中学数学归纳法证题100例

旺 塘 胡英信 编著

广西民族出版社

中学数学归纳法证题100例

——旺圹、胡英信编著

广西民族出版社

中学数学归纳法证题100例

旺 圹 胡英信 编著

*

广西民族出版社出版

广西区新华书店发行

广西大学印刷厂印刷

开本787×1092 1/32 印张5.5 字数120千字

1988年12月第1版 1988年12月第1次印刷

印数：1—6000册

ISBN 7-5363-0445-5
G·187

定价：2.08元

前　言

数学归纳法是数学里一种重要的证明方法，在数学的各个部门里都有着广泛的应用，它是中学数学教学的一个重要内容，也是历年高考的热门试题。初学数学归纳法的人往往不容易掌握这个方法的精神实质，解题时就只能机械地硬套两个步骤，结果是事倍功半。

数学归纳法是一种证明与自然数 n 有关的数学命题的重要方法。在中学数学里，用数学归纳法证明命题，常用的有以下两种：第一数学归纳法和第二数学归纳法。

所谓第一数学归纳法，它的证明步骤是：

（1）证明当 $n=n_0$（第一个数）的时候，某个命题是正确的；

（2）假设当 $n=k$ 时，命题是正确的，证明当 $n=k+1$ 时，这个命题也是正确的。

根据(1)、(2)，就可以断定对于大于或等于 n_0 的任意自然数 n，这个命题都是正确的。

第二数学归纳法，它的证明步骤是：

（1）当 $n=1$ 时，命题 $P(1)$ 正确；

（2）假设当 $1\leqslant n<k$ 时，命题 $P(n)$ 都正确，推得命题 $P(k)$ 正确，则命题对于任意的自然数 n 都正确。

本书在编写过程中，主要参照现行数学教材，从恒等式，条件等式，不等式，数列，数的整除，几何上的应用，其他等七个方面，精选了100题用数学归纳法证题范例。在所选择的范例里，大多是应用了上面这两种数学归纳法加以证明，并基本保持证明步骤与教材的一致，以便于读者阅

读。因为，数学归纳法有各种类型，为了让读者学到更多的知识，我们在第七部分“其他”一节里，还应用了另外四种数学归纳法加以证明，这对于平时学有余力的高中生有很大的启迪。为了便于阅读，现分别把其余四种证明步骤加以叙述如下：

第三种数学归纳法：

在一个问题里如果含有两部分关于自然数 n 的命题（当然这两部分命题是关联着的），我们把这两个命题记做 $L(n)$、$M(n)$。证明步骤是：

(1) 先证明 $L(1)$ 是正确的（意思是证明当 $n=1$ 时，命题 $L(n)$ 是正确的）；

(2) 假设 $L(k)$ 是正确的，根据这个假设，证明 $M(k)$ 是正确的；

(3) 假设 $M(k)$ 是正确的，根据这个假设证明 $L(k+1)$ 是正确的；

(4) 根据(1)、(2)、(3)，就可以断定对于任意的自然数 n，命题 $L(n)$、$M(n)$ 都是正确的。

第四种数学归纳法（又称跳跃归纳法）：

设 $P(n)$ 是关于自然数集上的命题函数，l 为某一自然数（$l \geqslant 2$），如果

(1) 当 $n=1,2,3,\cdots,l$ 时，命题 $P(1),P(2),P(3),\cdots,P(l)$ 都成立；

(2) 假设当 $n=k$ 时，命题 $P(k)$ 成立，则当 $n=k+l$ 时，命题 $P(k+l)$ 也成立，那么命题 $P(n)$ 对一切的自然数 n 都成立。

第五种数学归纳法（又称二元有限归纳法）

设 $P(i,j)$ 为与自然数 i 和 j 相关联的命题函数，如果

(1) 当 $i=i_0$，$j=j_0$ 时，命题 $P(i_0,j_0)$ 为真；

(2) 对任一 $k\geqslant i_0$，任一 $l\geqslant j_0$，假定 $P(k,l)$ 为真，则 $P(k+1,l)$ 和 $P(k,l+1)$ 为真。

那么 $P(i,j)$ 对一切 $i\geqslant i_0$ 和 $j\geqslant j_0$ 都为真。

第六种数学归纳法

它的证明步骤是：

(1) 证明当 $n=2$ 时，命题是正确的；

(2) 假设当 $n=k$ 时这个命题是正确的，证明当 $n=2k$ 时，这个命题也是正确的；

(3) 假设当 $n=r$ 时，这个命题是正确的，证明当 $n=r-1$ 时，这个命题也是正确的。

经过这三个步骤后，就可以断定对于任意的自然数 n，这个命题都是正确的（如果自然数 n 是 2 的乘幂，那么，从第一、第二两步可以知道，对于 n，这个命题是正确的；如果自然数 n 不是 2 的乘幂，那么，可以取大于 n 的一个 2 的乘幂，再从第三步（当然要以第一、第二步为基础）而得到证明）。

本书在编写过程中，参考了有关资料和书刊，谨向这些作者致以谢意。由于水平所限，书中定有不少缺点和错误，欢迎读者批评指正。

编　者

1988年8月5日

目　　录

一、恒等式的证明

〔例1〕 求证：

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1).$$

〔证明〕 1° 当 $n=1$ 时，得

$$1^2=\frac{1}{6}\cdot1\cdot2\cdot3=1$$

这时，等式是成立的。

2° 假设当 $n=k$ 时，这个等式是成立的，即

$$1^2+2^2+\cdots+k^2=\frac{1}{6}k(k+1)(2k+1).$$

那么当 $n=k+1$ 时，

$$1^2+2^2+\cdots+k^2+(k+1)^2$$

$$=\frac{1}{6}(k+1)[(k+1)+1][2(k+1)+1]$$

而

$$\frac{1}{6}(k+1)[(k+1)+1][2(k+1)+1]$$

$$=\frac{1}{6}(k+1)(k+2)(2k+2+1)$$

$$=\frac{1}{6}(k+1)(k+2)(2k+3)$$

$$\therefore\ 1^2+2^2+3^2+\cdots+k^2+(k+1)^2.$$

$$=\frac{1}{6}(k+1)(k+2)(2k+3).$$

这就是说，当 $n=k+1$ 时，这个等式也是成立的。

根据1°、2°可知，对于任意的自然数 n，这个等式都能成立。

以上证明，乍看起来似乎也应用了数学归纳法的两个步骤，似乎也有了第二步从“k”推到“$k+1$”的过程。但事实上，在证明等式

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+k^2+(k+1)^2$$

$$=\frac{1}{6}(k+1)(k+2)(2k+3)$$

的过程中，根本没有应用

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+k^2=\frac{1}{6}k(k+1)(2k+1)$$

这个式子（归纳假设），没有用这个式子作为基础，来导出上面的等式。所谓从“k”到“$k+1$”的过程，意思是必须把$n=k$时的命题，当作已经给定的条件（假设），要在这个条件的基础上，来导出$n=k+1$时的命题。所以，在推导过程中，必须把$n=k$时命题成立的假设，用上一次或者几次。

但是，在上面的证明中，撇开了“当$n=k$时命题是正确的”这个假设，只是在$n=k+1$时将式子的右边进行一次运算而已，根本达不到证明的目的。

正确的证法应该是这样的：

1° 当$n=1$时，等式是成立的。

2° 假设当$n=k$时，这个等式是成立的；也就是假设

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+k^2=\frac{1}{6}k(k+1)(2k+1).$$

在这个等式的两边都加上$(k+1)^2$，得

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+k^2+(k+1)^2$$

$$=\frac{1}{6}k(k+1)(2k+1)+(k+1)^2$$

$$=(k+1)\left[\frac{1}{6}k(2k+1)+(k+1)\right]$$

$$=\frac{1}{6}(k+1)[2k^2+7k+6]$$

$$=\frac{1}{6}(k+1)(k+2)(2k+3)$$

$$=\frac{1}{6}(k+1)[(k+1)+1][2(k+1)+1]$$

这就是说，当 $n=k+1$ 时，这个等式也是成立的。

根据1°、2°，可知对任意的自然数 n，这个等式都成立。

〔例2〕 下列各题在应用数学归纳法的过程中，有没有错误？如果有，请指出错在那里？

1\. 证明：$\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^n}=1-\frac{1}{2^n}$.

〔原证〕①当 $n=1$ 时，左边 $=1-\frac{1}{2}$

右边 $=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$，命题成立。

②假设 $n=k$ 时命题成立，即

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^k}=1-\frac{1}{2^k}.$$

则当 $n=k+1$ 时，有 $\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^k}+\frac{1}{2^{k+1}}$

$$=\frac{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2^{k+1}}\right)}{1-\frac{1}{2}}=1-\frac{1}{2^{k+1}}.$$

所以命题对所有的自然数 n 成立。

2. 证明：$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}$

$=\frac{n}{n+1}$

〔原证〕①当 $n=1$ 时，左边 $=\frac{1}{1\cdot 2}=\frac{1}{2}$，

右边 $=\frac{1}{2}$，所以等式成立。

②假设 $n=k$ 时等式成立，即

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{k(k+1)}=\frac{k}{k+1},$$

则当 $n=k+1$ 时

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{k(k+1)}+\frac{1}{(k+1)(k+2)}$$

$$=\frac{k+1}{(k+1)+1}=\frac{k+1}{k+2}.$$

由①、②可知，对于任意的自然数 n 等式都成立。

3. 证明：$1+2+3+\cdots+n=\frac{n^2+n+1}{2}$.

〔原证〕假设当 $n=k$ 时，这个命题是正确的，证明当 $n=k+1$ 时这个命题也是正确的；也就是假设

$$1+2+\cdots+k=\frac{1}{2}(k^2+k+1),$$

证明 $1+2+3+\cdots+k+(k+1)$

$$=\frac{1}{2}\left[(k+1)^2+(k+1)+1\right].$$

事实上，把等式

$$1+2+\cdots+k=\frac{1}{2}(k^2+k+1)$$

的两边都加上$(k+1)$，得

$$1+2+\cdots+k+(k+1)=\frac{1}{2}(k^2+k+1)+(k+1)$$

而

$$\frac{1}{2}(k^2+k+1)+(k+1)=\frac{1}{2}(k^2+k+1+2k+2)$$

$$=\frac{1}{2}(k^2+3k+3)$$

$$=\frac{1}{2}\left[(k^2+2k+1)+(k+1)+1\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[(k+1)^2+(k+1)+1\right].$$

所以

$$1+2+\cdots+k+(k+1)=\frac{1}{2}\left[(k+1)^2+(k+1)+1\right].$$

因此，对于任意的自然数n，命题都是正确的。

答：1．1的证明过程无疑是错误的，它在第二步的证明中并未应用归纳假设，而只在形式上套用了数学归纳法的证题步骤，且从$n=k$到$n=k+1$没有按方法要求进行推证，直接应用等比数列的求和公式，这是对数学归纳法的本质缺乏理解的缘故。

2．2的证明只是表面上套用了数学归纳法证题的模式，不明白第二步骤递推性的意义，这里由$P(k)$到$P(k+1)$并没有推导过程，只是把原来的等式中的n分别换成了k和$k+1$而已，因此并不能保证可由$P(k)$过渡到$P(k+1)$，没有递推功能也就不能断言对于任意的自然数n等式都成立。

3．本题在证明中，缺少了用数学归纳法证题中的第一步，因而会导出错误的结论。

事实上，根据等差数列的前n项和的公式，得

$$1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}=\frac{n^2+n}{2}\neq\frac{n^2+n+1}{2}$$

另外，只要我们验证当$n=1$时，就会得到，左边$=1$，右边$=\frac{1+1+1}{2}=\frac{3}{2}$，左边$\neq$右边。

【简评】、用数学归纳法证明与自然数n有关的数学命题时，数学归纳法的两个步骤是缺一不可的。这是因为，只有第一步假设而无第二步证明，论断的普遍性是不可靠或者是不成立的；反之，有第二步而无第一步，则第二步的假设就失去了基础。

【例3】　求证：$C_n^k=\frac{n!}{k!(n-k)!}$

【证明】　当$n=1$时，

$$C_1^1=\frac{1!}{1!(1-1)!}=\frac{1}{1\cdot 1}=1.$$

这时，命题是正确的。

假设当$n=k$时，命题是正确的；也就是假设

$$C_k^k=\frac{k!}{k!(k-k)!}=1.$$

当$n=k+1$时，

$$C_{k+1}^k=k+1$$

$$\frac{(k+1)!}{k!(k+1-k)!}=\frac{(k+1)!}{k!1!}=k+1.$$

这时，命题也是正确的。

根据上述两个步骤，可以断定对于任意的自然数n，这个命题是正确的。

【简评】 这个证明中有好几处错误。现在只指出其中的一点，也就是，在应用数学归纳法的时候，没有明确对哪一个变量进行。

在第一步中，从表面上看来，是使$n=1$，实际上却是使$n=k=1$。这样，我们就要同时对n和k两个自然变量来进行数学归纳法了。

在第二步中，我们把从“k”到“$k+1$”中的“k”，和C_n^k里的“k”这两个字母混淆起来了。

因此，在应用数学归纳法的时候，如果所要证明的命题中有两个（或者两个以上）关于自然数的变量，例如上面这个例里的n和k，那么，我们首先必须明确，证明中是对哪一个变量进行数学归纳法的。如果我们要对n进行数学归纳法，那么，应该把k看作常量，进行步骤是：先证明当$n=1$时，命题是正确的；再假设当$n=r$（为了避免和式子里原有的“常量”k相混淆，这里不再用k）时，这个命题是正确的，证明当$n=r+1$时，这个命题也是正确的。如果我们要对k进行数学归纳法的话，那么，应当把n看作常量，进行的步骤是：先证明当$k=1$时，命题是正确的；再假设当$k=r$时，这个命题是正确的，证明当$k=r+1$时这个命题也是正确的。

所以，应用数学归纳法来证明这个命题，一般是对k来进行的。因为，如果对n进行数学归纳法，那么当$k>1$时，我们就无法来讨论$n=1$时的情形了。

正确的证法应该是：

1°当$k=1$时，C_n^1是从n个元素里每次取出一个元素的

所有组合的种数。很明显，

$$C_n^1=n.$$

另一方面，当$k=1$时

$$\frac{n!}{1!(-1)!}=n.$$

这时，命题是正确的。

2°假设当$k=r$时，命题是正确的，就是假设

$$C_n^r=\frac{n!}{r!(n-r)!}=\frac{n\cdot(n-1)\cdots\cdots(n-r+1)}{r!}$$

当$k=r+1$时

$$C_n^{r+1}=\frac{n!}{(r+1)!(n-r-1)!}$$

$$=\frac{n(n-1)\cdots\cdots(n-r+1)(n-r)}{1\cdot2\cdot3\cdot\cdots\cdots r(r+1)}$$

$$=\frac{[n(n-1)\cdots\cdots(n-r+1)](n-r)}{(1\cdot2\cdot\cdots\cdots r)(r+1)}$$

$$=C_n^r\cdot\frac{n-r}{r+1}$$

另一方面，要得到从n个元素是每次取出$r+1$个元素所有组合的种数，可以先把从n个元素里每次取出r个元素所有组合都写出来，对写出来的每一个组合，再以这r个元素以外的$n-r$个元素里任意选取一个，添在这个组合里作为第$r+1$个元素。从$r-r$个元素里每次任意取出一个元素，一共有$n-r$种方法，因此我们得出，从n个元素里每次任意取出$r+1$个元素的组合方法，可以有$C_n^r(n-r)$种。

不过，这$C_n^r(n-r)$种组合不是完全不相同的。例如，在组合$a_1a_2\cdots a_r$里添上第$r+1$个元素a_{r+1}，在组合$a_1a_2\cdots\cdots a_{r-1}a_{+1}$里添上第$r+1$个元素$a_r$，……，在组合数$a_2a_3\cdots\cdots a_ra_{r+1}$里添上第$r+1$个元素$a_1$等，这些$r+1$个元素的组合实际上都是同一个组合。换句话说，这样的$r+1$个组合是重复的。所以，我们应当把刚才求出来的组合种数除以$r+1$。因此，所求的组合种数应当是

$$C_n^r\cdot\frac{n-r}{r+1}.$$

这就是说，当$k=r+1$时，这个命题也是正确的。

根据1°、2°可知，对于任意的自然数k和n（$k\leqslant n$），这个命题是正确的。

【例4】 对任意的自然数n，求证：

$$1\cdot3\cdot5\cdot\cdots\cdot(2n-1)=\frac{(2n)!}{2^n\cdot n!}.$$

[证明] (1)当$n=1$时，等式显然成立。

(2)假设当$n=k$时，等式成立，即

$$1\cdot3\cdot5\cdot\cdots\cdot(2k-1)=\frac{(2k)!}{2^k\cdot k!}$$

等式两边同乘以$(2k+1)$得

$$1\cdot3\cdot5\cdot\cdots\cdot(2k-1)\cdot(2k+1)=\frac{(2k)!}{2^k\cdot k!}\cdot(2k+1)$$

$$=\frac{(2k+1)!}{2^k\cdot k!}=\frac{[2(k+1)]!}{2^k\cdot k!\cdot(2k+2)}$$

$$=\frac{[2(k+1)]!}{2^{k+1}\cdot(k+1)!}.$$

由此可知，当$n=k+1$时等式成立。

由(1)、(2)可知，对任意的自然数n，等式都成立。

【简评】 本题在证明的第一步里，我们是把等式的两边同时乘以$(2k+1)$这一项，以使等式左边变成当$n=k+1$时的形式，从而证明右边也形成当$n=k+1$时的形式。这种方法，把等式两边同乘以某数（或代数式）或者同加上某项（或代数式），是用数学归纳法证明恒等式时常用的解题技巧。

【例5】 用数学归纳法证明

$$(1+q)(1+q^2)(1+q^4)\cdots(1+q^{2^n})=\frac{1-q^{2^{n+1}}}{1-q}(q\neq 1).$$

[分析] 在第二步里，假设$n=k$时等式成立，即

$$(1+q)(1+q^2)(1+q^4)\cdots(1+q^{2^k})=\frac{1-q^{2^{k+1}}}{1-q} \quad (1)$$

这时如能证明$n=k+1$时等式也成立，就是若能证明

$$(1+q)(1+q^2)(1+q^4)\cdots(1+q^{2^k})(1+q^{2^{k+1}})$$

$$=\frac{1-q^{2^{k+2}}}{1+q} \quad (2)$$

就行了。

比较(1)和(2)左边，因为(2)的右边是(1)的左边乘以$(1+q^{2^{k+1}})$得到的，所以先把(1)式两边都乘以$(1+q^{2^{k+1}})$，如能再把右边乘得的式子$\frac{1-q^{2^{k+1}}}{1-q}\cdot(1+q^{2^{k+1}})$化成$\frac{1-q^{2^{k+2}}}{1-q}$就行了。