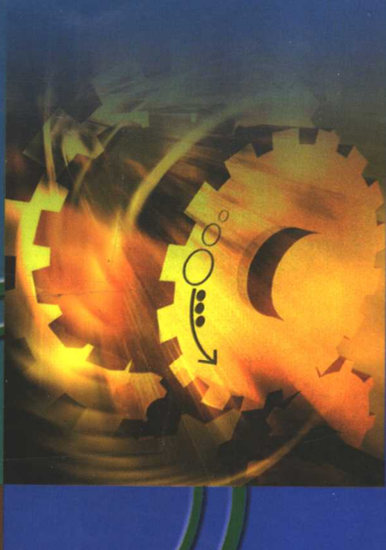
铁路原创作品

YUNSHU MOXING JI YOUHUA

运输模型及优化

王慈光 著



中国铁道出版社
CHINA RAILWAY PUBLISHING HOUSE

西南交通大学出版基金资助

运输模型及优化

王慈光　著

中　国　铁　道　出　版　社

2004年·北京

内 容 简 介

本书运用有关数学理论研究铁路运输组织中的若干具体问题。全书共7章:第1章研究货车集结过程;第2章讨论树枝形专用线取送车问题;第3章将统筹法思想应用于车站调度指挥工作;第4章和第5章研究编组站配流问题;第6章应用同余理论解决旅客列车合理开车范围问题;第7章提出简便而统一的矩阵方法,并用来分析货车周转时间的影响因素。

本书可供大专院校交通运输专业高年级学生和研究生学习,也可供从事实际工作的科技、管理人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

运输模型及优化/王慈光著.—北京:中国铁道出版社,2004
ISBN 7-113-05943-0

Ⅰ.运… Ⅱ.王… Ⅲ.铁路运输—交通运输管理
Ⅳ.U29

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 043514 号

书　　名:运输模型及优化
作　　者:王慈光　著
出版发行:中国铁道出版社(100054,北京市宣武区右安门西街8号)
责任编辑:梁兆煜
封面设计:蔡　涛
印　　刷:北京市彩桥印刷厂
开　　本:880mm×1 230mm　1/32　印张:4　字数:103千
版　　本:2004年8月第1版　2004年8月第1次印刷
印　　数:1～2000册
书　　号:ISBN 7-113-05943-0/U·1660
定　　价:15.00元

前　言

运输业是国民经济重要的产业部门。随着时代的前进，人们对运输业的要求越来越高，其中包括实现交通运输智能化。计算机技术的发展为实现智能化运输创造了条件。但仅有计算机技术是不够的，还需要对运输系统本身做深入研究，运用适当的数学工具，建立合理的数学模型，提出有效的算法，然后才能上机运算，求出结果，解决实际问题。所以，问题的数学化及其算法化是信息技术得以实现的前提条件。在铁路运输组织中，存在着大量的问题等待人们去深入探讨，建立数学模型，提供优化算法，其中既有宏观问题，也有中观问题和微观问题，既有基础理论问题，也有具体运作问题。本书讨论的是铁路运输组织中的几个微观问题。

全书共分7章。第1章研究车站货车集结问题，为简单货车集结过程建立了群论模型。第2章讨论树枝形专用线取送车问题，就非直达车流连送带取这种常见情况提出了优化方法。第3章将统筹法思想应用于车站(主要指区段站)的调度指挥工作，设计出技术作业统筹图，并给出编制步骤。第4章研究编组站静态配流问题，通过一定的技术处理将它转化为求“代价”最小的运输问题，从而可用表上作业法或最大流算法求解。第5章研究编组站动态配流问题，深入分析列车解体方案的计数与构造方法，建立树状模型，设计控制参数，从而可用回溯算法求解。这两章可以作为一个整体看待，共同解决编组站配流问题，为车站调度指挥辅助决策系统的开发奠定了理论基础。第6章应用同余理论求解旅客列车合理开车范围问题，增加了约束条件，弥补了图解法的不足。第7章针对社会经济统计学中的因素分析问题，提出简便实用的矩阵方法，使几种不同形式的指标统一了起来，并成功地用于分析铁路货车周转时间的影响因素。阅读本书只需具备线性代数、组合数学和运筹学的基本知识以及行车组织等专业知识。本书可供大专院校交通运输专业高年级学生和研究生学习，也可供铁路现场科研、管理人员参考。各章后附有练习题，供读者练习、巩固之用。

本书是我在大学任教二十余年潜心研究的部分成果。时光易逝，然而探索的艰辛与发现的喜悦仍依稀留在记忆之中。在这里，我要衷心感谢我的导师高家驹教授，他为我走上教学和科研之路付出了大量心血，教育我结合生产实际搞研究，同时教给我许多具体的研究方法。我还要感谢朱松年教授、杨明伦教授和顾炎教授，他们教给我许多业务知识，在我的从教生涯中一直给我以鼓励、支持和指导。当然，我也要特别感谢我的妻子，是她承担着95%以上的家务劳动，使我能多一些宝贵的时间看书、思考和写作。为了本书的出版，中国铁道出版社也给予了许多帮助，在此深表谢意。鉴于本人水平所限，有些问题还钻研得不够深透，有待进一步完善，不妥甚或错误之处，欢迎读者批评指正。

本书由西南交通大学出版基金资助。

王慈光

2003年8月

目　　录

第 1 章　描述简单货车集结过程的群论模型

货车集结过程是车站技术作业过程的重要组成部分，货车集结时间是车流组织优化所需要的重要参数，因此，对货车集结问题进行深入研究是很有必要的。为了便于研究，将货车集结过程按其复杂程度分为理想、简单、复杂三类。本章在分析理想集结过程的基础上，重点讨论简单货车集结过程的规律性，建立群论模型，推导计算公式，为以后进一步研究复杂集结过程打下基础。在建立群论模型的过程中，需要用到《初等数论》[1]中有关同余的理论以及《近世代数基础》[2]中有关群的基本概念，故第 1 节对这些知识作一简要介绍，以备后面的学习之用。

第 1 节　预备知识

1　同余概念

1.1　同余的定义

定义 1　如果 a,b 是整数，而 n 是一个正整数，则当 $n\mid(a-b)$ 时，称 a,b 对模 n 同余，记作 $a\equiv b(\mathrm{mod}\ n)$，当 $n\nmid(a-b)$ 时，称 a,b 对模 n 不同余，记作 $a\not\equiv b(\mathrm{mod}\ n)$。符号 $\alpha\mid\beta$ 表示 α 能整除 β，$\alpha\nmid\beta$ 表示 α 不能整除 β。

例 1　因为 $4\mid(16-0)$，所以 $16\equiv 0(\mathrm{mod}\ 4)$；因为 $4\mid(25-1)$，所以 $25\equiv 1(\mathrm{mod}\ 4)$；因为 $4\mid(25-(-3))$，所以 $25\equiv -3(\mathrm{mod}\ 4)$；因为 $4\nmid(11-8)$，所以 $11\not\equiv 8(\mathrm{mod}\ 4)$。

对同余这个概念可以这样来理解：如果 $a\equiv b(\mathrm{mod}\ n)$，就表示 a 除以 n 所得的余数与 b 除以 n 所得的余数相等。

同余概念即使在日常生活中也经常用到。比如乘火车旅行，若成都——北京单程旅行时间为 32 h，列车 10:00 从成都出发，问何时到达北京？稍一推算便知，答案为第二天 18:00。其实在推算的过程中已经不知不觉地使用了同余概念。原来，$32\equiv 8(\mathrm{mod}\ 24)$，列车 10:00 出发，故到

达时刻为(10+8=)18:00。

1.2 同余的性质

下面不加证明地列出有关同余的若干性质：

(1) $a\equiv a\pmod n$

(2) $a\equiv b\pmod n \Rightarrow b\equiv a\pmod n$

(3) $a\equiv b\pmod n$且 $b\equiv c\pmod n\Rightarrow a\equiv c\pmod n$

上面的三个性质分别称为自反律、对称律和传递律。

(4) $a\equiv b\pmod n$且 $c\equiv d\pmod n\Rightarrow a\pm c\equiv b\pm d\pmod n$, $ac\equiv bd\pmod n$

(5) $a\equiv b\pmod n \Rightarrow ac\equiv bc\pmod n$, $a^m\equiv b^m\pmod n$

(6) $ad\equiv bd\pmod{nd} \Rightarrow a\equiv b\pmod n$

上面性质(5)、(6)中的 c 是整数，m，d 是正整数。

(7) 若 $a_1\equiv b_1\pmod n$, $a_2\equiv b_2\pmod n$, $\cdots$, $a_m\equiv b_m\pmod n$，则

$$a_1+a_2+\cdots+a_m\equiv b_1+b_2+\cdots+b_m\pmod n$$

2 一次同余式

2.1 一次同余式的定义及解的存在定理

定义 2 如果 a，b 是整数，而 n 是一个正整数，则当 $a\not\equiv 0\pmod n$ 时，把

$$ax+b\equiv 0\pmod n \tag{1.1}$$

叫做模 n 的一次同余式。

定义 3 如果 c 是使$ac+b\equiv 0\pmod n$成立的一个整数，则把满足 $x\equiv c\pmod n$的一切整数 x 叫做式(1.1)的一个解。

为了把一次同余式的解找出来，首先需要判定它有没有解。为此，有下面的定理。

定理 1 当 a，n 的最大公因数(a,n)不能整除 b，即$(a,n)\nmid b$ 时，一次同余式(1.1)没有整数解；当 a，n 互素，即$(a,n)=1$ 时，式(1.1)有整数解。

2.2 解　　法

先讨论 $b=0$ 的情形。这时，式(1.1)成为

$$ax\equiv 0\pmod n \tag{1.2}$$

显然，只有当 x 是 n 的整倍数，(1.2)才能成立。这就是说，(1.2)的解为

$$x=\cdots,-2n,-n,0,n,2n,\cdots$$

再讨论 $b\neq0$ 的一般情形。这时，式(1.1)可以化为二元不定方程 $ax+ny=-b$，然后用解不定方程的方法求解。但对于数字比较小的简单情形，可以采用试探法求解。

例 2 求一次同余式 $4x+10\equiv0\pmod 6$ 的整数解。

由性质(6)，原同余式可变为 $2x+5\equiv0\pmod 3$。因为 $(2,3)=1$，根据定理 1，知上式有整数解。令 $x=0,1,2$，逐个代入试验，结果 $x=2$ 可使上式成立。由定义 3，所求同余式的解为

$$x=\cdots,-7,-4,-1,2,5,8,\cdots$$

3 群的概念

3.1 群的定义

定义 4 设 G 是一个非空集合，在 G 中定义了一种叫做乘法的运算，如果 G 满足下面几个条件，那么 G 对于这个乘法来说作成一个群。

(1) G 对于这个乘法来说是闭的，即 G 中任意二元素相乘所得的结果还是 G 的一个元素；

(2) 结合律成立：$a(bc)=(ab)c \quad (a,b,c\in G)$；

(3) 存在单位元 e：$ae=ea=a \quad (a,e\in G)$；

(4) 每一个元 a 在 G 中都可找到一个逆元 a^{-1}：$aa^{-1}=a^{-1}a=e(a,a^{-1},e\in G)$。

应当说明的是，上面所说的乘法并非指普通的乘法，而是一种运算法则，利用这种法则，不是数的事物也可以进行运算。

定义 5 如果 G 包含的元素个数有限，则称 G 为有限群，否则称 G 为无限群。有限群 G 所包含的元素个数叫做群 G 的阶，记作 $|G|$。

定义 6 若对于群 G 的任意两个元素 a,b，都有 $ab=ba$，则称 G 为一个交换群，否则为非交换群。

定义 7 如果群 G 的每一个元都是 G 的一个固定元素 a 的乘方，那么 G 就叫做循环群，a 称为 G 的一个生成元。

这里，关于乘方的规定是：对于正整数 n，

$$a^n = \underbrace{aa\cdots a}_{n\text{个}} \qquad a^{-n} = (a^{-1})^n$$

按照上面的几个定义，全体整数对于普通加法来说作成一个群，称之为整数加群。整数加群是一个无限群，一个交换群，又是一个以 1(或 -1)为生成元的循环群(规定：$1^0 = e = 0$)。但是，全体整数对于普通乘法来说不作成一个群。那么，什么样的数集对于普通乘法可以作成一个群？

定义 8 如果群 G 的一个子集 H 对于 G 的乘法来说作成一个群，则 H 叫做 G 的子群。

3.2 乘 法 表

一个有限群 G 的乘法运算常用一个表来表示，叫做乘法表(或运算表)。通过乘法表可以直接看出群的一些性质，可惜结合律在表中不易看出。

例 3 设集合 $G = \{2,4,6,8\}$，在 G 中规定一个乘法，用“$*$”表示，其意义是：若 $x, y \in G$，则 $x * y = xy$ 的个位数字。如 $4 * 8 = 2$。据此列出乘法表如表 1.1 所示。

表 1.1 例 3 的乘法表

	2	4	6	8
2	4	8	2	6
4	8	6	4	2
6	2	4	6	8
8	6	2	8	4

由乘法表可以看出，G 对于乘法 $*$ 是闭的，G 存在单位元 6，每个元都有自己的逆元：$2^{-1} = 8, 4^{-1} = 4, 6^{-1} = 6, 8^{-1} = 2$。经检验，结合律成立。因此，$G$ 对于乘法 $*$ 来说作成一个群。从乘法表还可知道，G 是一个交换群，又是一个循环群。那么，生成元是什么？

3.3 剩余类加群

定义 9 根据模 n 的同余关系对全体整数所作的一个分类叫做模 n 的剩余类。模 n 的剩余类共有 n 个，分别用 $[0], [1], \cdots, [n-1]$ 来表示。如 $n = 4$，模 4 的 4 个剩余类是

$$[0] = \{\cdots, -8, -4, 0, 4, 8, \cdots\}$$

$$[1]=\{\cdots,-7,-3,1,5,9,\cdots\}$$
$$[2]=\{\cdots,-6,-2,2,6,10,\cdots\}$$
$$[3]=\{\cdots,-5,-1,3,7,11,\cdots\}$$

定义 10 模 n 的 n 个剩余类 $[0],[1],\cdots,[n-1]$ 对于加法

$$[a]+[b]=[a+b] \tag{1.3}$$

来说作成一个群，称为模 n 的剩余类加群。式(1.3)中，$[a]$ 表示 a 这个整数所在的模 n 的剩余类。

模 n 的剩余类加群的乘法表如表 1.2。

表 1.2 模 n 的剩余类加群乘法表

	$[0]$	$[1]$	$\cdots$	$[n-2]$	$[n-1]$
$[0]$	$[0]$	$[1]$	$\cdots$	$[n-2]$	$[n-1]$
$[1]$	$[1]$	$[2]$	$\cdots$	$[n-1]$	$[0]$
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
$[n-2]$	$[n-2]$	$[n-1]$	$\cdots$	$[n-4]$	$[n-3]$
$[n-1]$	$[n-1]$	$[0]$	$\cdots$	$[n-3]$	$[n-2]$

第 2 节 理想货车集结过程

1 概念与符号

所谓货车集结过程，简言之就是车站(主要指技术站)的有调车(包括有调中转车和本站货物作业车)先到等待后到，凑集满轴的过程。由于车组到达的不均衡性和车组大小的不相等，使得货车集结的规律性难以掌握，所以人们先从简单的情况入手，假设车组到达是均衡的，车组大小是相等的[3][4]。我们称满足上述两个假设的集结过程为简单货车集结过程(简称为"简单集结过程")。如果在此基础上再增加一个假设：车列编成辆数恰为车组包含辆数的整倍数，则称之为理想货车集结过程(简称为"理想集结过程")。

为了叙述和推导公式的方便起见，规定下列符号：

m——车列编成辆数；

$m_{组}$——每一车组包含辆数；

$m_{残}$——车列开始集结时的残存车数，即前一车列集结满轴后的剩余车数，显然有 $0 \leqslant m_{残} \leqslant m_{组}-1$；

$m_{后}$——最后车组车数，$1 \leqslant m_{后} \leqslant m_{组}$；

$t_{组}$——车组到达间隔；

$t_{列}$——集结一个车列的时间；

$T_{集列}$——集结一个车列的车小时消耗；

$T_{集}$——某去向车流一昼夜总的集结车小时消耗。

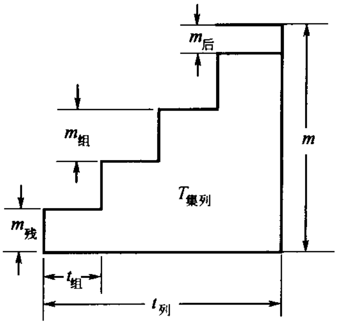


图 1.1 若干符号的图示

上述符号的几何意义见图 1.1。图中画出了一个车列的集结过程，呈现阶梯形状，构成一个多边形，该多边形称为集结多边形。

2 特　　征

可以证明，对于理想货车集结过程，任一车列的残存车数均相等，即下式成立：

$$m_{残,i} = m_{残,i+1} \tag{1.4}$$

式中　i——车列编号。

证：　$m_{组}=$定值$\Rightarrow m_{残,i+1}+m_{后,i}=m_{组}$

由理想货车集结过程的含义，$m_{组} \mid m \Rightarrow m \equiv 0 (\mathrm{mod}\ m_{组})$

而　$m = m_{残,i}+m_{组}+\cdots+m_{组}+m_{后,i}$

故　$m_{残,i}+m_{组}+\cdots+m_{组}+m_{后,i} \equiv 0(\mathrm{mod}\ m_{组}) \Rightarrow m_{残,i}+m_{后,i} \equiv 0(\mathrm{mod}\ m_{组})$

$$0 \leqslant m_{残,i} \leqslant m_{组}-1,\ 1 \leqslant m_{后,i} \leqslant m_{组} \Rightarrow 0 < m_{残,i}+m_{后,i} < 2m_{组}$$

故必有　$m_{残,i}+m_{后,i}=m_{组}$

所以　$m_{残,i}=m_{残,i+1}$　证毕。

由式(1.4)，给定一个 $m_{残}$，所有的集结多边形都是完全一样的。

例 4　设 $m=40$，$m_{组}=10$，图 1.2 是 $m_{残}=6$ 的理想集结过程示意图。图中明显地反映出了上述特征。

3 $T_{集}$ 的计算公式

以 n 记一个车列包含的车组数，则 $n=\frac{m}{m_{组}}$。观察图 1.2，$T_{集列}$是多边形面积，等于 n 块矩形面积之和，而这 n 块矩形面积恰形成一阶等差数列。数列的首项 $a_1=m_{残}t_{组}$，公差 $d_1=m_{组}t_{组}$，项数为 n，前 n 项的和即为 $T_{集列}$，所以

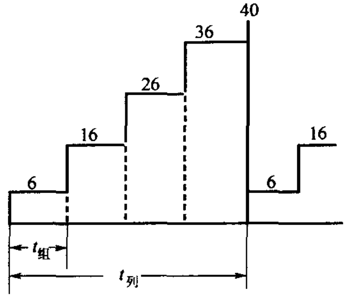


图 1.2 理想货车集结过程示意图

$$
\begin{aligned}
T_{集列} &= na_1+\frac{n(n-1)}{2}d_1 \\
&= nm_{残}t_{组}+\frac{n(n-1)}{2}m_{组}t_{组}
\end{aligned}
$$

注意到 $nt_{组}=t_{列}$，$nm_{组}=m$，得

$$T_{集列}=\frac{1}{2}t_{列}(m+2m_{残}-m_{组}) \tag{1.5}$$

因 m，$m_{组}$，$t_{组}$，$t_{列}$ 是定值，而 $m_{残,i}=m_{残,i+1}$，故每个 $T_{集列}$都是相等的。于是

$$T_{集}=\frac{24}{t_{列}}\cdot T_{集列}$$

即

$$T_{集}=12(m+2m_{残}-m_{组}) \tag{1.6}$$

容易算出，例 4 的 $T_{集}=12\times(40+12-10)=12\times42$(车小时)。

4 三个特例

(1) $m_{残}=0$，即每集结一个车列发生一次集结中断。这时

$$T_{集列}=\frac{1}{2}t_{列}(m-m_{组})$$

$$T_{集}=12(m-m_{组})=12m\left(1-\frac{1}{n}\right)$$

(2) $m_{残}=\frac{1}{2}m_{组}$，即残存车恰为半个车组。这时

$$T_{集列}=\frac{1}{2}t_{列}m \qquad T_{集}=12m$$

(3) $m_{残}=m_{组}-1$,即残存车取极大值。这时

$$T_{集列}=\frac{1}{2}t_{列}(m+m_{组}-2)$$

$$T_{集}=12(m+m_{组}-2)>12m$$

不难看出,(1)是最有利的情况,(2)是平均情况,(3)是最不利的情况。

第 3 节　简单货车集结过程

简单集结过程较之理想集结过程减少了一个假设:$m_{组}\mid m$。在 $m_{组}\nmid m$ 的条件下,$m_{残,i}=m_{残,i+1}$ 这一特征将不复存在。随之而来的,"对于给定的 $m_{残}$,每个集结多边形面积都相等"这一结论也不成立,自然,$T_{集}$ 的计算公式也是不再适用的。那么,简单集结过程具有哪些规律性呢?它与理想集结过程有什么联系呢?本节将回答这些问题。从第 2 节我们知道,发生集结中断是最有利的情况,我们不妨由此展开讨论。

1　集结中断的条件

设集结 x 个车组发生集结中断,则对应一个 $m_{残}$ 便有一个一次同余式:

$$m_{组}x+m_{残}\equiv 0(\bmod m) \tag{1.7}$$

如果 $m_{组}$ 和 m 的最大公因数 $(m_{组},m)=1$,由第 1 节定理 1,式(1.7)有整数解。这意味着在该情况下肯定会发生集结中断。现设 $(m_{组},m)=d\neq 1$,但 $d\mid m_{残}$,则式(1.7)可化为

$$\frac{m_{组}}{d}x+\frac{m_{残}}{d}\equiv 0\left(\bmod\frac{m}{d}\right) \tag{1.8}$$

由于 $\frac{m_{组}}{d},\frac{m_{残}}{d},\frac{m}{d}$ 均为整数,且 $\left(\frac{m_{组}}{d},\frac{m}{d}\right)=1$,故式(1.8)有整数解,即式(1.7)有整数解,也即这种情况下会发生集结中断。如果 $d\nmid m_{残}$,由第 1 节定理 1,式(1.7)无整数解,即这种情况下不会发生集结中断。

例 5　设 $m=40$,$m_{组}=12$,则 $(m_{组},m)=(12,40)=4$,$m_{残}$ 的取值共有 12 个:0,1,2,…,11,故有 12 个一次同余式,列于表 1.3。

表 1.3　例 5 的一次同余式及其解的状况

$m_{残}$	一次同余式	同余式的解
0	$12x \equiv 0 \pmod{40}$	$x=10,20,30,\cdots$
1	$12x+1 \equiv 0 \pmod{40}$	无整数解
2	$12x+2 \equiv 0 \pmod{40}$	无整数解
3	$12x+3 \equiv 0 \pmod{40}$	无整数解
4	$12x+4 \equiv 0 \pmod{40}$	$x=3,13,23,\cdots$
5	$12x+5 \equiv 0 \pmod{40}$	无整数解
6	$12x+6 \equiv 0 \pmod{40}$	无整数解
7	$12x+7 \equiv 0 \pmod{40}$	无整数解
8	$12x+8 \equiv 0 \pmod{40}$	$x=6,16,26,\cdots$
9	$12x+9 \equiv 0 \pmod{40}$	无整数解
10	$12x+10 \equiv 0 \pmod{40}$	无整数解
11	$12x+11 \equiv 0 \pmod{40}$	无整数解

从表 1.3 知，只有当 $m_{残}=0,4,8$ 时，一次同余式才有整数解，才会发生集结中断，当 $m_{残}$ 取其他值时无整数解，也就不会有集结中断。究其原因，是因为例 5 的 $d=4$，可以整除 0,4,8，而不能整除其他 $m_{残}$ 的取值，这完全证实了前面的结论。

2　集结周期

观察表 1.3 中解的结构，知集结中断是有规律的：当 $m_{残}=0$，每集结 10 个车组(3 个车列)发生一次中断；当 $m_{残}=4$，集结 3 个车组发生中断，此后每集结 10 个车组中断一次；当 $m_{残}=8$，集结 6 个车组发生中断，此后每集结 10 个车组中断一次。

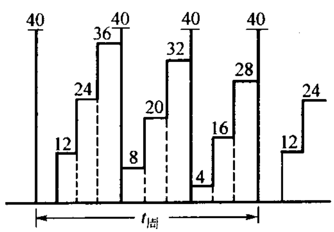


图 1.3　$m_{残}=0,4,8$ 的集结过程图

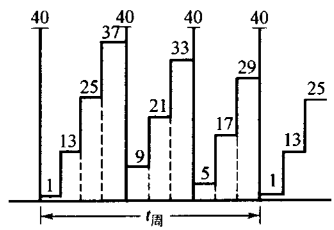


图 1.4　$m_{残}=1,5,9$ 的集结过程图

图 1.3 是 $m_{残}=0,4,8$ 的货车集结过程图，它完全证实了由计算得

出的结论，而且明显地显示出集结过程的周期性。那么，当 $m_{残}\neq 0,4,8$，不妨设 $m_{残}=1$，是否也有这种周期性的规律呢？图 1.4 对这一问题作了肯定的回答。可以推知，这种规律性对其他的 $m_{残}$ 也是同样存在的。

为了确切地说明这种周期现象，作如下定义：

定义 11 自某个 $m_{残}$ 出现时起至下一次相同的 $m_{残}$ 出现时止的一段时间称为集结周期，记作 $t_{周}$，在 $t_{周}$ 内消耗的车小时用 $T_{集周}$表示。

事实上，集结周期的存在等价于下面的关系式成立：

$$m_{组}x + m_{残} \equiv m_{残} (\bmod m) \tag{1.9}$$

由于式(1.9)可化成

$$m_{组}x \equiv 0 (\bmod m) \tag{1.10}$$

而式(1.10)肯定有整数解，故集结周期肯定存在。

图 1.3 和 1.4 还表明，无论 $m_{残}$ 取何值，$t_{周}$ 均是相等的。对于例 5，$t_{周}=10t_{组}$。一般地，$t_{周}=\frac{m}{d}t_{组}$，这里，$\frac{m}{d}$是式(1.10)的最小正整数解。

3 集结类和集结类加群

3.1 集 结 类

从图 1.3 和 1.4 可见，0,8,4 这三个数字总是连在一起，在每个集结周期中循环出现，1,9,5 亦然。可以推知，2,10,6 及 3,11,7 也具有同样的性质。这样，共有 4 组数字：

$$\{0,8,4\} \qquad \{1,9,5\} \qquad \{2,10,6\} \qquad \{3,11,7\}$$

它们穷尽了 $m_{残}$ 的所有取值，而且组与组之间没有交叉。很清楚，这是全体 $m_{残}$ 的一个划分。由于

$$0\equiv 4\equiv 8 \ (\bmod 4) \qquad 1\equiv 5\equiv 9 \ (\bmod 4)$$

$$2\equiv 6\equiv 10 \ (\bmod 4) \qquad 3\equiv 7\equiv 11 \ (\bmod 4)$$

故这 4 组数字分别属于模 4 的 4 个剩余类。像这样的组称为“集结类”。

定义 12 在每个集结周期中循环重复出现的若干个 $m_{残}$ 的集合称为一个集结类，记作 $A_i(i=0,1,2,\cdots,d-1)$，集结类的个数等于 m 和 $m_{组}$ 的最大公因数 d。

就例 5 而言，$A_0=\{0,4,8\}$，$A_1=\{1,5,9\}$，$A_2=\{2,6,10\}$，$A_3=\{3,7,11\}$。