教育形式,因为它只涉及问题的机械解决而不促进数学基本概念的真正理解或对所用推理的正确掌握。各国对于几何教学的重视程度有所不同。

在科威特以及海湾国家,一般地对几何教学并不是非常重

视。主要的数学科目是代数。在小学(四年制)不学几何,在中间学校(四年制)对教学几何兴趣不大。在开始上中学(四年制)时,讲授一些古典几何的概念(直线,三角形和圆),有时是不太严密的。在第一年,每周六节数学课中的三节课专用于几何教学,在第二年,每周五节中的二节上几何。然而,这些课似乎是在浪费学生的时间,其教学的效果是令人失望的。在第三年,每周七节课中的三节几何课不能满足学习一些立体几何的知识(平面和直线),以及一些解析几何的初步知识的需要。在最后一年,每周八节课中的三节课用于学习三角,立体几何(某些物体的体积)和解析几何(直线和圆的方程,线段的长度)。

在突尼斯有一种观点,就是“几何学仍然是培养学生的探究精神和直觉思维的最好的手段”(突尼斯,1959)。然而,在经验基础上得出的结论是,这样做是困难的。代数和解析被认为是“现代数学研究的基本组成部分,并且更易于被大多数学生掌握”(突尼斯,1959)。相应地,我们看到“已经证明,削弱几何的重要性,但又不忽视它的教育价值,同时把重点放在代数和解析上是可取的”(突尼斯,1959)。

尽管有上面的评论,我们还是发现官方的学校课程(突尼斯,1959)把几何放在一个重要的位置上——内容基本上是古典几何概念。在“实际工作”的标题下,学校课程规定实际物体的操作要以能得出定义,“发现某些事实或实体间的关系,检验结论”(突尼斯,1959),并且根据实际情况说明简单的几何图式为目的。这种处理方法有利于以真实空间的实践和概念组织为基础的教育形式。

在中学教育(六年小学教育之后的六年)的第一年,度量方面的概念是学校课程的主要内容(长度、面积、体积、角度、圆弧、重量和时间的度量)。第二年的学校课程开始介绍欧几里得几何学的基本概念(直线,角,三角形,四边形,圆形,定义和性质)。第三年,学生就要学习平面几何(相似三角形,直角三角形中的度量关系和

三角关系,正多边形和圆的性质)。在立体几何中,学校课程包括了空间平面和直线的概念。第四年的教学大纲有四个主要内容——向量(向量和,数量积),平面几何(三角形中的度量关系和三角关系,点对圆的幂,几何轨迹和调和比)以及立体几何(平曲面和直线)。第五年的学校课程涉及到点变换,立体几何的剩余知识(射影,三面角,各种几何体以及这些几何体的表面积和体积),解析几何(圆的方程和简单的几何轨迹)。第六年,学生学习极点、极线(极面)的概念,点变换和圆锥曲线。在向量和解析几何部分,内容包括向量积,直线、圆、平面和球的方程,以及极坐标。

在黎巴嫩,几何课程总的来说与上面讲的差不多,只有一两点不同。例如,在中间学校(五年小学教育之后的四年)不学立体几何。这些内容完全放到中学(三年制)的第二年。向量几何和解析几何的一部分(圆锥曲线的方程)在最后一年讲完。一些画法几何的初步知识包括在最后两年的学校课程中。

实际上,在数学教学中几何是被放在一个特殊的地位上,而且是一个重要的角色。当时的教育理论把几何看作数学的最重要的分支之一。真正的数学推理寓于正确的几何证明中所固有的演绎的和逻辑的过程中。代数是适合于每个人学习的领域,但几何只适合于有数学才能的人。所研究的几何采取一种空间的概念的和局部组织的形式。采取直接联系实际生活经验的方法进行几何教学。并不试图把数学对象和其他对象加以区别。几何公式(定义和定理)是独立于物理模型发展还是用来描述在数学过程之前已有的实物和关系,这一点还不清楚。

第二部分

60年代改革运动中的学校课程

在60年代改革运动中,联合国教科文组织与一些阿拉伯国家

的全国性小组合作,共同起草了“中学数学教学改革计划”(15岁—18岁)。为了描述几何在这个计划中的地位,我们引用下面一段关于Bourbaki小组的工作的叙述:“这个Bourbaki小组研究的数学体系叫做当代数学或现代数学。”

“当代数学,从最简单的算术到高度抽象的代数、几何或分析,可以简单地说是研究一对序偶(集合,结构),以及所有由这对序偶引出的活动。例如……几何是研究空间的,空间是一个由点组成的集合,有线和平面作为它的重要子集。空间结构是用被叫做公理的关系来描述的,象介于……之间、平行和垂直。活动包括象旋转、反射、平移和伸缩这样的变换以及等距和相似的关系”(联合国教科文组织,1969)。

于是几何,象其他数学分支一样,在代数结构领域中建立起来了,其内容是用不同于传统几何的方式来组织的。科威特是采用联合国教科文组织项目的阿拉伯国家之一。1970年,中学二年级的课程开始进行试验,它的几何部分包括仿射几何和变换几何。注意到学生在学习几何概念中遇到一些困难。这些困难主要是由于教科文组织提供的课本中题材的展开方式,以及教师不够熟悉新概念所引起的。1972年,实施计划的第二部分,内容包括向量几何。课程设计评价委员会要求对计划进行全面的修订,特别是第一次包括在学校课程中的几何内容。这样做的结果是在1973年得到发展的三种教育水平的课程(小学,中间学校,中学)。在这个课程中,从小学一年级开始的几何教学,使用了集合的语言,并包括了关于集合运算。小学的教学活动包括一些基本概念(点,直线,角,曲线,平面和空间几何体,面积和体积的度量)。在中间学校,这些概念讲得更充分,还有其他一些知识。在课程中第一次介绍了变换,并应用它学习其他的概念。在学习解析几何初步知识的同时,也学习了一些向量几何。在中学头两年的教育中,学习变换几何。在第三年,学生学习立体几何和空间向量几何。在第四

年,没有几何内容。我们注意到,仿射几何被排除在课程内容之外,并且三角形和圆不再在第一年学习。

在突尼斯,可以看到中学教育的前几年有一个明显的向抽象化发展的趋势。公理化的方法用于以结构的方式进行几何教学。由于抽象化,导致几何完全地与物质世界脱离了。这种课程的指导思想对“传统上描述成实际的、具体的概念”提出疑问(突尼斯,1970)。认识到学生需要有一个参考点来认清概念,但存在争议的是,这个参考点并不必须是日常生活环境。

对“可以把一根绳子或一把剪刀用于中学的平面、直线和角的概念教育”究竟能起什么作用提出了疑问(突尼斯,1970)。象这些东西,据说在以前的教学中用过。建议所用的方法是通过公理构造来介绍几何,它的基本要素是集合——所谓的“点集”。所包含的是一种“游戏”,其中的玩具是由定义给出的点和点集。游戏的规则叫做“公理”。游戏的玩法是用定义和公理去构造数学家叫做定理的东西(Fayala et al.)。我们注意到,前四年的课程的各个部分是“相互紧密依赖和作为一个整体来处理的”(突尼斯,1970)。在课程中有关“集合与关系”的栏目下得到的概念被用于学习课程的所有其他部分,特别是几何,它为集合的应用提供了动机和天地。于是我们注意到,在学习几何概念时,有变换(定义为双射)的一个基本应用,有时还采用了代数的处理方法。在“几何与度量导言”的标题下,我们发现一些基本的概念(平滑表面,直线,平行和垂直直线,角的平分线,三角形,矩形,平行四边形和圆)以及线段和表面的实际测量。书中提到要恰当引入几何,应强调所学图形的基本拓扑性质(边界,内部,外部)和度量性质。在第二年,包括在同一标题下有对空间进行描述性的学习,垂直直线与平面,几何体以及几何体的面积与体积。还有一个标题“介绍笛卡儿坐标中的平移和对称”,在这个标题下,建议用坐标系向学生介绍用代数和几何过程来构造变换,这两个过程是互为补充的。这个

阶段的教学目标是训练学生认清“熟悉的几何对象的特征，定义新的几何对象，并对它们进行抽象概括，以便提炼出数学的本质”（突尼斯，1970）。“教师可以利用一切机会，从经验的水平提高到解释的水平，如有可能，再上升到发现的水平”（突尼斯，1970）。在第三年的课程中，我们遇到“平面的等距变换群的具体、直观的详解”和“等距变换的应用”。学生们学习轴对称和中心对称，它被定义为平面内的双射，并用以学习平面上所有的几何概念。总之，几何的内容是通过它的应用来讲授的。在第四年，课程包括域向量，向量，直线和平面的平行，直线上的或平面上的射影，泰勒定理，平移群和向量加法群，平面内直线的解析研究，两个向量的数量积以及三角形和圆中的度量关系。在第五年的课程中，几何被认为是使代数结构完美的媒介。这一部分课程（命名为“几何和R—模”）的目的是“使学生在第四年以后学习的简单的几何概念的基础上能够想象出向量空间的结构的想法”（突尼斯，1970）。坐标的概念使直线的性质的代数“描述”简单明确。我们也注意到，用同样的方法可以处理平面，避免引入度量；然后可以涉及一些其他课题，如直线，向量空间，线性应用，仿射应用和向量平面的伸缩群。在“平面度量几何”的标题下，我们看到了柯西——施瓦茨不等式，三角不等式和在一个标准正交参考平面内数量积的表达式。第六年，在“向量几何和仿射几何”的标题下包括，向量空间的基，线性映射的矩阵，二维和三维的仿射空间，以及平移；然后是数量积（二维和三维的R—模）和向量旋转群。在度量几何中包括两点间的距离，正交的投影，垂直平面和球。在第七年，课程包括：

（1）“仿射几何和欧几里得几何初步”，包括旧概念的发展和概念，如线性应用的加法和复合，线性群，位似向量，重心，欧氏向量空间的线性变换，仿射欧氏平面的等距变换和仿射空间两个向量的向量积。

（2）“进一步的欧氏平面几何”，包括向量射线的角的群，相似

群和圆锥曲线方程。

在黎巴嫩,集合的理论和代数结构对几何教学没有太大的影响。在中间学校,集合语言用于学习由传统几何派生出来的几何大纲,一般不改变它的结构。在去掉一些错误的概念和说明的同时,试图定义了其他一些概念,并且在第四年介绍了立体几何的初步知识。几何图形的作图,是以引入有关的概念为目的的,特别是在头两年。在中学第一年,学生学习向量和解析几何;在第二年继续学习这些内容,还用解析法学习圆锥曲线,用向量方法学习变换,而不用向量空间的概念。立体几何一般在第二年学习。从教育观点出发,我们可以发现一种趋势,就是除了有很少的一些胆怯的努力外,在定义新的术语时,一般都没有真正的正式尝试把数学对象和别的对象区分开。在学校用的教材中,数学的表达式与其他场合引出的表达式同时出现。最终,在数学教学中,几何与数学的其他分支有相同的地位。

第三部分

60年代改革运动以来的学校课程

在这个期间,我们发现国家教育中心逐渐在课程和学校教材制订过程中发挥越来越大的作用。对于在大学数学家影响下制订的旧的学校课程要求进行修改。1981年在一个由ALECSO主办的学术讨论会上,60年代的改革运动被指责为理论讲得太多,没有应用到其他科学领域中去,同时也不适应学生的能力。几何教学的重点放在严密的、规范的结构上,没有考虑从周围的世界中获得的经验。在一些国家中,几何教学的现代化曾经是在排除传统内容的一种执着意图下执行的。在当前的学校课程中可以看到一种趋势,就是对几何教学给以相当的重视,并且在使用结构时不忽视实物的帮助。看来这种趋势将来很可能继续发展下去。

在科威特,现行的中小学课程是对旧的课程内容修订的一个代表,表现为把重点放在几何图形的作图以及它们的性质的证明上。中学的头两年,学生学习解析几何,变换几何和欧氏几何(相似三角形,直角三角形中的度量关系等等)的概念。第三年,他们学习立体几何以及平面和空间向量几何。第四年不学几何。

在突尼斯,在与官方的课程有关的资料(突尼斯,1978和1982)中,最为关心的不再是集合和代数结构的概念,因此也就表明了占主导地位的教育思想的变化。总目的叙述仅仅是号召恢复数学教育在学生智力的发展和科学精神的培养上的作用。因此,一些在旧课程中没有的活动重新包括在要提出的概念之中,并且放在课程设置计划中。集合和结构在几何中仍占有一席之地,但我们也发现,与此同时几何教学中的传统思想又出现了。把重点放在实际活动上,利用从周围世界中得到的材料和图形来引出和巩固数学概念。在学习相关的概念时,把很大精力放在观察以及几何图形的作图上。公理化方法在中学第一年的教育中取消了,给学生介绍一些活动用以巩固他们的旧知识,帮助他描述几何图形,并把这些图形的结构的各个方面组织得很有条理。中学学校课程的内容(实际上与旧课程基本相同),有如下几个部分:“几何形状以及物理模型的研究引出的测量”(第一年);“介绍空间的实践研究”(第二年);“直线的几何”,“平面几何”(第三年);“欧氏平面”,“欧氏平面几何”(第四年)。第五年的课程包括下面几个课题:“线性代数和它的应用”,主要介绍关于 R -模的概念和线性应用,并有下列说明:“整个这一部分都试图说明图是很有用的,一方面是它们代表了数学模型赖以构造的自然空间,另一方面是因为它们给出了理论研究的演示图画。关于向量的表示和约定将特别地加以指出。”另外两部分是“平面几何”和“立体几何”。现行的学校课程大部分是旧课程中内容的重新排列,目的是在几何教育形式和结构教育形式间建立一种平衡。在几何教育形式中有时用物理现实

代替数学思想，在结构教育形式中较少注意利用物理媒介可能提供的直观思想。在教材中，一个概念的提出，是以一连串实践活动为基础的。集合的语言也用于解释概念，但还是可以从中看出已经进行的实践活动的痕迹。

在黎巴嫩，拟议中的（但还未实行）高中学校教育改革计划出现一些明显的变化。课程的内容是以几个教学单元的形式安排的，反映了一种尝试，即统一学校数学的各个分支。与代数结构平行，第一年的学校课程包括几何的两个单元：第一单元学习仿射平面，之后是向量平面及某些应用（调和分割，重心，直线的方程）；第二单元学习欧氏平面（数量积，正交）。变换（平移，对称，旋转）也在这两个单元的结构中予以介绍。同样，规定在第二年顺序学习三种空间（仿射，向量和欧氏）。在第三年线性代数单元开始时，介绍实向量空间，同时在其他单元安排学习仿射空间和向量空间的解析几何，以及画法几何的知识。最后规定用分析的方法学习圆锥曲线和平面上的变换，重点是这些变换的群。从教育的立足点来看，数学教育在当前表现的一个趋势是介绍数学的对象和数学的语言，而不一定按照传统的对各个课题的分类方法来安排它们的内容。

结 束 语

在大学数学和国际改革运动的影响下，阿拉伯国家的几何教学经历了很大的变化。这些变化有时是根本性的，并且从一个国家到另一个国家各有所不同。对这种变化已经重新进行了评价，其目的是在传统几何教学和以代数结构为基础的几何教学之间建立平衡。几何教学要着手沿着这样的路线发展，同时正视每个国家的经验和它们的文化、科学以及教育情况。

David F. Robitaille

Kenneth J. Travers

加拿大和美国13岁儿童的几何

与许多国家的情况相反,美国和加拿大的教育管理是不集中的。在加拿大,每个省独立地管理它的学校系统。在美国,管理权属于州政府一级或地方学区一级。因此无论是在两个国家之间还是在每个国家内部,教育系统的结构和课程设置都存在着重要差异。然而尽管如此,在这两个国家中的数学课程却有着许多相似之处。几何课无疑也是如此。在这两个国家中,相同年级水平的几何课程有许多相同的课题。

在1980年至1982年期间,加拿大和美国的数学师生参加了第二次国际数学调查。调查是由国际教育成就评价协会(IEA)发起的。这次IEA调查有20个国家参加,主要集中在两个年龄段:13岁儿童(总体A)和中学最后一学年对数学进行专门学习的学生(总体B)。在加拿大,取不列颠哥伦比亚和安大略两个省的师生作为调查的样本代表,在美国使用全国性的样本。

国际调查中,数学课程的一个彻底的考查包含三个水平:计划课程、实际教学课程和学会课程。第一个水平,计划课程,是在课程指南、课程纲要、教学大纲以及在大范围内使用的教科书中描述的。第二个水平,实际教学课程,集中在课堂上由教师教学的整个课程。教师使用他们的业务职能,把课程指南和批准的教科书转化为课程计划。他们对课程的选择或模式的强调也许和这一

系统水平所计划的不完全一致。为了评价实际教学课程,要求教师完成一些专门为在调查方案中使用所研制的调查表。例如,在方案中的每一个测验项目,都要求教师明确指出,他们的学生是否已学过了他们需要正确回答的数学,这叫做“学习机会”的调查。教师同样还要负责提供一些具体数学课题中使用的教学方法和材料方面的详细信息。

第三个水平,学会课程,是学生已学会的课程。在国际调查中,学会课程借助于测试成绩来评价。这些调查,除了一些态度的尺度外,都实施于20个参加国的学生。

总体A水平的国际调查的结构要点,由五大部分构成:算术,代数,度量,几何与描述性统计。对总体B,几何内容限制在解析几何。在本文中,我们只讨论以美国和加拿大两个省参加IEA调查的师生样本为代表的北美初级中学或中间学校的几何课程。他们对IEA调查作出了贡献。

计划课程中的几何

与各个国家教学内容广泛一致的代数和算术相比,关于几何教学内容,至少在总体A的水平上,IEA国家很少一致。调查结果表明,几何内容虽存在一个公共的核心部分,但非常单薄,它几乎整个由平面图形的基本研究和坐标的应用组成。平面几何的另外一些课题,包括全等和相似,大多数但不是所有国家都讲。对空间想象力或一些立体几何的课题就强调得更少了。

对于不列颠哥伦比亚,安大略和美国,包含在计划课程中的几何的相对量,由表1给出。每列数字是IEA调查表中关于各部分几何的测试项目的比例数,这些项目由各国的数学教育工作者委员会判定是合适的。

表中的课题号,大致反映了这些课题在IEA国家课程内出现的

频率,也就是说,关于平面图形分类的项目,在所有20个IEA国家中的比率全都是最高。反映变换几何正式处理的课题的比率最低。

表 1 在几何课程范围内的指标

课 题	号	不 列 颠 哥 伦 比 亚	安 大 略	美 国
平面图形的分类	6	0.83	1.00	0.83
平面图形的性质	8	0.63	1.00	0.75
坐 标	7	0.43	0.71	0.57
平面图形的全等	4	0.50	1.00	0.75
简单推理	4	0.50	1.00	0.25
空间想象	3	0.67	1.00	1.00
平面图形的相似	6	0.33	1.00	0.83
非正规变换	4	0.00	1.00	0.00
毕达哥拉斯三角形	3	0.67	1.00	0.33
正规变换	4	0.25	0.25	0.00

这个结果表明,在计划课程的水平上,安大略省在此水平的课程比不列颠哥伦比亚和美国具有多得多的几何内容。重点明显放在变换几何是特别值得注意的。

几 何 教 学

北美教师中的大多数,大约70%,几何教学的明显特征是,他们对欧氏几何采取非正式的处理,以归纳推理、测量和激发学生直观认识为基础。少数教师采用正式的或者向量的方法,但大多数教师所教的内容包括变换几何和坐标几何,如上节所指出的。

关于教师倾向性的另一迹象,来自他们对几何教学实践的一系列论述的反应。大约70%的教师同意,对13岁学生来说,几何采取直观处理比正式的处理有意义。75%的教师同意,在几何的教