初中数学竞赛十年

(1978—1988) 试题集解

胡炳生　胡礼祥　编

中国展望出版社

初中数学竞赛十年

（1978—1988）

试 题 集 解

胡炳生　胡礼祥

中国展望出版社

内 容 提 要

本书包括：1.十年来全国和各省市初中数学竞赛试卷30份；2.国内十年初中数学竞赛试题集锦；3.国外十年初中数学竞赛试题博览。书中所有试题都有解答。

初中数学竞赛十年

（1978——1988）试题集解

胡炳生　胡礼祥 编

中国展望出版社 出版

（北京西城区太平桥大街4号）

北京新丰印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行

开本787×1092毫米1/32　印张　9.625　字数：215,000

1989年2月北京第1版　1989年8月第2次印刷

印数18001——25300

统一书号：ISBN 7—5050—0393—3/G.54

定价：3.15元

序　　言

1988年7月，我与复旦大学舒五昌副教授，率领6名中学生，参加了在澳大利亚首都——堪培拉举行的第29届国际数学奥林匹克（IMO）。我国同学为国争光，在参赛的49个国家和地区中，总分名列第二，仅次于苏联队，其中何宏宇、陈晞两位同学以优异成绩争得金牌，其余4位同学获得银牌。回忆起在堪培拉的日日夜夜里，既有紧张的竞争，智力的角逐；在各国的领队之间，在选手之间，又充满着友谊、诚实、公正的气氛。这一切使我深信，数学竞赛，作为发现人才，培育人才的一种特殊方式，一定会持续地进行下去，越来越兴旺发达。

在我国，早在五十年代，在老一辈数学家华罗庚教授等人的发起和领导下，数学竞赛在我国的一些主要城市进行过多次，收到了可喜的成效。经过十多年的沉寂之后，1978年开始，数学竞赛又在我国重新举行，并且规模越来越大，逐渐形成全国性的“联赛”，至今已有十年了。现在，每年数以十万计的中学生参加的初、高中全国数学联赛，不仅成了广大中学生学习活动中的一个重大事件，而且也牵动着众多的教师和家长的心。

1986年，我国第一次派出“满队”参加第27届“IMO”以来，连续三年，我国中学生队都名列前茅，取得了令人瞩目的好成绩。究其原因，我想大致有以下两点：1.我国中学生有较

为扎实的基础知识和较熟练的运算技能，这是我国广大中学数学教师辛勤劳动的结果。2.从1986年初开始，在前一年全国高中联赛基础上，举办数学冬令营，选拔国家集训队；再经过短期培训和严格考试，组成国家代表队。严格的选拔和训练，是我国选手取胜的关键。这一点，已越来越被人们所接受了。

1990年，将在我国举行第31届IMO。这极大地鼓舞着我国广大中学数学教师和中学生。数学奥林匹克学校正在各地兴起，各省市已经着手准备，以便为国家输送本地区的优秀选手，为祖国争取更大的荣誉。可以预见，在近几年内，数学竞赛的培训热朝，将会一浪高过一浪。

数学竞赛所涉及的内容，虽不包括高等数学，但是其中已有高等数学中某些常见的思想方法；它又不全同于中学数学教材中的内容，它包含着更广泛的专门知识，需要更为灵活的思维和技巧。近年来，国外有人提出“竞赛数学”这一名词，正是强调着它的特殊性。

为了学好数学，为了在数学竞赛中一显身手，我们的中学生迫切需要丰富的课外读物。中学数学教师在数学竞赛的组织和辅导工作中，也需要有详尽的参考资料。由中国展望出版社出版的《中学生数学竞赛丛书》，就是为了适应上述需要而编写的。丛书由下列四本书组成：1、国际数学奥林匹克三十年(1959—1989)试题集解；2、初中数学竞赛十年(1978—1988)试题集解；3、高中数学竞赛十年(1978—1988)试题集解；4、数学解题研究和发现。

这些书籍复盖着不同层次的数学竞赛，即从初中到高中，再到被公认为最高水平的国际数学奥林匹克，能够满足各种不同程度和水准的学生的要求。前三本书搜集了直至最近一年的资料，体现了直到目前为止最好的完备性。第四本书则着重研

究数学竞赛解题方法的特性和共性，是一本居高临下来谈方法和技巧的书籍。我相信，这些书籍对广大中学生和数学教师将有很大的帮助。

这套丛书的主要组织者和撰稿人，安徽师范大学的胡炳生、胡礼祥副教授，多年来在从事高等数学教育的同时，一直担任中学数学杂志的编辑，热心于数学竞赛的组织和辅导工作，是数学竞赛和数学普及工作方面的活动分子和知名人士，这就保证了这套丛书的质量。借此机会向读者推荐这一套丛书，是我十分乐于承担的义务。

中国科技大学　常庚哲

1988年11月

目　　录

一九八五年省市自治区联合初中数学竞赛试题及解答

一、选择题：

本题共有6个小题。每一小题都给出了以(A)，(B)，(C)，(D)为代号的四个答案，其中只有一个答案是正确的。请将正确的答案用代号填在各题的括号内。

1． 设$ABCD$为圆内接四边形，现在给出四个关系式

(1) $\sin A=\sin C$；　　(2) $\sin A+\sin C=0$；

(3) $\cos B+\cos D=0$；　　(4) $\cos B=\cos D$.

其中总能成立的关系式的个数是

(A)一个。　(B)两个。　(C)三个。

(D)四个。　　（江西提供）

答（　　）

2． 若n是大于1的整数，则

$$p=n+(n^2-1)^{\frac{1-(-1)^n}{2}}$$ 的值

(A)一定是偶数。　(B)一定是奇数。

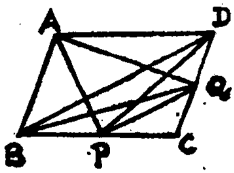
(C)是偶数但不是2。

(D)可以是偶数也可以是奇数。　（湖北提供）

答（　　）

3． 在平行四边形$ABCD$中，P为BC的中点，过P作

BD的平行线交CD于Q，连 PA、PD、QA、QB，则图中与$\triangle ABP$ 面积相等的三角形，除$\triangle ABP$外还有



(A)三个。　　(B)四个。

(C)五个。　　(D)六个。

（湖北提供）

答（　　）

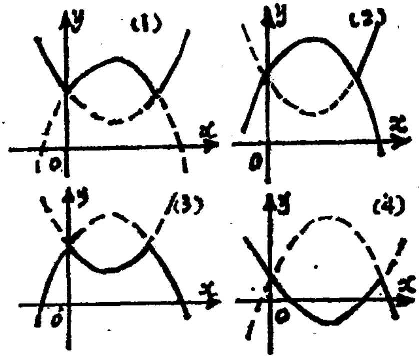
4．函数 $y=1-|x-x^2|$ 的图象大致形状是

(A)图 1 中的实线部分。

(B)图 2 中的实线部分。

(C)图 3 中的实线部分。

(D)图 4 中的实线部分。



（湖北提供）

答（　　）

5．〔x〕表示不超过 x 的最大整数部分，例如$\left[\frac{15}{4}\right]=3$，若

$$y=4\left(\frac{x+[u]}{4}-\left[\frac{x+[u]}{4}\right]\right)$$

且当 $x=1, 8, 11, 14$时　　$y=1$；

$x=2, 5, 12, 15$时　　$y=2$；

$x=3, 6, 9, 16$时　　$y=3$；

$x=4, 7, 10, 13$时　　$y=0$，

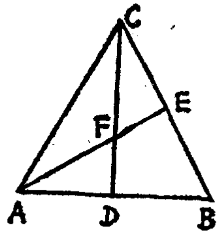
则表达式中的 u 等于

(A) $\frac{x+2}{4}$.　　(B) $\frac{x+1}{4}$.　　(C) $\frac{x}{4}$

(D) $\frac{x-1}{4}$.　　　　　　　　(北京提供)

答(　　)

6. 如图、在等腰△ABC中，CD是底边AB上的高，E是腰BC的中点，AE交CD于F，现在给出三条路线：



(a) $A\to F\to C\to E\to B\to D\to A$;

(b) $A\to C\to E\to B\to D\to F\to A$;

(c) $A\to D\to B\to E\to F\to C\to A$;

设它们的长度分别是$L(a)$，$L(b)$，$L(c)$。那么下列三种关系式：

$L(a)<L(b)$，　$L(a)<L(c)$，　$L(b)<L(c)$中，一定能够成立的个数是：

(A) 0个。　(B) 1个。　(C) 2个。　(D) 3个

(河南提供)

答(　　)

二、填空题：

请将正确的结果填入"________"号内。

1. 设$a-b=2+\sqrt{3}$，$b-c=2-\sqrt{3}$，则$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$的值为________。　　(云南提供)

2. 设方程$x^2-402x+k=0$的一根加3，即为另一根的80倍，那么$k=$________。　　(广东提供)

3. 有甲、乙、丙三种货物，若购甲3件，乙7件，丙1件，共需3.15元，若购甲4件，乙10件，丙1件共需4.20元，现在购甲、乙、丙各1件共需________元。

(湖北提供)

4．不等式$42x^2+ax<a^2$的解为__________.

（辽宁提供）

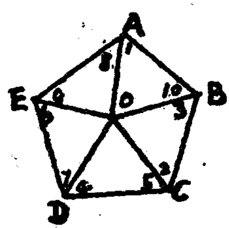
5．已知$x(x\neq 0,\ \pm 1)$和1两个数，如果只许用加法，减法，1作被除数的除法三种运算（可以使用括号），经过六步算出x^2，那么计算的表达式是__________.

（安徽提供）

6．在正实数集上定义一个运算$*$，其规则为：

当$a\geqslant b$时，$a*b=b^a$；当$a<b$时，$a*b=b^2$，根据这个规则，方程$3*x=27$的解是__________.

（湖北提供）



三、如图，O为凸五边形$ABCDE$内一点，且

$\angle 1=\angle 2$，$\angle 3=\angle 4$，

$\angle 5=\angle 6$，$\angle 7=\angle 8$，

求证：$\angle 9$与$\angle 10$相等或互补。

（安徽提供）

四、$\odot O_1$、$\odot O_2$外切于A，半径分别为r_1和r_2；PB、PC分别为两圆的切线，B、C为切点；$PB:PC=r_1:r_2$；PA交$\odot O_2$于E点。

求证：$\triangle PAB\backsim\triangle PEC$.

（天津提供）

五、有一长、宽、高分别为正整数m、n、r（$m\leqslant n\leqslant r$）的长方体，表面涂上红色后切成棱长为1的正方体，已知不带红色的正方体个数与两面带红色的正方体个数之和，减去一面

带红色的正方体个数得1985，求m、n、r的值。

（黑龙江提供）

解　　答

一、1. **解**：因$ABCD$为圆内接四边形，故$C=180°-A$，且A、C都不能为0及180°，所以(1)式恒成立；(2)式恒不成立。

同样由$D=180°-B$，(3)式恒成立，(4)式只有$B=D==90°$时成立。　∴　答案为(B)

2. **解**：当n为偶数时，$\frac{1-(-1)^n}{2}=0$，$p=n+1$是奇数；当n为奇数时，$\frac{1-(-1)^n}{2}=1$，且n^2-1为偶数，故　$p=n+(n^2-1)$为奇数。　∴　答案为(B).

3. **解**：由题设条件，Q是CD的中点，这样图中与$\triangle ABP$面积相等的三角形有两类：(1)与$\triangle ABP$等底等高的三角形有二个：$\triangle BPD$、$\triangle PCD$，(2)一边为BP边的二倍，而高为BP上的高之半的三角形有三个：$\triangle BCQ$、$\triangle ADQ$、$\triangle QDB$.　∴　答案为(C).

4. **解**：因$x^2-x=0$的根为0及1，故

$$y=1-|x-x^2|=1-|x^2-x|$$
$$=\begin{cases}1+x^2-x & 0\leqslant x\leqslant 1\\ 1-x^2+x & x<0,\ x>1\end{cases}$$

由二次函数的图象可知，函数$y=1-|x-x^2|$的图象的大致形状是图3中的实线部分。　∴　答案为(C)。

5. **解**：若$u=\frac{x+2}{4}$，则当$x=2$时，$u=1$，$[u]=1$，因而

$y=4\left(\frac{1}{4}-\left[\frac{1}{4}\right]\right)=1$. 与题设 $x=2$ 时，$y=2$ 相违，故(A)错。同样，令 $x=3$，可断定(B)错；令 $x=4$，可断定(C)错。

$\therefore$ 正确的答案为(D)。

6. **解**：由题设条件可知，F 是$\triangle ABC$ 的重心，因而 $CF=2DF$，$AF=2EF$. 因

$$L(c)=AB+BE+EF+FC+CA$$

$$L(a)=AF+FC+CB+BA$$

故 $L(c)-L(a)=BE+EF-AF=BE+EF-BF>0$

即 $L(c)>L(a)$

$$L(b)=AC+CE+EB+BD+DF+FA$$

$$L(c)-L(b)=(AB-BD)+(EF-FA)+(FC-DF)$$

$-CE=AD+DF-CE-EF$

当$\triangle ABC$为等边三角形时，$AD=CE$，$DF=EF$，因而 $L(c)=L(b)$，这说明 $L(b)<L(c)$不恒成立，再因

$$L(a)-L(b)=FC+DA-AC-DF=DF+DA-AC$$

当$\angle ACB=120°$，且 $AC=BC=1$ 时，$AP=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$CD=\frac{1}{2}$，$DF=\frac{1}{6}$，故

$$L(a)-L(b)=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{6}-1=\frac{3\sqrt{3}+1}{6}-1>0$$

即 $L(a)>L(b)$　　故不等式 $L(a)<L(b)$不恒成立，

$\therefore$ 答案为(B).

二、1. **解**：令$S=a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$　　则

$$2S=2a^2+2b^2+2c-2ab-2bc-2ca$$

$$=(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2$$

$$=(2+\sqrt{3})^2+(2-\sqrt{3}^2)+4^2=30$$

$$\therefore \quad S=\frac{1}{2}\times 30=15$$

即 $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=15$

2. **解**：设方程两根为 x_1，x_2

根据题意有：

$x_1+3=80x_2$ $\qquad\therefore\quad x_1=80x_2-3$

又 $x_1+x_2=402$ $\qquad$ 即

$80x_2-3+x_2=402$ $\qquad\therefore\quad 81x_2=405$.

从而 $x_2=5$，$x_1=80x_2-3=397$

于是 $k=x_1x_2=397\times 5=1985$.

3. **解**：设购甲货1件需 x 元，乙货1件需 y 元、丙货1件需 z 元。

根据题意有：

$$\begin{cases}3x+7y+z=3.15 & ①\\ 4x+10y+z=4.20 & ②\end{cases}$$

②减去①有：$x+3y=1.05$

$\therefore\quad 2x+6y=2.10$ $\qquad$ ③

由①式可得：$x+y+z+2x+6y=3.15$

将③式代入上式有：

$x+y+z+2.10=3.15$

$\therefore\quad x+y+z=1.05$

因此购甲、乙、丙各一件共需1.05元。

4. **解**：原不等式变为：$42x^2+ax-a^2<0$

显然当 $a=0$ 时，无解 $\quad$ ($42x^2$ 恒$\geqslant 0$).

$\because\quad$ 两根$x_{1,2}=\dfrac{-a\pm 13|a|}{84}$

$\therefore\quad$ 当 $a>0$ 时，原不等式的解为：$-\dfrac{a}{6}<x<\dfrac{a}{7}$

当 $a<0$ 时，原不等式的解为：$\frac{a}{7}<x<-\frac{a}{6}$.

5. **解**：$\because \quad 1\div[1\div x-1\div(x+1)]+x$

$$=1\div\left[\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}\right]-x=x^2+x-x=x^2$$

$\therefore$表达式是：$1\div[1\div x-1\div(x+1)]-x$

或$1\div[1\div(x-1)-(1\div x)]+x$.

6. **解**：若 $3\geqslant x$ 　　则 $3*x=x^3$

$\because \quad 27=3^3 \qquad \therefore \quad x=3$

若 $3<x$ 则 $3*x=x^2$

$\because \quad 27=(\sqrt{27})^2 \qquad \therefore \quad x=\sqrt{27}=3\sqrt{3}$

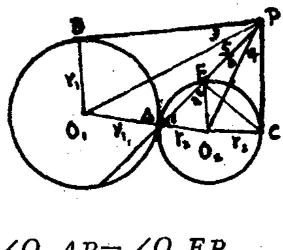
因此方程 $3*x=27$的解是3，$3\sqrt{3}$.

三、证：由正弦定理及已知条件得：

$$\frac{OA}{\sin\angle 10}=\frac{OB}{\sin\angle 1}=\frac{OB}{\sin\angle 2}=\frac{OC}{\sin\angle 3}=\frac{OC}{\sin\angle 4}=$$
$$\frac{OD}{\sin\angle 5}=\frac{OD}{\sin\angle 6}=\frac{OE}{\sin\angle 7}=\frac{OE}{\sin\angle 8}=\frac{OA}{\sin\angle 9}$$

从而 $\sin\angle 10=\sin\angle 9$.故$\angle 9$ 与$\angle 10$相等或互补.

四、证：连$O_1A,O_1B,PO_1,PO_2,O_2A,O_2C$；则 O_1、A、O_2 三点共线，



$\because \quad PB:PC=r_1:r_2$

$\therefore \quad rt\triangle PBO_1\backsim rt\triangle PCO_2$

$\therefore \quad \angle 3=\angle 4$，$PO_1:PO_2=r_1:r_2=O_1A:O_2A$，于是$PA$为$\angle O_1PO_2$的平分线，即$\angle 5=\angle 6$. 连$O_2E$　由$\angle 1=\angle 2$知$\angle O_1AP=\angle O_2EP$

$\therefore \quad \triangle O_1AP\backsim\triangle O_2EP$.

$\therefore \quad PA:PE=r_1:r_2$，即$PA:PE=PB:PC$. 又由$\angle 3$

$=\angle 4$，$\angle 5=\angle 6$ 知

$\angle BPA=\angle CPE$，　∴ $\triangle PAB\backsim\triangle PEC$

五、解：(1) 依题意，不带红色的正方体个数为：

$$(m-2)(n-2)(r-2)$$

一面带红色的正方体个数为：

$$2(m-2)(n-2)+2(m-2)(r-2)+2(n-2)(r-2)$$

两面带红色的正方体个数为：

$$4(m-2)+4(n-2)+4(r-2)$$

于是有

$$(m-2)(n-2)(r-2)+4[(m-2)+(n-2)+(r-2)]-2[(m-2)(n-2)+(m-2)(r-2)+(n-2)(r-2)]=1985.$$

即 $[(m-2)-2][(n-2)-2][(r-2)-2]+8=1985$

∴ $(m-4)(n-4)(r-4)=1977=1\times 3\times 659$

由 $m\leqslant n\leqslant r$ 知 $m-4\leqslant n-4\leqslant r-4$.

∴ $m-4=1$，$n-4=3$，$r-4=659$

即 $m=5$，$n=7$，$r=663$.

同理，由 $1977=1\times 1\times 1977$

$m-4=1$，$n-4=1$，$r-4=1977$，

即 $m=5$，$n=5$，$r=1981$。

(2) 若 $m=1$，这时 $n=1$ 没解，∴ $n\geqslant 2$. 依题意，不带红色的正方体个数为 0，一面带红色的正方体个数也为 0，两面带红色的正方体个数为：$(n-2)(r-2)$.

于是有 $0+(n-2)(r-2)-0=1985$，

即 $(n-2)(r-2)=1985=1\times 1985=5\times 397$.

∵ $2\leqslant n\leqslant r$，故 $0\leqslant n-2\leqslant r-2$.

∴ 由 $n-2=1$，$r-2=1985$.